

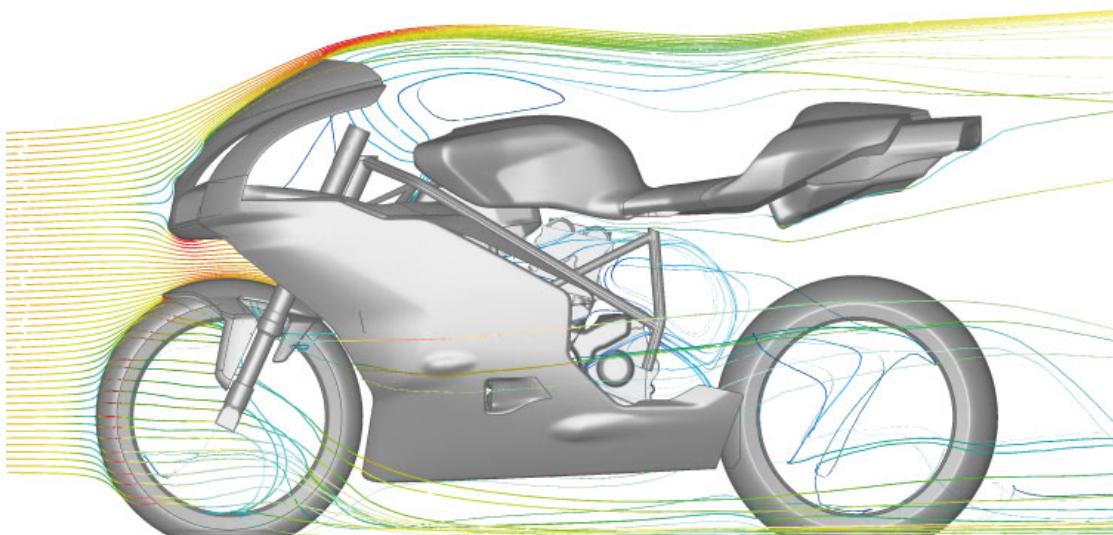
به نام خدا

از سری جزوات آموزشی دینامیک سیالات

# مقدمه ای بر مفاهیم جریانهای آشفته و مدلسازی آنها

*An Introduction to Turbulent Flows and Turbulence Modeling*

به انضمام مطالی راجع به مدلهای مختلف عددی جریانهای آشفته و ویژگیهای آنها، توابع دیواره و محدوده کاربرد آنها، اثرات زیری بر رودی جریانهای آشفته، انتقال حرارت در جریانهای آشفته، شرایط مرزی مناسب برای جریانهای آشفته و پایداری و ناپایداری در مدلسازی جریانهای آشفته



تهریه و تنظیم از: مهدی صنیعی نژاد

CFD\_GROUP@Yahoo.Com

SANIEENEZHAD@MEHR.SHARIF.EDU

ویرایش سوم

خرداد ۱۳۸۳

از پدر گر قالب تن یافتم از معلم جان روشن یافتم

تقدیم به دستهای زحمتکش پدرم و محبتهای بی دریغ مادرم؛  
و همچنین تقدیم به همسرم که با کمکهای خود مراد راه تالیف این  
مجموعه یاری داد.

شماره صفحه	عنوان مطلب
۷	پیش گفتار
۸	<b>فصل اول: مقدمه</b>
۹	جريان آرام
۱۰	جريان آشفته
۱۲	لایه مرزی
۱۳	معادله حاکم بر جريان سیالات
۱۵	راه تشخیص آرام یا آشفته بودن یک جريان چیست؟
۱۸	شرط آشفتگی جريان جابجایی اجباری
۱۹	شرط آشفتگی جريان جابجایی آزاد
۲۲	معيار صاف بودن یا زبر بودن یک سطح چیست؟
۲۵	<b>فصل دوم: ویژگیهای کلی جريانات آشفته در مقایسه با جريانهای آرام</b>
۲۸	پایداری جريانات آرام
۳۰	تحلیل پایداری جريانات آرام
۳۳	تحلیل پایداری برخی از جريانات کلاسیک
۳۵	لایه های برشی
۳۶	جريانات جت
۳۷	جريانات برخاستگی یا Wake
۳۸	تئوری پایداری لرج
۴۰	مروری بر خواص جريانات آشفته در مقایسه با جريانات آرام
۴۰	چگونگی تشکیل ادی ها
۴۴	طول مقیاس کولموگروف
۴۹	شدت آشفتگی
۵۰	زمان مقیاس آشفتگی
۵۱	<b>فصل سوم: معادلات حاکم بر جريانات آشفته</b>
۵۲	روش آماری برای بررسی جريانات آشفته
۵۳	متوسط گیری جمعی
۵۴	معادلات حرکت در جريانات آشفته
۵۵	معادله پیوستگی برای جريان آشفته
۵۵	معادله ممنتوم برای جريان آشفته
۵۹	معادله انرژی آشفتگی در جريانات آشفته
۶۱	تنش برشی در جريانات آشفته
۶۲	استفاده از سرعت متوسط $\bar{u}$ در رابطه تنش برشی
۶۲	استفاده از سرعت متوسط $\bar{u}$ با ترم ویسکوزیتۀ اصلاح شده
۶۳	استفاده از یک تغوری نیمه تجربی برای بدست آوردن ویسکوزیتۀ اصلاح شده $\mu_{mod}$

۶۶	تعیین اندازه طول اختلاطی $l_m$ در نواحی مختلف یک لایه مرزی
۶۷	اندازه طول اختلاطی $l_m$ برای ناحیه نزدیک دیواره
۶۷	اندازه طول اختلاطی $l_m$ برای جریانات برشی آزاد و جریانات محصور
۶۸	جریانات برشی آزاد
۶۸	جریانات محصور
۶۹	ترکیب تنش برشی منتجه از میدان سرعت متوسط با مولفه های مربوط به آشفتگی
۷۰	فصل چهارم : بررسی جریانهای نزدیک دیواره و مفهوم توابع دیواره
۷۶	توابع دیواره و نحوه بدست آوردن آنها
۸۲	توابع دیواره برای توزیع دما در نزدیکی دیواره
۸۵	اثرات زبری سطح بر روی توابع دیواره
۹۰	کمیت های $U^*$ و $y^*$
۹۱	فصل پنجم: مدلسازی جریانات آشفته و مدلهای آشفتگی
۹۴	روابط اساسی حاکم بر Eddy-viscosity
۹۶	رابطه اساسی Boussinesq Eddy-viscosity
۹۷	معادله ممنتوم در یک جریان آشفته
۱۰۰	رابطه اساسی speziale Eddy-viscosity
۱۰۱	رابطه اساسی Launder Eddy-viscosity
۱۰۲	مدلهای Eddy-viscosity
۱۰۳	مدلهای صفر معادله ای
۱۰۵	مدلهای یک معادله ای
۱۰۷	مدلهای دو معادله ای
۱۰۹	مدل استاندارد $k - \varepsilon$
۱۱۲	جریانات همدمای بدون انتقال جرم
۱۱۲	جریانات غیر همدما و جریانات با انتقال جرم
۱۱۳	ویژگیهای مدل استاندارد $k - \varepsilon$
۱۱۵	مدل توسعه یافته $k - \varepsilon$
۱۱۶	ویژگیهای مدل توسعه یافته $k - \varepsilon$
۱۱۷	مدل RNG $k - \varepsilon$
۱۱۸	ویژگیهای مدل RNG $k - \varepsilon$
۱۱۹	مدل $k - \varepsilon$ غیر ایزوتروپیک
۱۲۱	مدل ویلکوکس $k - \omega$
۱۲۲	ویژگیهای مدل ویلکوکس $k - \omega$
۱۲۳	مدل تنش برشی $k - \omega$
۱۲۵	مقایسه کلی مدلهای صفر معادله ای با مدلهای دو معادله ای
۱۲۶	راههای رسیدن به جوابهای همگرا شده واقعی منطبق بر فیزیک جریان
۱۲۷	شرایط مرزی مدلهای دو معادله ای
۱۲۸	شرایط مرزی ورودی برای مدلهای دو معادله ای

۱۲۹	جريانات خارجي اغير محصور
۱۲۹	تخمين $k$
۱۲۹	تخمين $\varepsilon$
۱۳۱	جريانات داخلي /نسبتاً محصور
۱۳۱	تخمين $k$ و $\varepsilon$
۱۳۴	شرایط مرزی خروجی و تقارن برای مدلهاي دو معادله اي
۱۳۵	شرایط مرزی نفوذی برای مدلهاي دو معادله اي
۱۳۵	نسبت هاي کوچک
۱۳۶	نسبت هاي بزرگ
۱۳۸	شرایط اوليه برای مدلهاي دو معادله اي
۱۳۹	تراكم مش و توزيع فضائي آن
۱۴۰	استراتژيها و الگوريتم هاي حل برای مدل هاي دو معادله اي
۱۴۱	پايداري حل
۱۴۱	منابع ناپايداري حل
۱۴۱	ناپايداري هاي حل مرتبط با ترم هاي اضمحلال Dissipation
۱۴۲	ناپايداري هاي ناشي از ترم هاي Advection
۱۴۳	ناپايدار هاي جريانات حاوي نواحي آرام و آشفته کنار همديگر
۱۴۴	روش هاي پايدارسازی
۱۴۴	Upwinding
۱۴۴	clipping
۱۴۶	مدل انتقال تنش هاي رينولدز يا RSM
۱۴۶	دلائل استفاده از مدل RSM
۱۴۹	به دست آوردن معادله انتقال صريح برای تانسور رينولدز
۱۴۹	معادله پيوستگي
۱۴۹	معادله ممنوع
۱۵۰	معادلات انتقال تنش رينولدز RSM
۱۵۱	معادله انتقال انرژي جنبشي آشفتگي
۱۵۲	توضيح جامع تر راجع به هر يك از ترمهاي موجود در معادله انتقال تنش رينولدز RSM
۱۵۶	مدلسازی تانسور تنش رينولدز
۱۵۶	ترم ديفيوژن
۱۵۷	ترم توزيع مجدد Redistribution
۱۵۹	ترم اضمحلال Dissipation
۱۶۲	مزايا و معایب مدل انتقال تنش رينولدز RSM
۱۶۳	فصل ششم: ذكر چند نکته در مورد مدلسازی جريانات آشفته
۱۶۴	جديدترین دستاوردها در بسط و توسيع توابع دیواره بالاخص در مسائل در گير با انتقال حرارت
۱۶۶	روش مرسوم در توابع دیواره پيشين
۱۶۷	محاسبه $p_k$ در ناحيه نزديک دیواره

۱۶۸	محاسبه ترم اضمحلال در نزدیکی دیواره
۱۷۰	مدل فیزیکی ارائه شده برای ناحیه مجاور دیواره
۱۷۲	توابع دیواره توسعه یافته برای میدان دما
۱۷۴	توابع دیواره توسعه یافته برای میدان سرعت
۱۷۶	نرخ اضمحلال متوسط و تعیین مقدار $\gamma_L$ در توابع دیواره توسعه یافته
۱۷۸	وابستگی دمائی ویسکوزیته و اعمال اثر این تغییرات در توابع دیواره توسعه یافته
۱۷۹	وارد نمودن اثرات آرام سازی جریان در توابع دیواره توسعه یافته
۱۸۱	مزایای توابع دیواره اصلاح شده
۱۸۳	مدلسازی ناحیه زیر لایه لزج نزدیک دیواره
۱۸۸	کنترل ضخامت المانها (سلول ها) در نزدیکی دیواره
۱۸۹	یک سؤال مهم
۱۹۰	لزوم استفاده از توابع دیواره برای جریانات رینولدز بالا
۱۹۲	اسکالارهای غیرفعال در جریانات آشفته
۱۹۳	نگاهی مجدد به مدلها آشفتگی دو معادله ای
۱۹۳	تعیین مقدار ثابت
۱۹۵	ضعف مدل $\epsilon - k$ از کجا ناشی می شود؟
۱۹۷	تفسیر جریانات ساده برشی از نقطه نظر ترم های تنفس آشفته
۱۹۹	استفاده از جواب های وابسته به زمان حتی برای مسائل جریان دائمی
۲۰۰	فصل هفتم: چند نمونه از جریانات آشفته و مدلسازی آنها
۲۱۳	فهرست مراجع
۲۵	فصل آخر

نرdban این جهان ما تهی است  
ل مجرم هر که بالاتر نشست  
استخوانش سختتر خواهد شکست

از ظریفی شنیدم که می گفت:

دانشمند واقعی کسی است که به این شناخت رسیده و این را فهمیده باشد که آنچه میداند، در مقایسه با آنچه نمیدانند، اندک است و آنقدر معلومات او در مقایسه با مجھولانش ناچیز و کوچک است که به حساب نمی آیند و وی بر این اساس خود را شایسته نام "دانشمند و دانا" نمی داند، بلکه همواره خویش را در صف نادانها قلمداد نموده و پیوسته در پی تکمیل نواقص علمی و معرفتی خویش، بالاخص شناخت جایگاه خود در دو گیتی و وظیفه خود نسبت به دیگران، بر می آید.

غیر از خدا هر آنچه که خواهی شکست توست هوشیار باش، خلقت عالم ز بهر توست

جزوه ای که در ادامه آمده است، دربرگیرنده مباحثی از "جریانهای آشفته و مدلسازی آنها" می باشد. سعی بر آن شده است که اکثر مطالب این جزو، با استناد به مقالات و کتب معتبر ارائه شده باشد و از ارائه حدسیات ذهنی و پیش فرضهای مبهم تا جای ممکن صرفنظر شده است. در ضمن سعی شده است که مطالب ارائه شده به زبانی ساده و قابل فهم برای تمام مهندسین و بدون استفاده از تئوریهای پیچیده آشفتگی بیان گردند. از آنجا که هیچ ادعائی مبنی بر کامل و بدون نقص بودن جزوء ارائه شده وجود ندارد، لذا امیدوارم دیگر دوستان و بالاخص اساتید گرامی با اشاره به نواقص و کمبودهای این جزو (که قطعاً کم نمی باشند)، این حقیر را در جهت تکمیل هر چه بهتر جزو و رفع نواقص احتمالی آن یاری نمایند. اینجانب این جزو را با کمال میل و به صورت رایگان در اختیار علاقمندان به مبحث جریانهای آشفته قرار داده ام، لذا امیدوارم دوستان از هر گونه استفاده انتفاعی از این جزو جدأ پرهیز نمایند.

با آرزوی ایرانی آباد و سرافراز

مهدى صنيعي نژاد

خرداد ماه ۱۳۸۳

# فصل اول:

## مقدمه

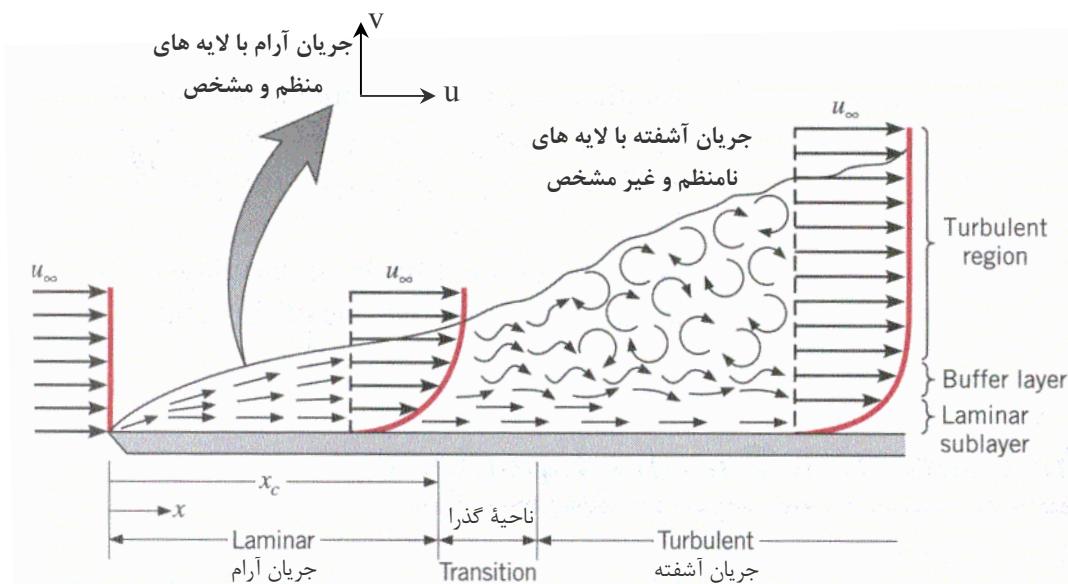
۸

مقدمه ای بر جریانهای آشفته و مدلسازی آنها

تهریه و تنظیم از مهندس مهدی صنیعی نژاد – Email: CFD\_GROUP@YAHOO.COM

## جريان آرام:

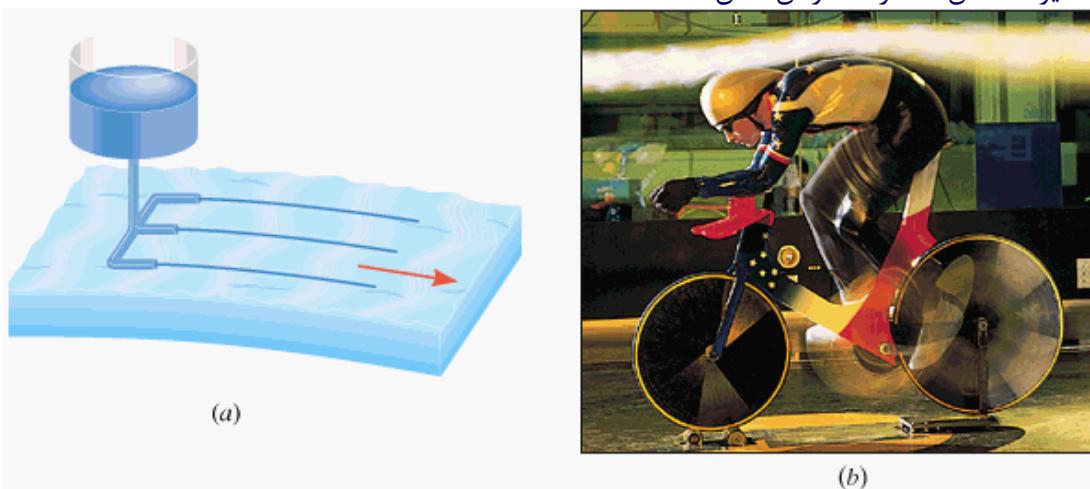
جريان آرام جريانی است که در آن سیال به طریقی منظم و تحت لایه ها و مسیرهای مشخص حرکت میکند، از همینرو برای توصیف آن از عبارت "طبقه طبقه شده، برگرفته از کلمه **Laminate**" استفاده شده است. در یک جريان آرام، شکل لایه ها مشخص و با انحنای های ملائم می باشند. در چنین جريانی، مولکولهای سیال با پیشروی در طول مسیر، در داخل لایه اولیه خود باقی خواهند ماند. همچنین در چنین جريانی، مولکولهای نزدیک دیواره، کندترین مولکولها بوده و نزدیکترین دما به دمای دیواره را خواهند داشت.



Velocity boundary layer development on a flat plate.

شکل(۱): رشد لایه مرزی بر روی یک صفحه تخت

در شکل (۱)، بخش منتهی الیه سمت چپ شکل، توصیف کننده جريان آرام می باشد. فلشها، جريان هر مولکول از سیال را به همراه طی طریق لایه ای آنها نشان می دهد. در شکل (۲) نمونه ای از جريان آرام و مسیر مشخص خط رنگ در آن نشان داده شده است.



شکل(۲): در یک جريان آرام، خطوط جريان کاملاً مشخص و تفکیک شده از یکدیگر باقی می مانند.

## جريان آشفته:

در شکل مربوط به رشد لایه مرزی بر روی یک صفحه تخت، بخش منتهی الیه سمت راست شکل، توصیف کننده جریان آشفته است.

همانطور که از نام این جریان مشخص است، این جریان رفتاری بسیار اتفاقی و بی سازمان دارد. در این جریان، به واسطه فرآیندهای اختلاطی شدید، جزء در نواحی بسیار نزدیک به دیواره، شکل لایه های جریان به راحتی قابل تشخیص نبوده و مولکولهای سیال مسیر مشخصی را طی نمی کنند. به عبارت دیگر جریان آشفته نوعی از جریان سیال است که در آن سیال تحت نوسانات جریانی<sup>۱</sup> و فرآیندهای اختلاطی شدید قرار میگیرد، این رفتار بر خلاف رفتار جریان آرام است که در آن جریان سیال تحت لایه ها و مسیرهای مشخص حرکت می نماید. در یک جریان آشفته، اندازه سرعت در هر نقطه دائمًا تحت نوسانات و تغییرات، هم در اندازه و هم در راستای حرکتی، قرار می گیرد، به طوریکه تشخیص موقعیت هر ذره در داخل میدان جریان و نیز در هر لحظه مشکل می باشد. همین وضعیت نوسانات دائمی و غیر مشخص در اندازه سرعت را می توان در اندازه فشار، دما و چگالی هر نقطه مشاهده نمود. البته نوسانات اندازه چگالی تنها در جریانهای تراکم پذیر و یا جریانهای درگیر با انتقال حرارت جابجایی آزاد مشاهده می گردد.

جریان آشفته یک رودخانه خروشان و یا جریانهای متلاطم باد مثال روشنی از دسته جریانهای آشفته محسوب می شوند، اگرچه ممکن است اندازه سرعت متوسط در این جریانهای پائین باشد. اغلب جریانهایی که در مسائل مهندسی با آنها دست به گریبان هستیم، جریانهای آشفته محسوب می شوند، مگر در جریانهای با اعداد رینولدز خیلی کوچک، یا جریانهای بسیار نزدیک به لبه حمله اجسام و یا لایه های بسیار نزدیک به سطوح جامد اجسام و یا سیالاتی که دارای ویسکوزیتّه بسیار بالا باشند. به طور کلی یک جریان آشفته دارای خصوصیات ذیل میباشد:

۱- بی نظمی مکانی و زمانی

۲- طیف پیوسته مکانی و زمانی

۳- رینولدزهای بالا (عموماً)

۴- اضمحلال افزایش یافته انرژی و ممنتوم

۵- اختلاط افزایش یافته و انتقال حرارت افزایش یافته و ضریب پسای پوسته ای افزایش یافته

<sup>۱</sup> Fluctuation

۶- سه بعدی بودن ( حتی در جریانهای که ظاهراً دو بعدی می باشند )

۷- حرکات غالب و رتیسیتال

۸- تناوی بودن

مثالهای رایج جریانهای آشفته عبارتند از:

۱- جریان درون توربوماشینها ( اعم از پمپها، کمپرسورها، فنها، توربینها، توربوجتها و غیره )

۲- جریان درون لوله های انتقال سیال ( اعم از جریانهای تک فاز و چند فاز )

۳- جریان درون مبدلها حراتی ( بالاخص جریان خارجی بین لوله ها و یا صفحات مبدل )

۴- جریان درون موتورهای احتراقی

۵- جریان بر روی سطوح اجسام متحرک نظیر خودروها یا هواپیماها و یا شناورها

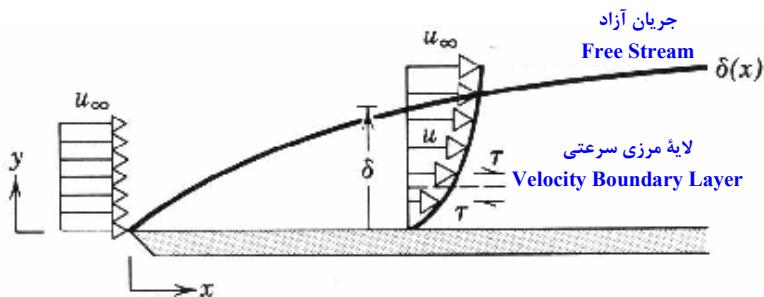
۶- جریان اتمسفر و یا جریان اقیانوسها

۷- جریانهای جت اعم از جت گاز به درون یک محیط دیگر و یا اسپری مایعات درون یک محیط

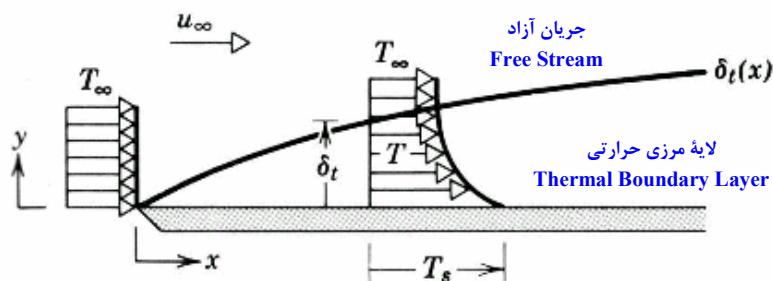
۸- جریان پشت اجسام متحرک و صدها نمونه دیگر

## لایه مرزی:

لایه مرزی هیدرودینامیکی ناحیه‌ای از جریان است که در آن، نیروهای تنش برشی، نیروهای به وجود آمده ناشی از حضور دیواره جامد می‌باشند یا ناحیه‌ای است که جریان اطراف متأثر از حضور دیواره می‌باشند. به عبارت دیگر، لایه مرزی هیدرودینامیکی ناحیه‌ای از جریان است که در آن سیال اصطکاک و پسای<sup>۳</sup> حاصل از حضور دیواره را حس نمینماید. در این حالت، نزدیکترین مولکولها به دیواره ( که به دیواره چسبیده‌اند ) به واسطه شرط عدم لغش<sup>۴</sup>، نسبت به دیوار اصلاً حرکت نمی‌کنند. با فاصله گرفتن از دیواره، رفتہ رفته اثر دیواره بر روی جریان آنقدر کم می‌شود که دیگر جریان حضور دیواره را حس نمی‌کند، یا به عبارت دیگر اثر دیواره بر روی لایه‌های دور جریان از بین می‌رود. به این ناحیه به اندازه کافی دور از دیواره و غیر متأثر از دیواره اصطلاحاً ناحیه جریان آزاد<sup>۵</sup> گفته می‌شود. از نقطه نظر انتقال حرارت، لایه مرزی حرارتی ناحیه‌ای است که در آن از نقطه نظر توزیع دما، جریان اطراف متأثر از حضور دیواره ای با دمای متفاوت از جریان است. تشکیل لایه مرزی حرارتی و لایه لایه شدن سیال باعث تشکیل عایق و تشکیل مقاومت در مقابل انتقال حرارت از دیواره به سیال می‌گردد. در لایه مرزی تشکیل شده در جریانهای آشفته، به واسطه حرکات آشفته جریان، شکل منظم لایه‌های جریان مجاور دیواره از بین رفته و لذا لایه‌های ممانعت کننده میان دیواره و جریان آزاد به نوعی کنار رفته و انتقال حرارت بهتری در مقایسه با جریانهای آرام صورت می‌گیرد.



شکل(۳): لایه مرزی هیدرودینامیکی تشکیل شده بر روی یک صفحه تخت



شکل(۴): لایه مرزی حرارتی تشکیل شده بر روی یک صفحه تخت

<sup>۳</sup> Drag  
<sup>۴</sup> No Slip Condition  
<sup>۵</sup> Free Stream

## معادله حاکم بر جریان سیالات (معادله پیوستگی و معادله ناویر – استوکس<sup>۵</sup>):

معادله پیوستگی<sup>۶</sup> یا معادله بقای جرم در یک جریان سیال به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) = 0 \quad (1-1)$$

که برای یک جریان تراکم ناپذیر، به صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2-1)$$

معادلات ناویر – استوکس، معادلات ممتد حاکم بر جریان سیالات نیوتونی لزج می‌باشد. این معادله در حالت کلی به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$\rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + B_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \zeta \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \quad (3-1)$$

در معادله (3-1)،  $u_i$  مولفه بردار سرعت در راستای فضائی  $i$ ،  $B_i$  بیانگر فشار،  $p$  نیروی حجمی در راستای  $i$ ،  $\mu$  ویسکوزیتۀ سیال و  $\zeta$  ضریب دوم ویسکوزیتۀ می‌باشد.  $\zeta$  برای گازهای تک اتمی برابر صفر می‌باشد. اگرچه تجربه نشان داده است که  $\zeta$  برای سایر سیالات نیز دارای مقدار کوچکی می‌باشد و لذا از آن می‌توان صرفنظر نمود. معمولاً می‌توان ویسکوزیتۀ سیال را از داخل مشتق خارج نمود و در این بین تنها خطای اندازه و قابل چشم پوشی به وجود آید. برای یک جریان تراکم

ناپذیر،  $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$ ، معادله (3-1) به صورت زیر در می‌آید:

$$\rho \frac{D \vec{V}}{Dt} = -\nabla p + \mathbf{B} + \mu \nabla^2 \mathbf{V} \quad (4-1)$$

در معادله (4-1)،  $\mathbf{V}$  بردار سرعت،  $\mathbf{B}$  بیانگر فشار،  $p$  نیروی حجمی و  $\mu$  ویسکوزیتۀ می‌باشد.

معادله (4-1) معادله بسیار مهمی بوده که برای افراد در گیر با مسائل دینامیک سیالات بسیار آشنا و

در عین حال مفید می‌باشد. در معادله (4-1)  $\frac{D}{Dt}$  بیانگر مشتق مادی<sup>۷</sup> بوده و به صورت

<sup>۵</sup> Navier Stokes Equation

<sup>۶</sup> Continuity

<sup>۷</sup> Material Derivative

$$\nabla^2 \cdot \frac{D}{Dt} \text{ اپراتورهای برداری } \quad \frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \phi$$

تعریف میگردد. لازم به ذکر است که

بوده و آنها را نمی توان برای مولفه های سرعت مورد استفاده قرار داد مگر در مختصات کارتزین. به

عنوان مثال مولفه  $X$  معادله ناویر – استوکس به صورت معادله (۱-۵) بیان می شود:

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + F_x + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (۱-۵)$$

و همینطور برای سایر مولفه های معادله ناویر – استوکس. اگرچه ظاهر معادله ناویر – استوکس

معادله ساده ای به نظر می رسد، لیکن به واسطه حضور ترمهای غیر خطی ( ترمهای نظیر  $u \frac{\partial u}{\partial x}$  )

ترمهای مشابه در سمت چپ این معادله ) حل صریح و تحلیلی برای این معادله وجود ندارد و حل

دقیق این مساله یکی از مشکلترین مسائل مهندسی محسوب می گردد. به اعتقاد ریاضی دانها، معادله

ناویر – استوکس از آن دسته معادلاتی است که برای آن جواب یکتا وجود ندارد!

چنانچه از نیروی حجمی در مقابل بیانی صرفنظر نمائیم، خواهیم دید که در حالت کلی معادلات

بقاء به صورت زیر بیان می گردد:

$$\rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j u_{i,j} \right) = -P_{,i} + (\rho - \rho_0) g_i + [\mu (u_{i,j} + u_{j,i})]_j \quad (۶-۱) \text{ بقای ممنتوم}$$

$$\rho \left( \frac{\partial C}{\partial t} + u_j C_{,j} \right) = (\rho \alpha C_{,j})_{,j} + q_c + R \quad (۷-۱) \text{ بقای غلظت}$$

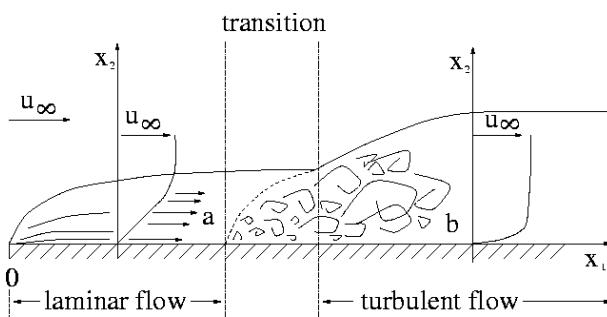
$$u_{j,j} = 0 \quad (۸-۱) \text{ بقای جرم ( پیوستگی )}$$

$$\rho C_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u_j T_{,j} \right) = (\lambda T_{,j})_{,j} + H \quad (۹-۱) \text{ بقای انرژی}$$

## راه تشخیص آرام یا آشفته بودن یک جریان چیست؟

برای رسیدن به جریان آشفته بالاخص بر روی سطوح جامد و در داخل کانالهای باز و یا لوله‌ها، ابتدا جریان بایستی از "حالت آرام"<sup>۸</sup>، وارد مرحله "گذر از حالت آرام به آشفته"<sup>۹</sup> و در نهایت وارد فاز "جریان آشفته"<sup>۱۰</sup> گردد. گاهی اوقات نیز ممکن است به واسطه عوامل مختلف خارجی، ناحیه گذراء کوچک شده و یا حتی ناپدید گردد که در اینصورت تبدیل مستقیم جریان آرام به آشفته در طول یک مسیر کوتاه را شاهد خواهیم بود. به عنوان مثال، در لایه مرزی تشکیل شده بر روی سطوح غیر هموار و یا بر روی سطوح دارای انتقال جرم از طریق سطوح و یا در جریانهای اختلاطی و یا در جریانات مافوق صوتی که اندرکنش شوک و لایه مرزی را داریم میتوان حالاتی را مشاهده نمود که در آنها تبدیل جریان آرام به آشفته در طی یک فاصله بسیار کوتاه را شاهد باشیم.

گذر از حالت جریان آرام به آشفته در طی فرآیندی رخ می‌دهد که در آن هسته‌ها و نطفه‌های محلی آشفتگی آنقدر بر روی هم جمع انباسته می‌شوند که تمام میدان جریان را پر می‌کنند. این فرآیند را میتوان همانند آلودگی تدریجی یک جریان عبوری از روی یک سطح آلوده در نظر گرفت که در فواصل و زمانهای کوتاه، بخش عمده‌ای از جریان پاکیزه و تنها بخش کوچکی از آن آلوده می‌باشد، اما چنانچه به این فرآیند فرصت و مکان کافی داده شود و هیچ عامل از بین برندۀ آلودگی نیز وجود نداشته باشد، آنقدر آلودگی‌ها در جریان انباسته می‌شوند که تمام جریان آلوده گردد. به این فرآیند تدریجی انباسته شدن توده‌های محلی آشفتگی بر روی هم، فرآیند گذر از حالت جریان آرام به آشفته<sup>۱۱</sup> گفته می‌شود. برای گذر از حالت جریان آرام به آشفته، مسافت و زمان مشخصی نیاز است تا تمام جریان از هسته‌های آشفتگی اشباع گردد.



شکل(۵): جریان آرام و تبدیل آن به جریانی آشفته در حین گذر از ناحیه گذراء

چنانچه میزان آشفتگی موجود در جریان آزاد  $U_{\infty}$  بالا بود و یا آنکه زبری سطح صفحه افزایش یابد، میتوان

<sup>۸</sup> Laminar

<sup>۹</sup> Transition

<sup>۱۰</sup> Turbulent

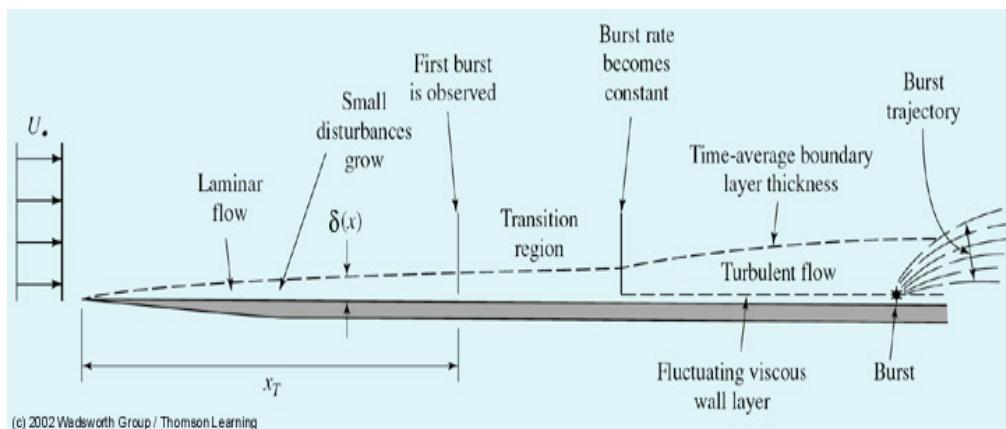
<sup>۱۱</sup> Transition From Laminar to Turbulent Flow

انتظار داشت که گذر از حالت آرام به آشفته در مسافتی کوتاهتر و به عبارت دیگر سریعتر رخ دهد و بالعکس.

میزان آشفتگی موجود در جریان آزاد را می توان به صورت نطفه های آشفتگی موجود در جریان آزاد در نظر گرفت که چنانچه این نطفه ها در فضای مساعد برای رشد و نمو قرار گیرند، می توانند باعث آشفته شدن جریان گردند. اینکه این نطفه ها چطور به وجود آمده اند و یا از کدام منبع سرچشمه گرفته اند، مهم نمیباشد. در برخی دیگر از مسائل مهندسی، اثراتی همچون اثر سانتریفیوز، اثر تغییرات چگالی، اثر جاذبه زمین، و اثرات کاویتاسیون، ترکیدن حباب، واکنشهای شیمیائی، اثرات اغتشاشی میدانهای الکترومغناطیسی و غیره نیز میتوانند باعث تسریع جریان در رسیدن به حالت آشفته گردد. معمولاً برای تشخیص آرام یا آشفته بودن جریانات مهندسی از اعداد بدون بعد استفاده می شود. در جریانات جابجایی اجباری تک فاز، معمولاً عدد رینولدز معیار تشخیص جریان آرام یا آشفته می باشد. این عدد به صورت زیر تعریف می گردد:

$$Re = \frac{\rho U_{\infty} L}{\mu} \quad (10-1)$$

که در رابطه (10-1)،  $\rho$  چگالی سیال،  $U_{\infty}$  سرعت جریان آزاد،  $L$  طول مقیاس هندسی (مثلاً طول صفحه و یا قطر لوله و یا ارتفاع مانع) و  $\mu$  ویسکوزیتۀ جریان است. به عنوان نمونه آزمایشات تجربی نشان داده اند که برای یک صفحه تخت با سطح صاف<sup>۱۲</sup>، عدد بدون بعد رینولدز نظری گذر از حالت جریان آرام به آشفته چیزی در حدود  $Re_{x_{Critical}} = 500000$  جریان را آرام فرض نموده و برای نواحی دارای  $Re_x > 500000$  جریان آشفته محسوب می گردد (البته با این فرض که از مسافت اشغال شده توسط ناحیه گذراه صرفنظر شده باشد). سایر مقادیر بحرانی جریانات مختلف مهندسی با استفاده از آزمایشات تجربی و یا روشهای فوق العاده پرهزینه عددي تعیین میگرددند.



شکل (۶): شماتیک تشکیل لایه مرزی آرام بر روی یک صفحه تخت، گذر از حالت آرام به آشفته و تشکیل لایه مرزی آشفته

<sup>۱۲</sup> Smooth

چنانچه عدد رینولدز را به صورت زیر به صورت نسبت نیروهای اینرسی به نیروهای لزجت بیان نمائیم:

$$Re = \frac{\rho U_\infty L}{\mu} = \frac{\rho U_\infty^2}{\mu U_\infty / L} = \frac{Inertial\ Force}{Viscous\ Force} \quad (11-1)$$

در اینصورت می‌توان به راحتی دلیل آشفته شدن جریان در اعداد رینولدز بالا را توجیه نمود. به عنوان نمونه نتایج تجربی نشان داده که برای یک صفحه تخت با سطوح صاف، عدد رینولدز بحرانی متناسب با  $Re = 10^5$  میباشد، این عدد رینولدز (که بر مبنای طول صفحه تعریف می‌گردد) بدان معناست که در فاصله‌ای معین از ابتدای صفحه، نیروهای اینرسیال  $10^5$  برابر بزرگتر از نیروهای لزجت میباشند، یا آنکه نیروهای لزجت  $10^5$  برابر کوچکتر از نیروهای اینرسیال میباشند، این امر باعث میشود که اغتشاشات<sup>۱۳</sup> احتمالی موجود در جریان آزاد (با یک اینرسی معین)، در نقاط مزبور، به واسطه ناچیز بودن نیروهای لزجت، از بین نرفته و حتی در محیط مناسب خود رشد نمایند تا آنکه در نهایت تمام حجم سیال را اشغال نمایند. اما وقتی عدد رینولدز خیلی کوچک باشد، مثلاً  $Re = O(1)$  (چنین عدد رینولدزی در ابتدای صفحه و یا در نواحی بسیار نزدیک به دیواره و یا در جریانات با سرعت آزاد پائین قابل تصور است)، در این حالت نیروهای لزجت قدرت لازم برای از بین بردن اغتشاشات موجود در جریان آزاد را داشته و لذا در جریانات با عدد رینولدز پائین، جریان تا جای ممکن آرام و پایدار و عاری از هسته‌ها و نطفه‌های پایدار آشفتگی باقی میماند، و حتی در صورت وجود اغتشاشات در داخل جریان، این اغتشاشات توسط ویسکوزیته جریان سریعاً میرا میگردد.



شکل(۷): تبدیل جریان لایه‌ای به جریان آشفته و افزایش اغتشاش جریان در پائین دست آن

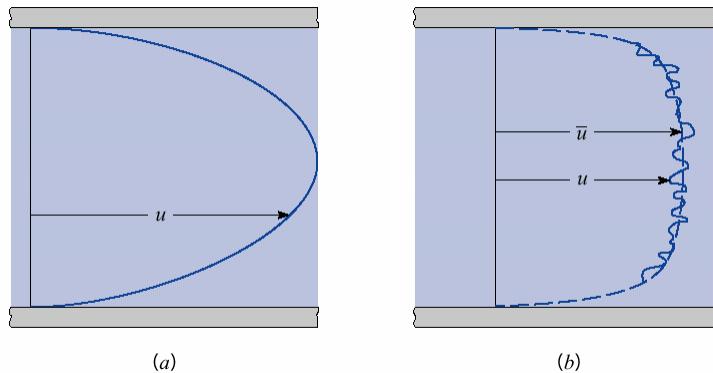
<sup>۱۳</sup> Disturbances

## شرط آشفتگی جریان جابجایی اجباری<sup>۱۴</sup>:

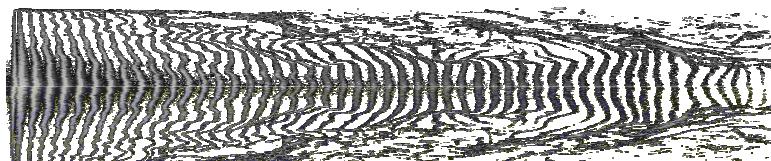
$$\begin{cases} \text{در طول یک سطح} & \text{برای جریانات خارجی} \\ \text{حول یک مانع} & (\text{نظیر جریان حول اجسام یا جریان روی صفحات}) \end{cases}$$

$$\text{برای جریانات داخلی} \\ \text{جریان درون کانالها، لوله ها و معابر عبور جریان) } \\ \text{Re}_{D,h} > 2300$$

که در آن  $Re_L = \frac{\rho UL}{\mu}$   $D_h = x, D, L, etc.$  قطر هیدرولیکی می باشد).



شکل (۸-۸) جریان آرام درون لوله و شکل (۸-۸) جریان آشفته درون لوله است. پروفیل سرعت در جریان آشفته تخت تر می شود.



شکل (۲-۸): تغییرات پروفیل سرعت در داخل یک لوله و آشفته شدن تدریجی جریان درون آن

مشخصه مساله کاملاً مختار می باشیم. لیکن این طول بایستی متناسب با کاربرد مورد نظر تعریف گردد. به عنوان مثال در مورد یک لوله، هم می توان از قطر لوله و هم از طول آن به عنوان طول مشخصه فرمول عدد رینولدز استفاده نمود، لیکن از آنجا که معمولاً در کاربردهای مهندسی طول لوله، طول محدودی نمی باشد، لذا در تعریف عدد رینولدز از قطر آن به عنوان کمیتی مشخص و در عین حال محدود استفاده می شود. به همین ترتیب هنگامی که با جریان لایه مرزی بر روی یک صفحه تخت سروکار داریم، چنانچه هدف بررسی کل لایه مرزی به عنوان یک رفتار کلی از جریان باشد، از طول مشخصه در راستای صفحه استفاده می شود. لیکن چنانچه هدف بررسی لایه های مختلف سوار بر یکدیگر جریان مجاور دیواره باشد، از طول عمود بر راستای صفحه استفاده می شود. به یاد داشته باشید که برای هر هدف مهندسی از مقیاس و وسیله و ابزار

<sup>۱۴</sup> Forced Convection

مربوط به آن استفاده نمایید؛ کیلومتر و نانومتر هر دو واحد طول می باشند، لیکن یکی برای مسافت‌های طولانی و دیگری برای فواصل بسیار ریز و کوتاه استفاده می شود. منطقی نیست که برای فواصل بین مولکولی از کیلومتر استفاده شود. به همین ترتیب اگرچه میکروسکوپ و دوربین شکاری هر دو می توانند تصویر اجسام کوچک را بزرگ کنند، لیکن برای مشاهده ذرات میکروسکوپی هیچگاه از دوربین شکاری و یا برای مشاهده مناظر دوردست هیچگاه از میکروسکوپ استفاده نمی شود. هر وسیله و ابزاری و یا به بیان دیگر هر کمیت انتخابی، بایستی با هدف مورد نظر خود تناسب داشته باشد.

### شرط آشفتگی جریان جابجایی آزاد<sup>۱۵</sup>:

در جریانات جابجایی آزاد، عدد بدون بعد رایلی<sup>۱۶</sup> نقش اصلی را در تعیین آرام یا آشفته بودن جریان بر عهده دارد. عدد رایلی را می توان به صورت

$$Ra = \frac{\rho g \beta \Delta T L^3}{\mu \alpha} \quad \text{تعريف نمود؛ که در آن، } \rho \text{ چگالی جریان، } g \text{ شتاب ثقل زمین، } \beta \text{ ضریب انبساط حرارتی، } \Delta T \text{ اختلاف دمای بین دمای صفحه و دمای جریان آزاد، } L \text{ طول مشخصه صفحه، } \mu \text{ ویسکوزیتۀ جریان و } \alpha \text{ بیانگر ضریب دیفیوز حرارتی می باشد. چنانچه برای یک}$$

صفحة تخت  $10^8 - 10^{10} < Ra$  باشد، جریان جابجایی آزاد مورد نظر را می توان آشفته در نظر گرفت.

اما مشکل اصلی در تعاریف فوق آنچاست که در عدد رینولدز و یا حتی در تعريف عدد رایلی، دو کمیت بسیار تعیین کننده، یعنی "صافی سطح"<sup>۱۷</sup> و دیگری "آشفتگی موجود در جریان آزاد"<sup>۱۸</sup> هیچ نقشی را بر عهده ندارند. برای توضیح بیشتر، یک سطح کاملاً زبر با سطوحی ناصاف را در نظر بگیرید. در این سطح به واسطه تداخل برجستگی ها و فرورفتگیهای سطح زبر با لایه های جریان در نزدیک دیواره، بر هم ریختگی جریان و در نهایت گذر سریع جریان از حالات آرام به آشفته را در یک مسافت کوتاه مشاهده خواهد شد، به عبارت دیگر برای یک سطح تخت و زبر،  $Re_{Critical} << 500000$  خواهد بود. آشفتگی جریان آزاد نیز همین نقش را در تسريع و یا تاخیر انداختن گذر از جریان آرام به جریان آشفته را بر عهده دارد. در بسیاری از کاربردهای مهندسی، اتفاقها و یا حوضچه سکون جریان را می توان یافت که هدف آنها تنها از سرعت انداختن جریان و کاهش ادیها و آشفتگیهای موجود در جریان آزاد (به کمک اثرات میرائی لزجت) و بالطبع آن

<sup>۱۵</sup> Free ( Natural ) Convection

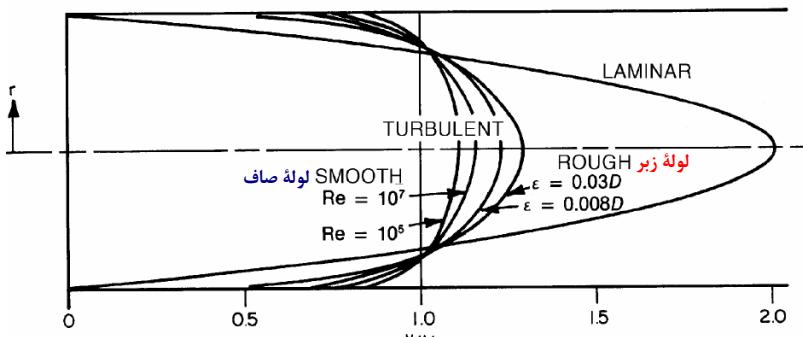
<sup>۱۶</sup> Rayleigh Number

<sup>۱۷</sup> Smoothness

<sup>۱۸</sup> Free Stream Disturbance

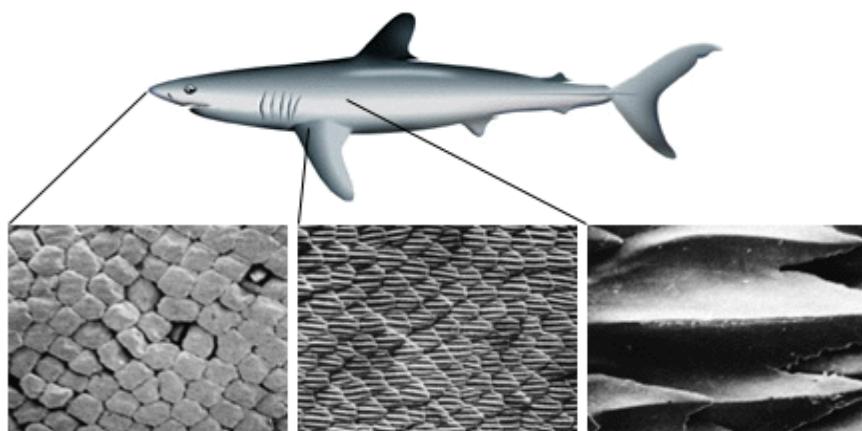
رسیدن به جریانات آرام مورد نیاز با کمترین میزان آشفتگی (و بالتبع آن بیشترین یکنواختی پروفیلها و کمترین افت فشار) می باشد. از لحاظ تئوری، چنانچه یک جریان که هیچ گونه آشفتگی در ساختار خود ندارد بر روی یک صفحه بدون هیچ گونه زبری اعمال گردد، چنانچه عدد رینولدز این جریان به بی نهایت هم برسد، باز جریان کماکان آرام و غیر آشفته باقی خواهد ماند. "زبری" و "آشفتگی جریان آزاد" بسترها پرورش آشفتگی در جریان محسوب می گردند.

پس به عنوان یک نتیجه کلی از این بحث، مقادیر ارائه شده  $Ra_{Critical}$  و  $Re_{Critical}$  که در نمودارها و جداول مهندسی ارائه شده اند، تنها مقادیر تقریبی بوده و برای شرایط خاص و مشخصی از صافی سطوح و آشفتگی جریان آزاد ارائه شده اند، لذا با تغییر اندازه زبری و یا میزان آشفتگی جریان آزاد، این مقادیر بحرانی نیز تغییر خواهند نمود.



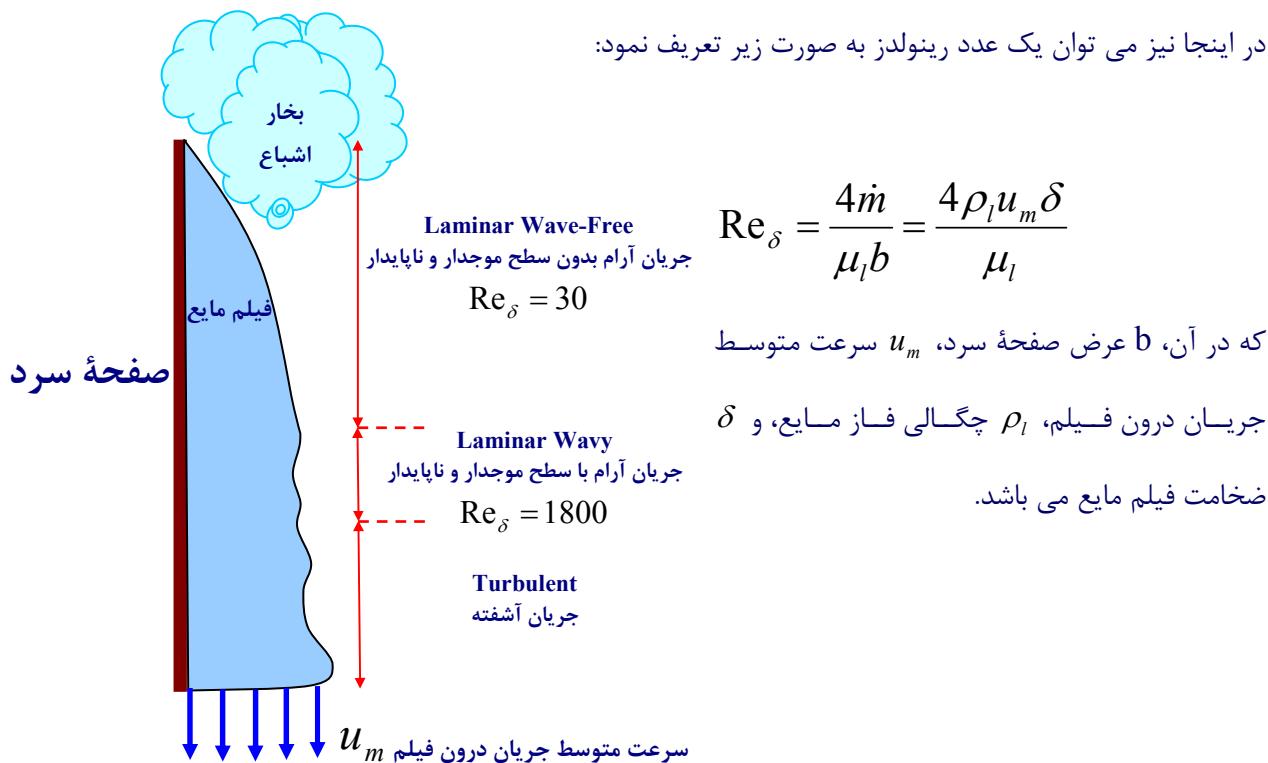
شکل(۹): پروفیل سرعت درون لوله برای جریان آرام، جریان آشفته در یک لوله صاف و جریان آشفته در یک لوله زبر

البته بایستی خاطر نشان نمود که همیشه زبری سطح باعث تسريع در رسیدن به حالت گذره و آشفته شدن جریان نمی شود. یکی از این موارد استثنائی، پوست بدن کوسه ها می باشد که به واسطه ساختار میکروسکوپی خود باعث به تاخیر افتادن در رسیدن جریان به حالت آشفته می گردد و به همین دلیل حرکت کوسه درون آب تسهیل می گردد:



شکل(۱۰): ساختار میکروسکوپی پوست کوسه و نقش آن در به تاخیر اندختن رسیدن به حالت آشفته

در مسائلی که با تغییر فاز مواجه می باشیم، نیز می توان با استفاده از اعداد بدون بعد، معیارهای جدیدی برای تغییر جریان از حالت آرام به آشفته تعریف نمود. به عنوان مثال در یک جریان چگالش فیلمی<sup>۱۹</sup>، که مثلاً در اثر تماس بخار آب اشباع با یک صفحه سرد ایجاد شده است، می توان سه ناحیه آرام، گذراه و آشفته تعریف نمود. در اینجا آشفته شدن جریان به معنای موجود شدن<sup>۲۰</sup> فصل مشترک فیلم مایع و بخار می باشد.



شکل(۱۱): تشکیل فیلم مایع از بخار اشباع اطراف به واسطه میعان و تبدیل تدریجی آن به جریان آشفته

<sup>۱۹</sup> Film Condensation  
<sup>۲۰</sup> Ripples and Wavy Form

## معیار صاف بودن یا زبر بودن یک سطح چیست؟

یکی از نکاتی که همواره بایستی مد نظر قرار گیرد آن است که اغلب روابط تئوریکی که در کتب مرجع ارائه شده اند، با فرض در اختیار داشتن سطوح کاملاً صاف و صیغلی در مسائل مهندسی می باشد. اما همانطور که می دانیم، تقریباً در تمام مسائل مهندسی، به واسطه اثرات رسوب گذاری و نیز خوردگیهای فیزیکی و شیمیائی جریان، همواره با سطوحی ناصاف و گاهاً زبر سروکار خواهیم داشت. لذا بایستی برای دقیقتر نمودن محاسبات انجام شده و نزدیک شدن بیشتر به شرایط واقعی، زبری سطوح را در داخل محاسبات مهندسی خود داخل نمائیم. میزان اثر زبری سطوح بر روی جریانات سیال، وابسته به اندازه نسبی عناصر زبری در مقایسه با طول مقیاس لزج جریان دارد. اثر زبری می تواند از اثرات بی اهمیت برای زبری های ناچیز (Fine)، تا اثرات قابل توجه و کاملاً موثر برای زبری های با طول مقیاس بزرگ متفاوت باشد. اثر زبری سطح، افزایش مقاومت در مقابل جریان است. این امر منجر به افزایش نرخ ممنتوم، گرما و جرم از طریق دیواره می شود.

تحقیقات سیستماتیک اولیه در مورد اثر زبری سطح، ابتدا توسط نیکورادزه<sup>۲۱</sup> مطرح شد. وی تحقیقات گسترده ای را بر روی جریان درون لوله های زبر انجام داد. وی برای این منظور درون لوله ها را با ماسه هایی با دانه بندی یکنواخت پوشانده بود. زبری نسبی دانه های ماسه می تواند در طیف وسیعی از اندازه ها و با توجه به انتخاب اقطار مختلف برای لوله و نیز اندازه های مختلف دانه های ماسه قرار گیرد. چنانچه اندازه دانه

$$\text{ماسه}^{۲۲} \text{ را با } y_s^+ \text{ نمایش دهیم، و عدد رینولدز زبری را به صورت } y_s^+ = \frac{\rho u^* y_s}{\mu} \text{ تعریف نمائیم، که در آن،}$$
$$u^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \text{ و } \tau_w \text{ تنش برشی روی دیواره است، در اینصورت:}$$

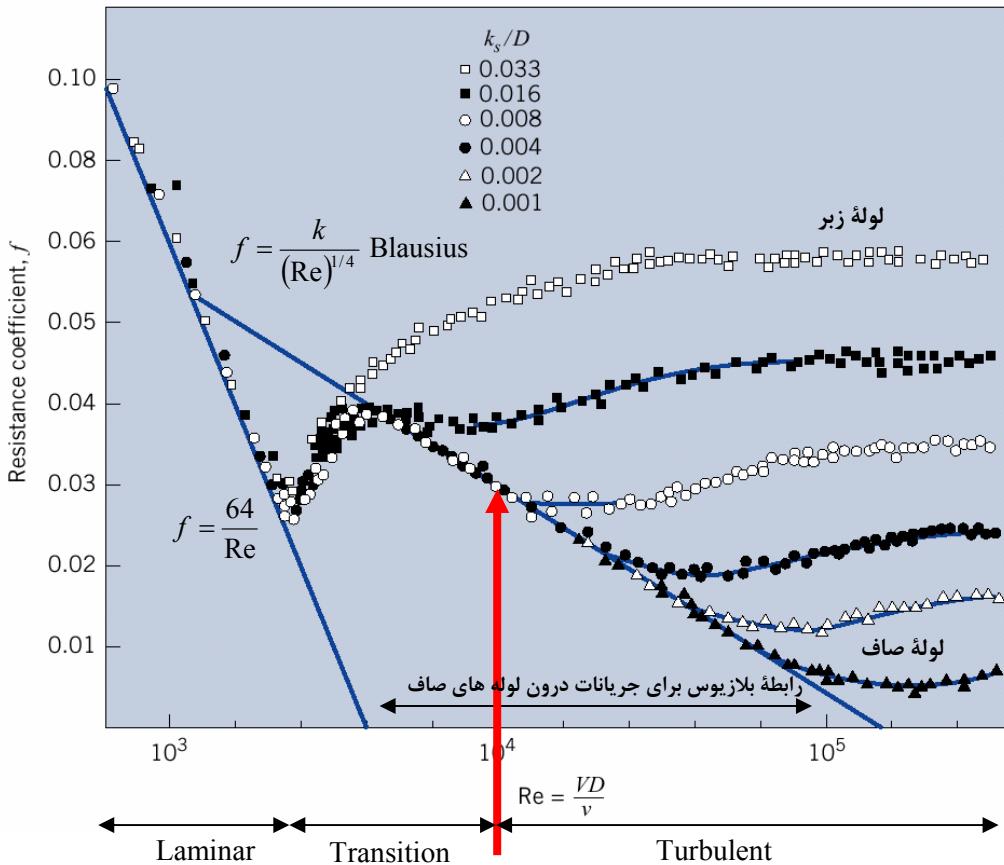
$0 < y_s^+ < 5$  سطح صاف است.

$5 < y_s^+ < 70$  سطح نیمه صاف است.

$y_s^+ > 70$  سطح زبر است.

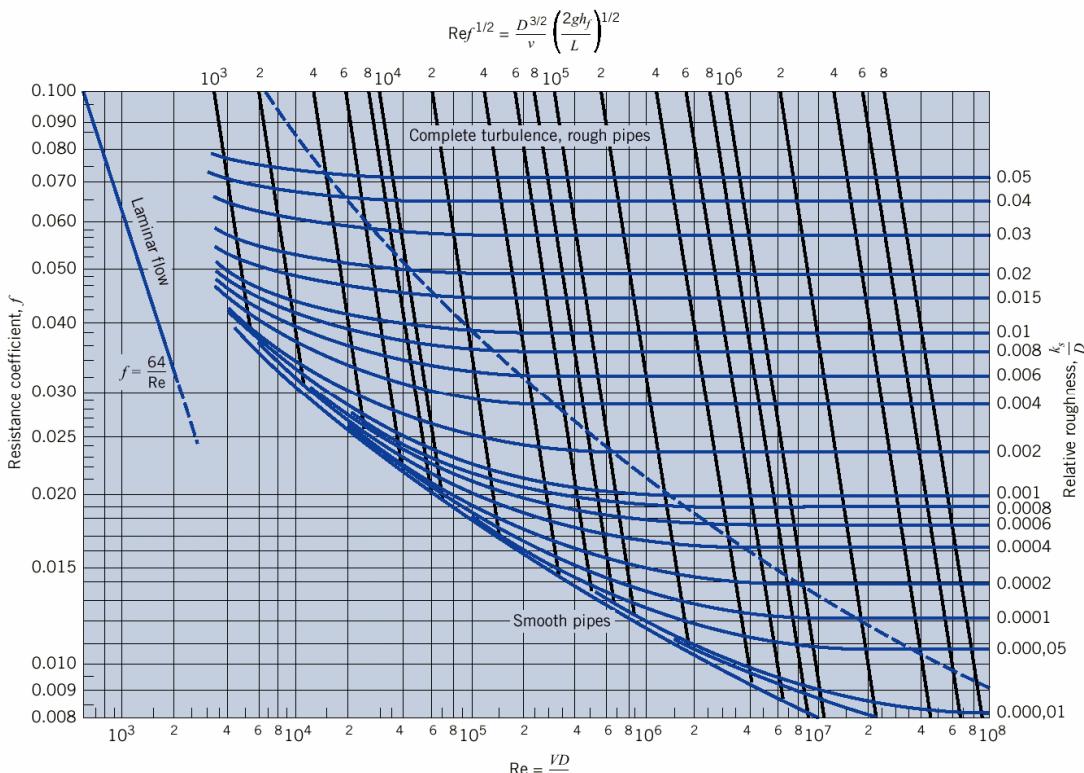
<sup>۲۱</sup> J.Nikoradse (۱۹۳۰)  
<sup>۲۲</sup> Sand Grain Size

همانطور که گفته شد اساس آزمایشات نیکورادزه بر جریان داخل لوله قرار داشت:



شکل (۱۲): منحنی تغییرات ضریب مقاومت بر حسب عدد رینولدز در یک لوله با زبری متفاوت ارائه شده توسط نیکورادزه

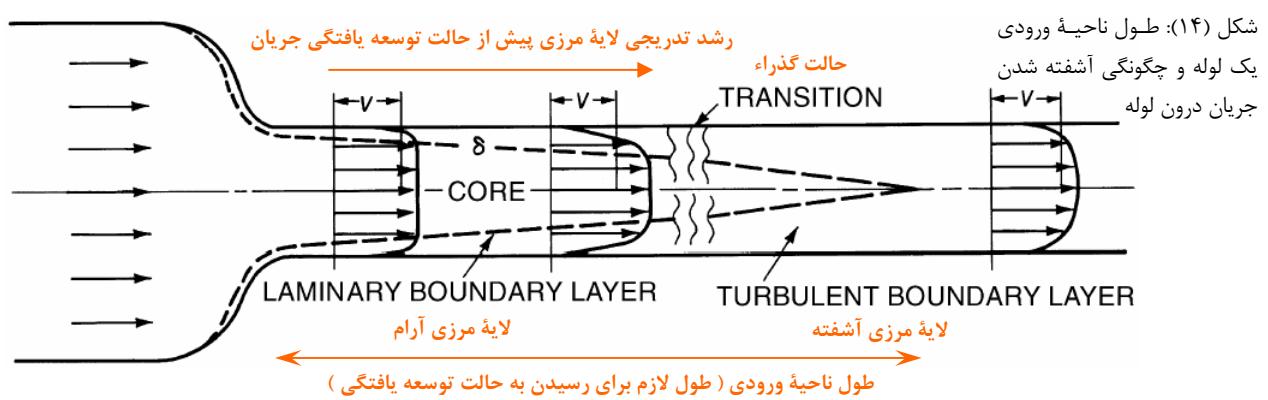
این منحنی بعداً توسط مودی<sup>۲۳</sup> تکمیل شد:



شکل (۱۳): دیاگرام مودی برای تعیین ضریب مقاومت بر حسب عدد رینولدز لوله های با زبری های متفاوت

<sup>۲۳</sup> Moody

در فصل مربوط به توابع دیواره، به تفضیل به بررسی این مفاهیم خواهیم پرداخت. بایستی خاطر نشان نمود که معمولاً رسیدن جریان آرام درون لوله به یک جریان آشفته از مکانیزمی شبیه به جریان روی صفحه تخت تبعیت می نماید. بدین صورت که دقیقاً همانند جریان بر روی یک صفحه تخت، رشد تدریجی لایه مرزی و رسیدن آن به حالت گذراء و در نهایت به حالت آشفته مشاهده می گردد:



در اینجا نیز افزایش زبری درون لوله می تواند باعث تسريع در رسیدن به حالت آشفته جریان و بالتبع آن افزایش افت فشار، افزایش مقاومت در مقابل جریان و کاهش زبری درون لوله باعث به تأخیر افتادن رسیدن به حالت آشفته جریان و بالتبع آن کاهش افت فشار درون لوله گردد. از طرف دیگر همانطور که بارها در مراجع علمی ذکر شده است، عدد رینولدز بحرانی برای جریان داخل لوله برابر  $Re_{Cr.} = \frac{\rho V D}{\mu} = 2300$  می باشد.

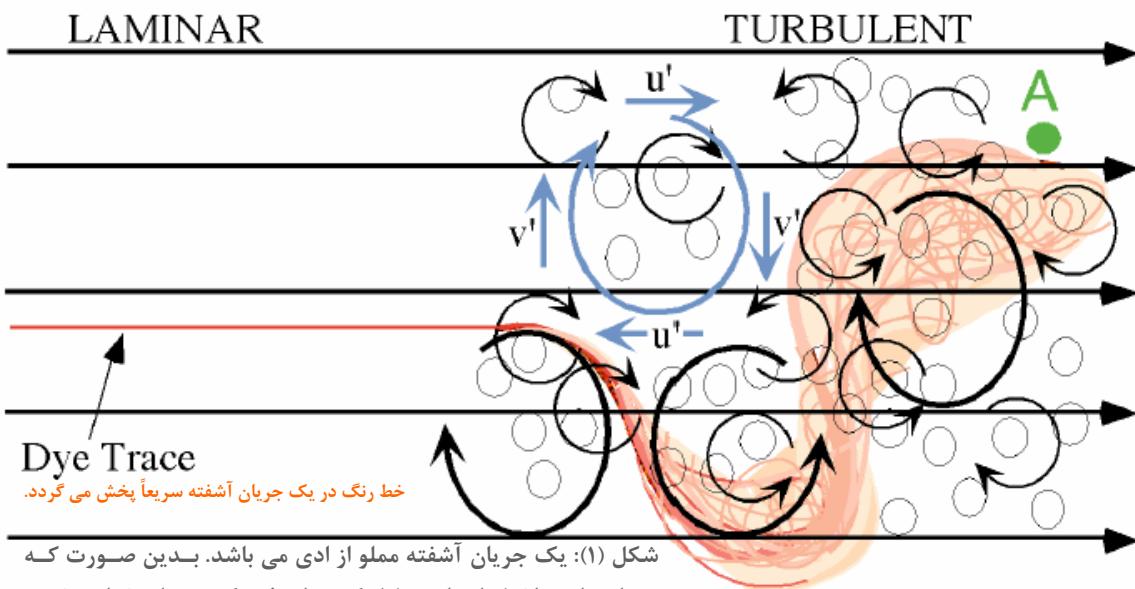
اگرچه مقادیر به دست آمده از آزمایشات تجربی معمولاً با این مقدار اندازی تفاوت دارند، لیکن این مقدار عدد رینولدز بحرانی نشان دهنده نسبت پائینتر نیروهای اینرسی به لزجت جریان درون لوله ها در مقایسه با جریانات غیرمحصور روی سطوح است. از سوی دیگر، تا وقتیکه مقدار عدد رینولدز کوچکتر از ۲۳۰۰ باقی بماند، با افزایش اندازه سرعت جریان (حتی به صورت تئوریک تابی نهایت)، باز هم جریان آرام خواهد بود. این امر به واسطه کوچک بودن قطر لوله و بالتبع آن نزدیک بودن دیواره های لوله به یکدیگر و بالا بودن قدرت میرا نمودن اغتشاشات موجود در جریان درون لوله است. بعداً و در مطالب مربوط به پایداری با جزئیات این مبحث بیشتر آشنا خواهیم شد.

## **فصل دوم:**

### **ویژگیهای کلی جریانهای آشفته**

### **در مقایسه با جریانهای آرام**

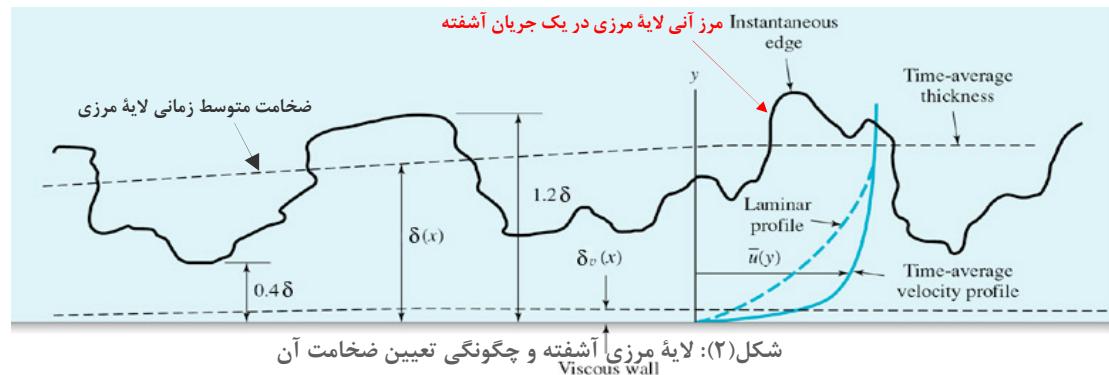
همانطور که اشاره شد، جریانات آشفته به واسطه حضور ادیها<sup>۲۴</sup> در ساختار خود، دارای نوسانات وابسته به مکان و زمان در میدان جریان می باشند. مکانیزم تشکیل ادیها بعداً به تفصیل توضیح داده می شود:



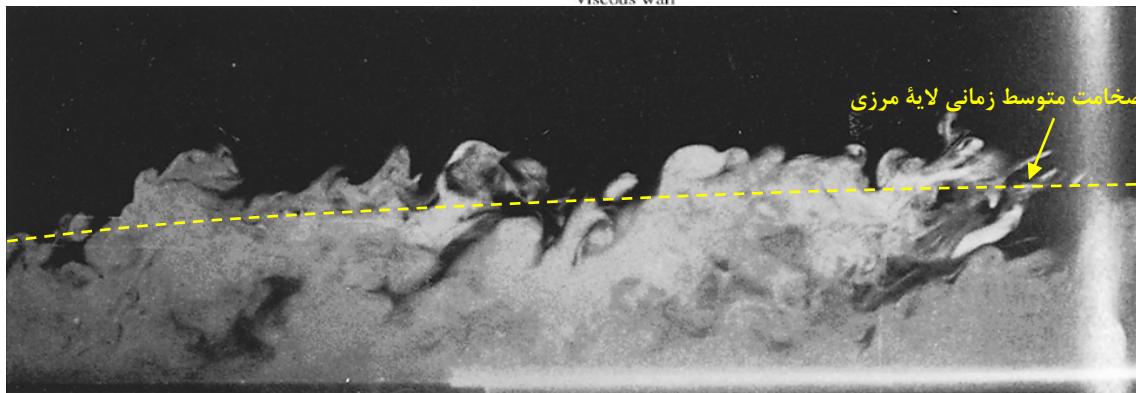
شکل (۱): یک جریان آشفته مملو از ادی می باشد. بدین صورت که همواره باعث اختلاط و اضمحلال کمیتهای فیزیکی جریان خواهد شد.

شماییکی از لایه مرزی در جریانات آشفته و تغییرات آن نسبت به مکان در شکل (۲) نشان داده شده است.

شکل (۳)، عکسی است که در یک لحظه از یک حریان آشفته گرفته شده است.



شكل (٢): لایه مزی آشفته و چگونگی تعیین ضخامت آن

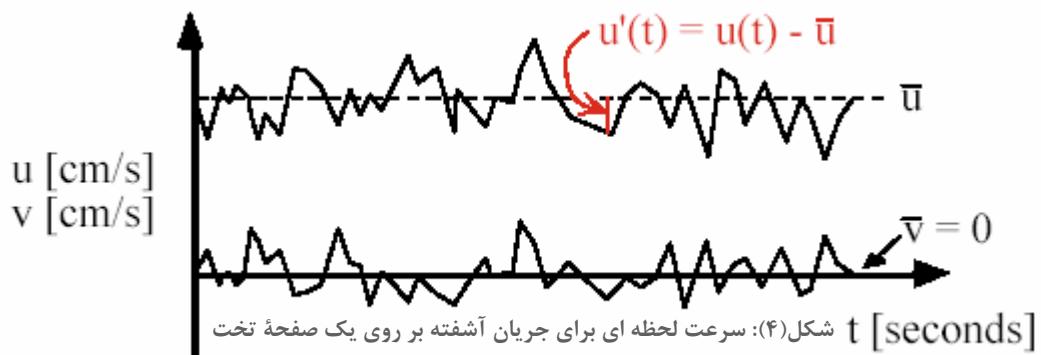


شکل (۳): تصویری از یک جریان آشفته و ادی های موجود در آن

۲۴ Eddies

نمونه ای از توزیع مولفه های میدان سرعت در یک نقطه از یک جریان آشفته بر روی یک صفحه تخت در

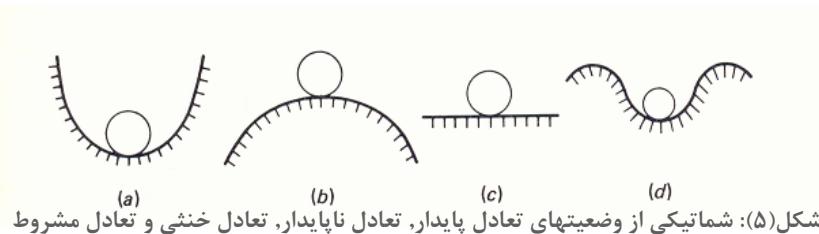
شکل (۴) نشان داده شده است:



در شکل فوق،  $\bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt$  و بیانگر متوسط زمانی مولفه سرعت در راستای X می باشد.

## پایداری جریانات آرام:

بسیاری از جریانات آرامی که با آنها سروکار داریم جریاناتی هستند که ذاتاً ناپایدار هستند؛ بدین معنا که در مقابل حضور و یا تشکیل اغتشاشات احتمالی در جریان، نمی توانند مقاومتی از خود نشان داده و اغتشاشات مزبور در این محیط رشد می نمایند. این اغتشاشات می تواند از معاشر بالادستی جریان به درون جریان وارد شده و یا به واسطه بر هم کنش جریان با زبری دیواره، اغتشاشات ناشی از ارتعاش بدن و حتی سر و صدای محیط، و حتی اغتشاشات ناشی از انجام واکنشهای شیمیائی و غیره باشد. این اغتشاشات همواره خود را به صورت تغییرات موضعی در اندازه و راستای سرعت، اندازه فشار، دما و چگالی جریان بروز می دهند. به طور کلی یک سیستم هنگامی پایدار محسوب می گردد که در مقابل یک عامل اغتشاشی وارد شده، وضعیت تعادلی خود را حفظ نماید و هنگامی ناپایدار محسوب می گردد که در مقابل عامل اغتشاشی وارد شده، از وضعیت تعادلی خود خارج شده و به وضعیت دیگری منتقل گردد:



شکل(۵): شماتیکی از وضعیتهای تعادل پایدار، تعادل ناپایدار، تعادل خنثی و تعادل مشروط

در شکل (a) فوق، توپ در وضعیت تعادلی قرار دارد، به این معنا که چنانچه توپ در اثر یک اغتشاش از وضعیت تعادلی خود خارج گردد، مجدداً پس از چند نوسان حول حالت تعادل اولیه، به حالت تعادل اولیه باز می گردد، به این وضعیت اصطلاحاً حالت متعادل اطلاق می گردد. به طور مشابه و در یک جریان سیال، در نواحی بسیار نزدیک به دیواره که به واسطه پائین بودن عدد رینولدز موضعی، جریان کاملاً آرام می باشد، چنانچه به هر طریق اغتشاشی در این لایه ایجاد گردد، اغتشاش مزبور به واسطه بالا بودن نیروهای لزجت سریعاً میرا شده و جریان کماکان حالت آرام خود را حفظ می نماید. مجدداً یادآوری می شود که پائین بودن عدد رینولدز به معنای قویتر بودن نیروهای میراکننده لزجت در مقابل نیروهای ضعیفتر اینترسی می باشد و بالعکس. در شکل (b)، توپ پس از اعمال یک اغتشاش، از وضعیت تعادل اولیه خود خارج شده و دیگر نمیتواند به خودی خود به این وضعیت تعادل اولیه باز گردد. به این وضعیت اصطلاحاً وضعیت نامتعادل اطلاق می گردد. به طور مشابه در یک جریان پر سرعت از سیال، در نواحی به اندازه کافی دور از دیواره که به واسطه بالا بودن عدد رینولدز، با جریان آشفته سروکار داریم، چنانچه به هر طریق اغتشاشی در این لایه ایجاد گردد،

اغتشاش مزبور به واسطه ضعیف بودن نیروهای لزجت، میرا نشده و بر آشفتگی جریان افزوده می گردد.

در شکل (c) نیز توپ پس از اعمال یک اغتشاش، به وضعیت تعادلی جدیدی منتقل می گردد، به این حالت، اصطلاحاً حالت تعادل خنثی یا بی تفاوت اطلاق می گردد. در شکل (d) توپ در مقابل اغتشاشات کوچک، پایدار بوده ولی در مقابل اغتشاشات بزرگ ناپایدار می باشد.

## تحلیل پایداری جریانات آرام:

برای آنکه نشان دهیم آیا یک جریان آرام در مقابل اغتشاشات محیطی پایدار می باشد و یا نه، لازم است که از تحلیل پایداری استفاده نمائیم. مراحل کلی برای تحلیل پایداری یک جریان عبارتند از:

۱- یک جواب فیزیکی برای حالت جریان متوسط مساله مورد نظر فرض نموده و آنرا با  $U$  نمایش دهید. ( به عبارت بهتر میدان جریان را برای جریان متوسط به دست آورید ).

۲- یک متغیر اغتشاشی<sup>۲۵</sup> مانند  $U'$  به این جواب فرضی اضافه نموده و مجموع  $U + U'$  را در داخل معادلات حاکم بر جریان سیستم جایگذاری نماید.

۳- از معادلات حاصله، معادله حاکم بر جریان با جواب حالت متوسط  $U$  را کسر نماید. آنچه باقی میماند را اصطلاحاً "معادله اغتشاشی"<sup>۲۶</sup> می نامند. معادله به دست آمده، معادله انتقال اغتشاش در داخل جریان مزبور نیز نامیده می شود.

۴- با فرض کوچک بودن اغتشاشات مورد نظر، معادله اغتشاشی حاصله را خطی نماید؛ بدین معنا که از ترمehای دارای ضربی از  $U'$  صرف نظر نماید.

۵- چنانچه معادله اغتشاشی حاصله کماکان پیچیده باقی مانده است، می توان با فرض اغتشاشات ساده ( نظیر امواج متحرک اعم از امواج سینوسی و غیره )، معادله اغتشاشی حاصله را باز هم ساده نمود.

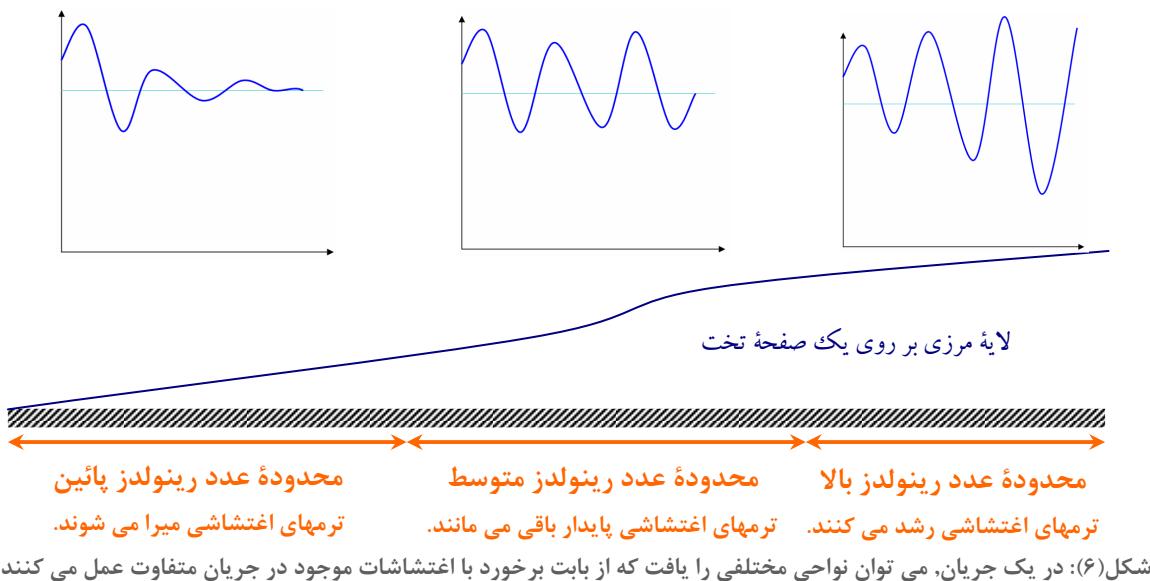
۶- معادله اغتشاشی ساده شده را برای تعیین رفتار  $U'$  حل نموده تا به مقادیر ویژه آن دست یابیم و در ادامه با استفاده از جواب به دست آمده تعیین نماید که آیا اندازه  $U'$  نسبت به زمان یا مکان رشد می نماید ( جریان ناپایدار و مستعد برای آشفته شدن )، یا آنکه اندازه  $U'$  نسبت به زمان یا مکان ثابت باقی می ماند ( جریان دارای پایداری خنثی ) و یا آنکه اندازه  $U'$  نسبت به زمان ( یا مکان ) کاهش می یابد ( جریان پایدار و مستعد برای میرا نمودن اغتشاشات محیطی و حفظ حالت آرام و یا میرا نمودن آشفتگی های موجود در جریان ) .

۷- با استفاده از تحلیل مشابه می توان چرائی و چگونگی آشفته شدن جریان در نواحی دور از دیواره و آرام ماندن جریان در نزدیکی دیواره را توضیح داد. در نواحی با عدد رینولدز موضعی پائین، جریان پایدار بوده و ترمehای اغتشاشی میرا می شوند. در نواحی با عدد رینولدز بالا جریان ناپایدار بوده و

<sup>۲۵</sup> Disturbance Variable

<sup>۲۶</sup> Disturbance Equation

ترمهای اغتشاشی رشد می نمایند. در نواحی با عدد رینولذ متوسط، جریان دارای پایداری خنثی بوده و اغتشاشات موجود در جریان می توانند پایدار باقی بمانند. به عبارت دیگر در هر ناحیه از یک جریان، پتانسیل برای رشد، حفظ و یا میرا شدن دامنه اغتشاشات متفاوت می باشد. این پتانسیل به شدت وابسته به اعداد بدون بعدی نظیر عدد رینولذ یا عدد رایلی و عدد وبر<sup>۲۷</sup> و یا حتی شرایط سطحی می باشد. لازم به ذکر است که رشد اغتشاشات هم می تواند تابعی از زمان و هم تابعی از مکان باشد.



تحلیل پایداری جریانات آرام اغلب بسیار پیچیده بوده و اغلب نیازمند استفاده از روش‌های عددی می باشد. تحلیل پایداری تنها شروع و یا عدم شروع ناپایداری جریان و در نهایت آشفته شدن یا نشدن آنرا نشان میدهد و نمیتوان با استفاده از آن شکل جریان آزادی را تعیین نمود. همانطور که پیش از این هم ذکر شد، رشد اغتشاشات موجود در جریان آزاد است که در نهایت باعث آشفتگی کل جریان می گردد، البته بعداً نشان خواهیم داد اغتشاشات آزادی که می توانند در یک جریان رشد نمایند، باقی دارای یک مولفه فوریه<sup>۲۸</sup> باشد که طول موج آن در یک محدوده خاص یا یک مقدار خاص باشد.

در روش‌های عددی (CFD) می توان نشان داد که خطاهای موجود در گسسته سازی دامنه محاسباتی و ساخت شبکه<sup>۲۹</sup> (اعم از خطای برشی یا خطای گرد نمودن و سایر خطاهای) همان نقش اغتشاشات شناور در

<sup>۲۷</sup> Webber Number

<sup>۲۸</sup> Fourier Component

<sup>۲۹</sup> Grid Generation

جريان آزاد را بر عهده دارند و لذا با تکيه بر وجود اين اغتشاشات در فضای عددی ميتوان آشفته شدن جريانات آرام را در روشهای عددی مشاهده نمود.

## تحلیل پایداری برخی از جریانات کلاسیک:

چنانچه هفت مرحله ذکر شده قبلی را برای یک جریان آرام تراکم ناپذیر با مقادیر ثابت  $(\rho, \mu, k, C_p)$  و بدون در نظر گرفتن اثرات بویانسی (جابجایی آزاد) انجام دهیم به معادله ای به نام معادله اور- سامرفلید<sup>۳۰</sup> خواهیم رسید. این معادله بیانگر رشد ناپایداری در یک جریان لزج می باشد. این معادله از اعمال یک اغتشاش فرضی سه بعدی بر روی جواب جریان آرام مساله به دست می آید. در اینجا تنها به ارائه معادله پرداخته شده و از بیان جزئیات مربوط به آن صرفنظر می گردد:

$$(U - c)(v'' - \alpha^2 v) - U''v + \frac{i\nu}{\alpha}(v''' - 2\alpha^2 v'' + \alpha^4 v) = 0 \quad (1-2)$$

که در آن،  $U$  مولفه  $X$  میدان سرعت جریان آرام،  $v$  مولفه اغتشاش اعمال شده در راستای  $y$ ،  $\alpha$  عدد موج،  $c$  سرعت انتشار اغتشاش،  $\nu$  ویسکوزیتی سینماتیک،  $i$  عدد موهمی و تمام پریمها بیانگر مشتق نسبت به راستای  $y$  می باشند. حل این معادله، رشد زمانی و مکانی اغتشاشات اعمال شده بر جریان را تعیین خواهد نمود.

## تئوری پایداری غیر لزج:

یک حالت خاص از جریانات (که در عین حال حالتی آموزنده از جریانات سیال می باشد)، جریانی با عدد رینولدز بی نهایت یا با ویسکوزیتی ناچیز می باشد که در آن می توان از ترم ویسکوز معادله اور- سامرفلید صرفنظر نمود. در نتیجه به معادله حاکم بر اغتشاشات غیر لزج خواهیم رسید:

$$v'' - \left( \frac{U''}{U - c} + \alpha^2 \right) v = 0 \quad (2-2)$$

به معادله (2-2) اصطلاحاً معادله رایلی گفته می شود. معادله رایلی را می توان به راحتی و با استفاده از روش‌های تحلیلی یا عددی حل نمود. چند تئوری مهم راجع به تئوری پایداری غیر لزج وجود دارد که در ذیل بدانها اشاره خواهد شد:

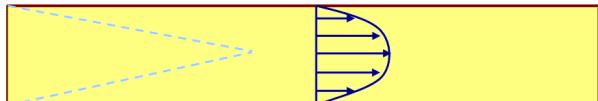
**تئوری (۱):** برای ناپایداری لازم است که پروفیل سرعت دارای نقطه عطف<sup>۳۱</sup> باشد.

**تئوری (۲):** حتی با وجود نقطه عطف در داخل پروفیل سرعت، باز هم لازم است که در تمام نقاط پروفیل سرعت،  $U''(U - U_{PI}) < 0$  باشد که در این رابطه  $U_{PI}$  سرعت در نقطه عطف می باشد.

<sup>۳۰</sup> Orr-Sommerfeld  
<sup>۳۱</sup> Inflection Point

با استفاده از تئوری (۱) رایلی می‌توان اینطور اینطور اظهار نمود که اغلب پروفیلهای سرعت واقعی (پروفیلهای مربوط به جریان لزج) که بدون نقطه عطف در داخل پروفیل سرعت خود می‌باشند، پایدار باقی می‌مانند. از این دسته پروفیلهای می‌توان به پروفیل سرعت توسعه یافته در جریانات محصور (کانال یا لوله) و

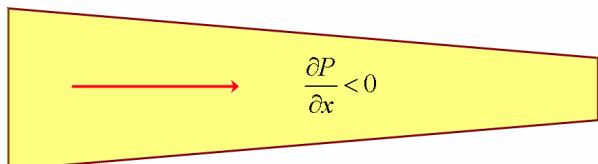
نیز پروفیل سرعت در لایه مرزی جریانات دارای گرادیان فشار مطلوب  $\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) < 0$  اشاره نمود.



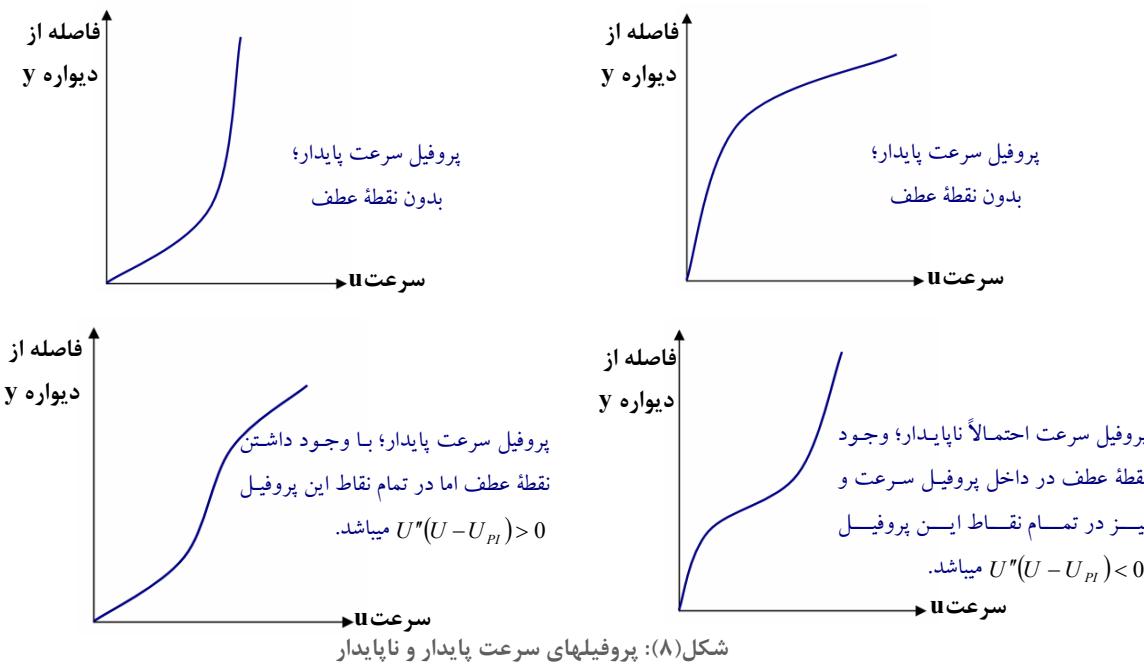
البته در این میان استثنایی وجود دارد که بعداً در تئوری پایداری Orr-Summerfeld بدان

شکل (۷): گرادیان فشار مطلوب در یک جریان لزج و جریان غیر لزج

اشارة خواهد شد.



پرانتل نشان داد که بر خلاف تصور همگان، ویسکوزیته می‌تواند به جای میرا نمودن اغتشاشات، گاه‌ها می‌تواند باعث ناپایدار شدن برخی از طول موجهای خاص اغتشاشی در برخی از اعداد رینولدز مشخص گردد. شکل زیر چهار پروفیل سرعت مختلف را نشان می‌دهد که از نقطه نظر ناپایداری غیر لزج مورد بررسی قرار گرفته‌اند. از نقطه نظر ناپایداری غیرلزج، سه پروفیل اول به صورت نامشروع پایدار می‌باشند. تنها پروفیل چهارم است که بر مبنای تئوری (۲) احتمالاً ناپایدار می‌باشد. البته لازم به ذکر است که هر چهار پروفیل مذبور در برخی اعداد رینولدز خاص دارای ناپایداری لزج می‌باشند. (ناپایداری ناشی از فعل شدن برخی از طول موجهای غیر فعال در تئوری جریان غیر لزج).



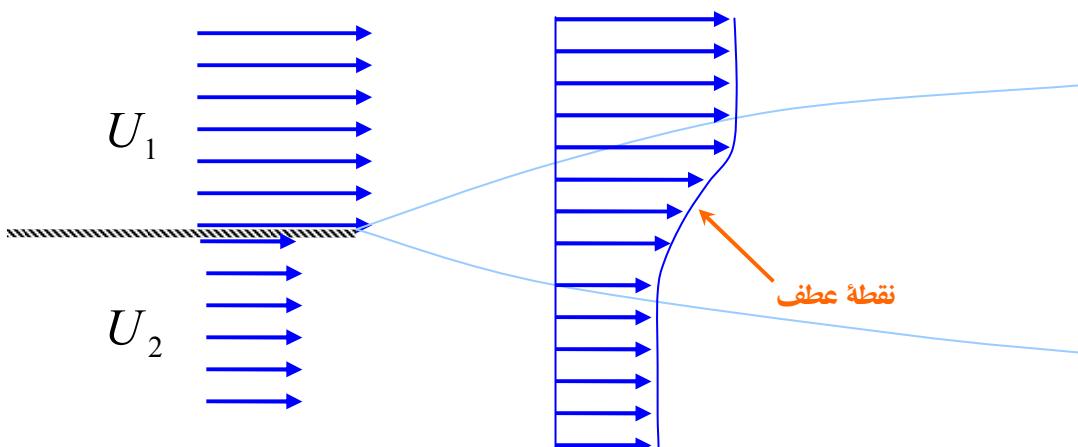
شکل (۸): پروفیلهای سرعت پایدار و ناپایدار

برای توضیح بیشتر، چند جریان کلاسیک که دارای نقطه عطف در پروفیل سرعت خود هستند و نیز شرط ناپایداری  $U''(U - U_{PI}) < 0$  در تمام نقاط پروفیل سرعت آنها صادق می باشد را مورد بررسی اجمالی قرار می دهیم. از آن جمله می توان به جریانات جدایش یافته، لایه های برشی، جریانات جت و جریانات برخاستگی یا جریانات Wake اشاره نمود.

### الف - لایه های برشی<sup>۳۲</sup>:

لایه های برشی جریاناتی هستند که ماحصل برهمنکنش دو جریان یکنواخت اغلب با سرعتهای متفاوت می باشند. (اگر چه می توان نشان داد که در اثر برخورد دو جریان با سرعتهای یکسان ولی با دما، چگالی و یا فشارهای مختلف هم می توان ناپایداری جریان را مشاهده نمود). همانطور که در شکل زیر نشان داده شده است، در اثر برهم کنش دو جریان با سرعتهای مختلف، پروفیل سرعتی به

دست می آید که دارای نقطه عطف در منحنی پروفیل سرعت خود  $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0$  می باشد:



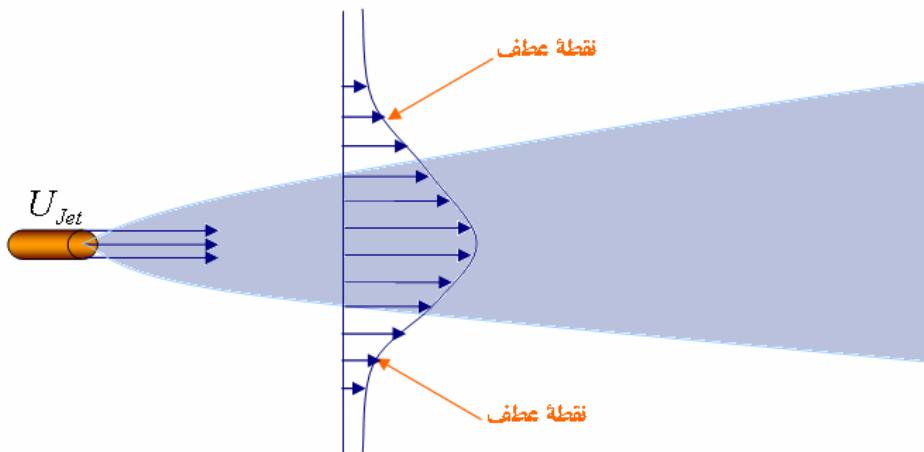
شکل(۹): پروفیل سرعت در یک لایه برشی میان دو پروفیل سرعت با اندازه های متفاوت و نقطه عطف مربوطه

لایه برشی فوق به واسطه داشتن نقطه عطف در داخل پروفیل سرعت خود و نیز شرط ناپایداری  $U''(U - U_{PI}) < 0$  در تمام نقاط پروفیل خود، جریانی مستعد برای آشفته شدن می باشد. البته برای آشفته شدن چنین جریاناتی لازم است که شدت دو جریان برخورده و بالاخص اختلاف میان این دو جریان از یک حد مشخص فراتر رود. بنابراین شروطی همانند وجود نقطه عطف در پروفیل سرعت و یا شرط ناپایداری  $U''(U - U_{PI}) < 0$  تنها شرط لازم مساله محسوب می شوند.

<sup>۳۲</sup> Shear Layers

## ب- جریانات جت:

جریانات جت (چه در حالت جریانات جت صفحه ای<sup>۳۳</sup> دو بعدی و یا جریانات جت دایروی<sup>۳۴</sup> سه بعدی) نمونه دیگری از جریانات مستعد آشفتگی و دارای نقطه عطف در داخل پروفیل سرعت خود میباشند. در این جریانات، اغلب جریانی با سرعت بالا به درون جریانی با سرعت متفاوت از جریان اول تزریق می‌گردد.



شکل(۱۰): پروفیل سرعت در یک جریان جت خروجی از یک نازل جت

می‌توان با تعریف عدد رینولدز بر حسب قطر خروجی جت و نیز سرعت جریان جت، عدد رینولدز بحرانی برای جریان جت را تعریف نمود. بدین ترتیب که برای جریانات دارای عدد رینولدز پائینتر از رینولدز بحرانی، جریان آرام و برای مقادیر بزرگتر عدد رینولدز جریان مزبور آشفته می‌باشد. لازم به ذکر است که معمولاً تمام جریانات جتی که در کاربردهای صنعتی – مهندسی با آنها سروکار داریم، جزو دسته جریانات مستعد برای آشفتگی محسوب می‌شوند. مثلاً جریان جت خروجی از اگزوز توربوجت‌ها، توربوفنها، جریانات جت صفحه ای برای کنترل لایه مرزی و یا خنک کاری سطوح و حتی جریانات جانبی نظیر جریانات جانبی عبوری از درون صفحات به سمت و یا از سمت لایه مرزی همگی جزو این دسته جریانات محسوب می‌گردند.

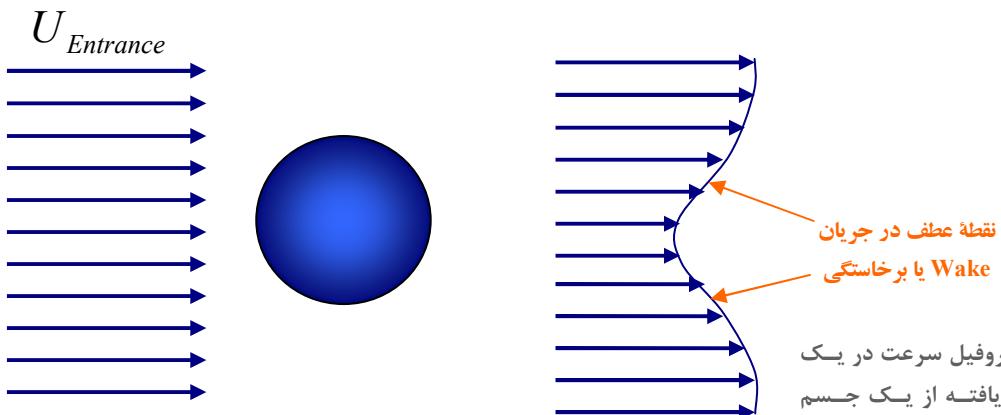


شکل (۱۱): جریان خروجی از نازل هواپیماها و موشکها نمونه خوبی از جریانات جت محسوب می‌گردد.

<sup>۳۳</sup> Plane Jets  
<sup>۳۴</sup> Circular Jets

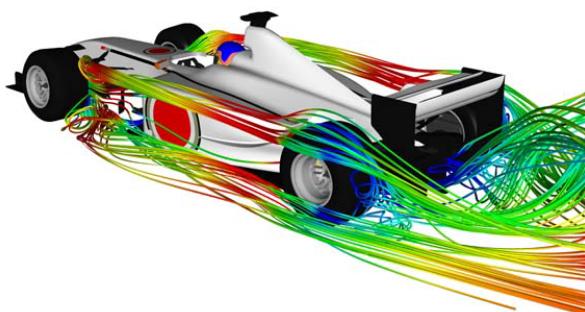
## ج- جریانات برخاستگی یا Wake:

جریانات جدایش یافته پشت اجسام Blunt نیز جزو دسته جریاناتی هستند که دارای نقطه عطف در داخل پروفیل خود می باشند. شماتیک این جریانات در شکل (۱۲) نشان داده شده است:



شکل (۱۲): پروفیل سرعت در یک جریان عبوریافته از یک جسم

تمام جریاناتی که تا اینجا معرفی شده اند، جریاناتی هستند که در قبال اعمال اغتشاشات احتمالی بر روی جریان، پتانسیل لازم برای آشفته شدن را دارا می باشند.



شکل (۱۳): چند نمونه جریان Wake در پشت اجسام متحرک؛ تقریب شکل و اندازه نیروی پسای واردہ بر اجسام متحرک می باشد. تلاش مهندسین همواره بر پایه کاهش حجم Wake به منظور کاهش مصرف انرژی متمرکز شده است.

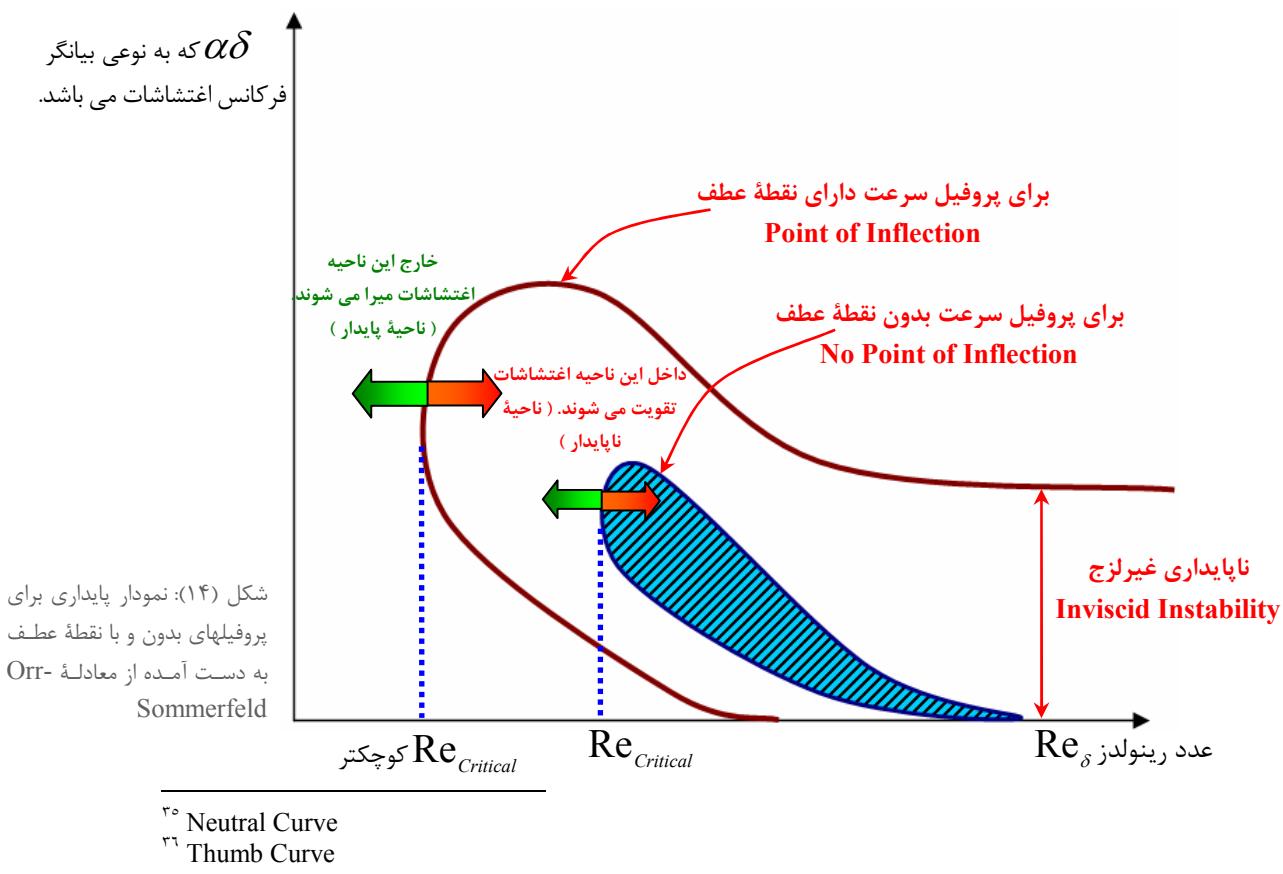
## تئوری پایداری لزج: حل معادله Orr-Sommerfeld

معادله رایلی نشان داد که نقطه عطف می تواند برای جریانات با عدد رینولذ بی نهایت ( جریانات غیرلزج ) به عنوان منبع اصلی ایجاد ناپایداری محسوب گردد. لیکن نتایج تجربی نشان داده اند که تمام پروفیلهای آرام یا جریان در اعداد رینولذ محدود ( و نه عدد رینولذ بی نهایت برای جریانات غیر لزج ) می توانند ناپایدار گردند. این ناپایداریها در داخل مقادیر ویژه معادله Orr-Sommerfeld محبوس شده اند. شکل بدون بعد این معادله به شکل معادله (۳-۲) می باشد:

$$(U^* - c^*)(\phi'' - \alpha_\delta^2 \phi) - U^{*''} \phi + \frac{i}{\alpha_\delta \text{Re}_\delta} (\phi''' - 2\alpha_\delta^2 \phi'' + \alpha_\delta^4 \phi) = 0 \quad (3-2)$$

که در آن  $\eta = \frac{y}{\delta}$  و  $\phi = \frac{v}{U_e}$ ,  $U^* = \frac{U}{U_e}$ ,  $c^* = \frac{c}{U_e}$ ,  $\alpha_\delta = \alpha\delta$  می باشد.

تمام تئوریهای لزج تائید نموده اند که در اعداد رینولذ پائین ( مثلاً در مرتبه  $\text{Re}_\delta = 1000$  ), نواحی محدودی وجود دارند که در آن نواحی، اغتشاشات بی نهایت کوچک می توانند رشد نموده و بزرگ شوند. مرز این نواحی را اصطلاحاً منحنی خنثی<sup>۳۵</sup> می نامند. به واسطه شکل خاص این نواحی، آنها را منحنی های انگشتی<sup>۳۶</sup> می نامند و دو نمونه از این منحنی ها در شکل (۱۴) نشان داده شده است.



در خارج از منحنی ها، تمام اغتشاشات میرا می شوند ( بالاخص در نواحی با عدد رینولذ بسیار پائین و یا لرجه بسیار بالا ) چنانچه پروفیل سرعت  $(y)$  بدون نقطه عطف باشد، این پروفیل در اعداد رینولذ بالا حذف خواهد شد که در تطابق با شرط رایلی می باشد. در مقابل چنانچه پروفیل سرعت  $(y)$  دارای نقطه عطف باشد، منحنی انگشتی در اعداد رینولذ بی نهایت هم کماکان باز باقی می ماند. کوچکترین عدد رینولذ نظیر هر منحنی را اصطلاحاً عدد رینولذ بحرانی  $Re_{Critical}$  می نامند. همانطور که در شکل مشاهده شد، پروفیلهای سرعتی که دارای نقطه عطف می باشند، دارای عدد رینولذ بحرانی کوچکتر و ناحیه انگشتی وسیعتری می باشد. به عبارت دیگر، از آنجا که نقاط داخل ناحیه انگشتی نقاطی هستند که اغتشاشات به ازای مقادیر رینولذ و فرکانس مربوطه رشد می نمایند، پروفیلهای سرعتی که دارای نقطه عطف در داخل خود هستند، دارای طیف وسیعتری از اغتشاشات ناپایدار کننده می باشند. اما محدوده عدد رینولذ و فرکانس پروفیلهای بدون نقطه عطف، به مراتب کوچکتر از پروفیلهای مجهز به نقطه عطف می باشد.

همانطور که در شکل نشان داده شده است، در یک عدد رینولذ خاص، همواره با افزایش مقدار  $\alpha\delta$ ، به سمتی خواهیم رفت که اغتشاشات جریان میرا خواهند شد. از سوی دیگر برای حالتی که با پروفیل سرعت دارای نقطه عطف سروکار داریم، برای مقادیر کوچک  $\alpha\delta$ ، با افزایش عدد رینولذ به سمت ناپایداری و رشد اغتشاشات پیش خواهیم رفت. اما در جریاناتی که نقطه عطفی در پروفیل سرعت آنها مشاهده نمی شود، در یک مقدار  $\alpha\delta$  مشخص، فقط در محدوده خاصی از عدد رینولذ رشد اغتشاشات را شاهد خواهیم بود. به عبارت دیگر، همانطور که از شکل نیز مشخص می باشد، در موقعی که با پروفیلهای سرعت بدون نقطه عطف سروکار داریم، بر خلاف تصور رایج، افزایش عدد رینولذ ( حتی تا بی نهایت ) نمی تواند باعث آشفته شدن جریان گردد. همانطور که قبلاً ذکر شد، در تئوری ناپایداری جریانات غیر لزج، پروفیلهای بدون نقطه عطف همواره پایدار می باشند. لیکن در بررسی جدید ( که از حل عددی معادله لرج Orr-Sommerfeld به دست آمده است ) دیده شد که به ازای محدوده خاصی از  $\alpha\delta$  و اعداد رینولذ می توان ناپایداری را در جریانات بدون نقطه عطف مشاهده نمود. گوئی لزجت باعث فعال شدن برخی از طول موجهای غیرفعال در جهت ناپایدار نمودن جریان شده است. مجدداً یادآوری می شود که منحنی مزبور برای بررسی رشد اغتشاشات در تمام جریانات (اعم از لرج و غیر لرج) ارائه شده است.

## مروری بر خواص جریانات آشفته در مقایسه با جریانات آرام:

برای مقایسه جریانات آرام و آشفته ذکر نکات ذیل لازم می باشد:

۱- یک جریان آشفته، به واسطه ادیهای موجود در ساختار خود از یک جریان آرام تمیز داده میشود.

ادیهای موجود در جریانات آشفته، باعث ایجاد نوسان<sup>۳۷</sup> در میدان سرعت، فشار، دما و چگالی و حتی

غلظت جریان می شوند. همین ادیها باعث ایجاد Randomness و نوعی عدم قطعیت در تعیین

مقادیر صریح متغیرهای جریانی در توزیع میدان جریان میگردند. (اگر چه نوسانات میدان سرعت به

خودی خود نیز به نوعی باعث تشکیل ادی می گردند). در ادامه به بررسی اجمالی چگونگی تشکیل

ادی می پردازیم.

## چگونگی تشکیل ادی ها<sup>۳۸</sup>:

یک جریان آشفته را در نظر بگیرید. به واسطه حرکات اتفاقی<sup>۳۹</sup> و نامنظم<sup>۴۰</sup> ذرات در یک جریان آشفته و

وجود اغتشاش یا Fluctuation در جریان ( که دارای سرعت مقیاسهای مختلف از چند درصد سرعت

متوسط تا صد درصد اندازه سرعت متوسط می باشد )، گاهاً در امتداد عمود بر راستای جریان اصلی، یک

سری جریانات جانبی رخ می دهد. به واسطه این عمل، ممنتوم لایه های نزدیک دیواره ( که به واسطه

ذات اضمحلالی جریان آشفته بخشی از انرژی آنها از دست رفته است ) به طور دائمی توسط لایه های پر

انرژی بالاتر Refresh می گردد و همین امر باعث می شود که بخشی از ممنتوم از دست رفتہ سیال

مجاور دیواره توسط لایه های پرانرژی بالاتر جبران گردد.

نتیجه دیگر حرکات اتفاقی و نامنظم جریان در جهت عمود بر جریان، تشکیل ادی می باشد. با در نظر

گرفتن این اصل که همواره هر ذره متحرک سیال تمایل به حفظ ممنتوم خود دارد، وقتی به واسطه یک

اغتشاش کوچک یا Fluctuation، ذره ای از سیال داخل لایه مرزی بدون وجود پتانسیل لازمه ( و تنها

تحت اثر ذات ناپایدار جریان ) از لایه با ممنتوم کم به لایه با ممنتوم بالا جهش مینماید، برای حفظ و

بازگشت ممنتوم ذره به مقدار اولیه خود، ذره در موقعیت جدید خود، حرکتی را در مقیاس کوچک ولی

<sup>۳۷</sup> Fluctuation

<sup>۳۸</sup> Eddies Formation Mechanism

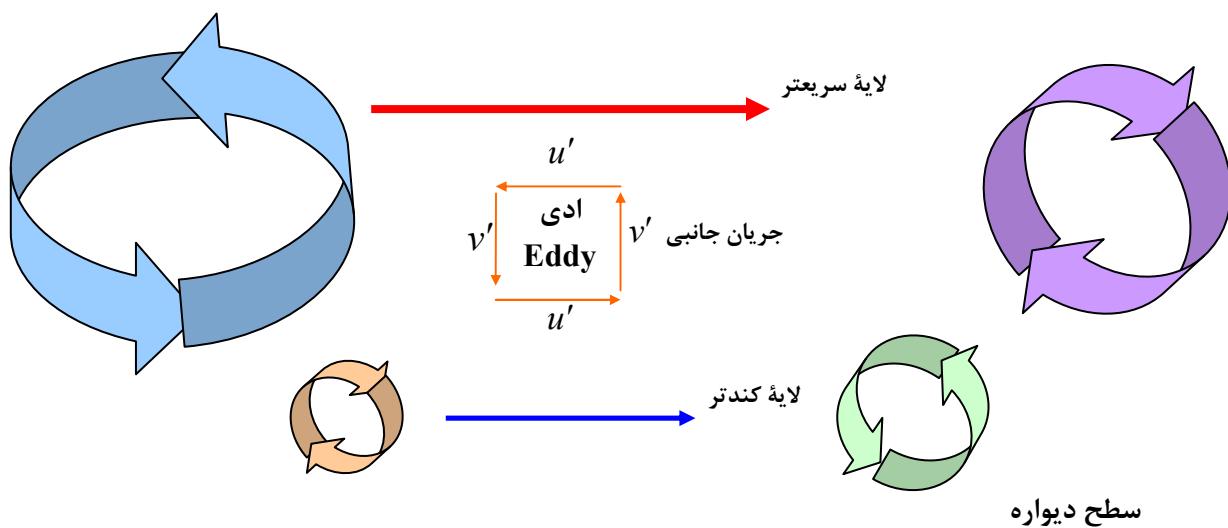
<sup>۳۹</sup> Random

<sup>۴۰</sup> Erratic

در خلاف جهت ممنتوم لایه مزبور انجام میدهد تا ممنتوم افزایش یافته مجدداً تا حدی به ممنتوم اولیه خود کاهش یابد. مجموعه این نوع حرکات در کنار تمایل جریان به حفظ قانون پیوستگی، منجر به تشکیل ادی می گردد. همین توصیف در مورد ذراتی که از لایه با ممنتوم بالا به لایه با ممنتوم پائین منتقل می گردند و در نهایت باعث تشکیل ادی می گردند نیز صحیح می باشد.

به بیان دیگر، وقتی بخشی از جریان به صورت جانبی به لایه های پائینتر منتقل می گردد، در همین زمان برای جلوگیری از تجمع ذرات در لایه تحتانی و به واسطه قانون پیوستگی جرم، حرکت مشابهی در جهت مخالف باقیستی رخ دهد تا سیال کندر را به سمت سیال سریعتر منتقل نماید تا در آن قسمت شتابدهی شود. مجدداً برای جلوگیری از تجمع ذرات فقط در دو نقطه لازم است که حرکات مشابهی در راستای جریان اصلی نیز رخ دهد. مجموعه این فرآیندهای انتقال ممنتوم منجر به تشکیل ادی ها در جریانات آشفته میشود.

مجدداً خاطر نشان می کنیم که این اغتشاشات موجود در جریانات آشفته ( مثل اغتشاشات سرعتی )، می توانند دارای اندازه ای از چند صدم اندازه سرعت متوسط جریان تا اندازه ای از مرتبه سرعت متواتر جریان یا بیشتر داشته باشد، به عبارت دیگر اثر اغتشاش می تواند از مقادیر کوچک ( جهش به لایه های نزدیک با ممنتومی نزدیک به ممنتوم لایه موجود ) تا مقادیر قابل توجه ( جهش به لایه های دور با ممنتومی بسیار بزرگتر یا بسیار کوچکتر از ممنتوم لایه موجود ) طبقه بندی گردد. به عبارت دیگر میتوان طیف وسیعی از اندازه ادیها را در یک جریان شاهد باشیم. از سوی دیگر، برهمکنش میان ادی ها خود می تواند باعث تحریک و القای اغتشاشات جدیدتر در داخل میدان جریان گردد.



شکل(۱۵): ادی ها در یک جریان آشفته و چگونگی توزیع کمیتهای فیزیکی در داخل جریان

همانطور که در شکل دوار ادیها مشاهده می شود، در صورت چرخش یک ادی در جهت مناسب، ادی مزبور می تواند باعث انتقال انرژی از لایه های پر انرژی به سمت لایه های کم انرژی و بالعکس می شود. به عبارت دیگر حضور ادی می تواند باعث توزیع مناسب ممتومن، انرژی حرارتی، فشار، دما و غیره در داخل میدان گردد. لازم به ذکر است که چنانچه در یک میدان جریان گرادیان سرعت وجود نداشته باشد، دیگر برای سیال دلیلی وجود ندارد که در مقابل Fluctuation اتفاقی، جریان یک حرکت دیگر و در جهت عمود بر آن برای بازگشت به ممتومن اولیه انجام دهد. یعنی در یک جریان بدون وجود گرادیان در میدان سرعت متوسط، یک Fluctuation در مولفه سرعت لزوماً به یک ادی تبدیل نشده و اغتشاش مزبور پس از مدت کوتاهی تحت اثرات لزجت سریعاً میرا می گردد. بنابراین وجود گرادیان سرعت متوسط شرط لازم برای تشکیل ادیها و تبدیل جریان آرام به آشفته می باشد. لذا در مدلسازی های جریانات آشفته بایستی نواحی دارای گرادیان سرعت متوسط (بالاخص نواحی مجاور دیواره و یا نواحی داخل گردابه ها و جریانات جدایشی) به دقت مدلسازی گردند تا بتوان رژیم دقیقی از جریان آشفته را مدل نمود.

۲- جریانات آرام دارای Randomness تنها در مقیاس مولکولی<sup>۴۱</sup> می باشند که اصطلاحاً به آن نفوذ یا اختلاط مولکولی<sup>۴۲</sup> گفته می شود. یعنی آنچه باعث نفوذ، پخش و یا دیفیوژن (توزیع) کمیتهاي فیزیکی نظیر حرارت یا ممتومن در داخل جریان می شود، خواصی مولکولی نظیر هدایت حرارتی  $k$  و  $\mu$  یا ویسکوزیتی $\mu$  و با استفاده از حرکت مولکولها در مقیاس Mean Free Path می باشند.

۳- در یک جریان آشفته، نوسانات میدان جریان و Randomness موجود در جریان، بر روی طیف وسیعی از مقیاسها (به واسطه حضور ادیهای در مقیاسهای مختلف) رخ می دهد. آشفتگی در واقعیت امر یک پدیده وابسته به زمان، سه بعدی و به شدت غیر خطی است.

۴- اندازه ساختارهای موجود در جریان آشفته (مثلًا ادیهای موجود در جریان آشفته)، می تواند از مقادیر نزدیک به مقیاس مولکولی تا بزرگترین طول مقیاسهای جریان (نظیر قطر لوله یا طول صفحه) باشد.

۵- نوسانات میدان سرعت می تواند از چند درصد مقدار سرعت متوسط تا ۱۰۰ درصد مقدار سرعت متوسط در هر دو سوی مثبت و منفی باشند.

<sup>۴۱</sup> Molecular Scale

<sup>۴۲</sup> Molecular Diffusion/Mixing

۶- Dynamic Fluctuation که ذات جریانات آشفته می باشد، می تواند باعث اختلاط و نیز تبادل

شدید ممنتوم و حرارت گردد، از همینرو جریانات آشفته جریاناتی شدیداً اضمحلالی<sup>۴۳</sup>، با ضریب

اصطکاک و ضریب انتقال حرارت بالا در مقایسه با جریانات آرام محسوب می شوند. هر چه میزان

Fluctuation در مقیاس بزرگتری رخ دهد، اندازه تبادل ممنتوم و حرارت بزرگتر خواهد بود.

بنابراین ( با در نظر گرفتن افت فشار افزایش یافته در جریانات آشفته )، در مسائل درگیر با انتقال

حرارت و یا انتقال جرم، آشفته نمودن جریان و به هر وسیله ممکن همواره مد نظر مهندسین

میباشد.

۷- بزرگترین ادی های موجود در یک جریان آشفته، به واسطه ناپایداریهای هیدرودینامیک موجود در

میدان جریان متوسط به وجود می آیند. به عنوان مثال برشی که بین جریان و مرزهای جامد وجود

دارد و یا لایه لایه شدنها ناپایدار<sup>۴۴</sup> ایجاد شده به واسطه گرمایش سیال توسط سطوح جامد

تحتانی، باعث تشکیل ادی در ابعاد و مقیاسهای بزرگ جریانی می شوند.

۸- دینامیک و خواص هندسی بزرگترین ادی ها متناسب با خواص میدان جریان متوسط می باشند. به

عنوان مثال، ورتیسیته های بزرگ ناپایدار<sup>۴۵</sup> تشکیل شده بر روی محیط خارجی یک جت گرد

آشفته، تمایل به داشتن ساختار حلقوی<sup>۴۶</sup> دارد.

۹- طول مقیاس و زمان مقیاس مربوط به کوچکترین ادی ها چندین مرتبه بزرگتر از طول مقیاس و

زمان مقیاس مربوط به حرکت مولکولی می باشد. به طور کلی، فرآیندهای اضمحلال لجز<sup>۴۷</sup> به طور

آماری مستقل از حرکت مولکولی و مقیاسهای مربوطه می باشند.

۱۰- بزرگترین ادی ها طی چندین مرحله و به صورت متوالی به ادی های کوچکتر شکسته می شوند. این

تقسیم ادی ها از مقیاس بزرگ به مقیاسهای کوچکتر، باعث انتقال و تقسیم انرژی از جریان متوسط

به مقیاسهای کوچکتر حرکت می گردد که به آن اصطلاحاً آبشار انرژی<sup>۴۸</sup> گفته می شود. اصل بقای

ممنتوم زاویه ای ( برای اجسام دوران ) بیان می کند که هر چه شعاع دوران یک جسم دوران کننده

با انرژی دورانی ثابت کوچکتر گردد، اندازه سرعت دورانی آن افزایش می یابد و بالعکس. در این بین

<sup>۴۳</sup> Dissipative

<sup>۴۴</sup> Unstable Stratification

<sup>۴۵</sup> Large, Unstable Vortices

<sup>۴۶</sup> Toroidal Structure

<sup>۴۷</sup> Viscous Dissipation

<sup>۴۸</sup> Energy Cascade

و در مبحث مربوط به تقسیم ادیها، کوچکترین ادی ها به واسطه چرخش سریع به دور خود، باعث اضمحلال سریعتر انرژی جنبشی دورانی منتقل شده به خود می گردند. فرآیند تقسیم ادی ها به ادی های کوچکتر تا جائی ادامه پیدا می کند که که افزایش سرعت دورانی ادیها و نیز افزایش نرخ اضمحلالی آنها به یک سطح تعادلی برستند.

۱۱- همانطور که اشاره شد جریانات آشفته شامل ادی های درهم پیچیده و در اندازه های مختلف میباشد. برای حل کاملاً دقیق یک میدان جریان آشفته با استفاده مستقیم از معادلات بقاء، به طوریکه جزئی ترین پدیده ها نیز مد نظر قرار گرفته باشند، لازم است که از شبکه محاسباتی استفاده نمائیم که اندازه المانهای آن کوچکتر از کوچکترین ادیهای موجود در جریان باشد. یعنی هر یک از کوچکترین ادیها به تنها ی توسط چند المان کوچکتر گستته گردند. بدین منظور ابتدا لازم است که اندازه کوچکترین ادیها بر حسب طول مقیاس کولموگروف<sup>۴۹</sup> تعیین گردند.

### طول مقیاس کولموگروف:

اندازه کوچکترین ادیها هم مرتبه اندازه طول مقیاس کولموگروف،  $\eta$  ، می باشند. وی ثابت نموده است که:

$$\eta = \left( \frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{1/4} \quad (4-2)$$

که در آن  $\nu$  ویسکوزیتی سینماتیک و  $\varepsilon$  نرخ اضمحلال انرژی جنبشی آشفته می باشد:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}, \quad \varepsilon = \text{Dissipation of T.K.E., Where } T.K.E. = \frac{1}{2} \{ u'^2 + v'^2 + w'^2 \}$$

به همین ترتیب یک سرعت مقیاس کولموگروف نیز تعریف می شود:

$$v = (\varepsilon \nu)^{1/4} \quad (5-2)$$

بعد از آنکه ادیها به اندازه های در حد طول مقیاس کولموگروف شکسته شدند، انرژی خود را به وسیله اضمحلال لزج به گرما تبدیل می کنند که نرخ اضمحلال مربوطه را با  $\epsilon$  نشان داده می شود:

$$\varepsilon = A \frac{u'^3}{l_e} \quad (6-2)$$

---

<sup>۴۹</sup> Kolmogorov Length Scale

که در آن،  $A$  ضریبی ثابت از مرتبه واحد،  $u'$  نوسان سرعت یا Velocity Fluctuation و  $l_e$  اندازه متوسط ادی حامل انرژی است.

با این فرض که  $l_e \propto L_r$  است، (که در آن  $L_r$  همان طول مقیاس مساله مانند طول صفحه یا قطر لوله یا ...) است و با در نظر گرفتن  $U_r$  (که همان سرعت مقیاس مساله است) و با این فرض که  $u' \propto U_r$  می باشد، آنگاه می توان اینطور اظهار داشت که در مدلسازی یک جریان آشفته سه بعدی، دامنه محاسباتی از مرتبه  $L_r^3$  و فاصله بین المانها از مرتبه  $\eta^3$  می باشد. بنابراین تعداد کل المانهای مورد نیاز

$$Re = \frac{U_r L_r}{\nu} = \left( \frac{L_r}{\eta} \right)^3 \quad (7-2)$$

$\frac{L_r}{\eta} = \frac{L_r \varepsilon^{1/4}}{\nu^{3/4}} = \frac{L_r U^{3/4}}{\nu^{3/4} L_r^{1/4}} = Re^{3/4}$

از آنجا که در کاربردهای مهندسی عدد رینولدز معمولاً دارای مقداری بین  $10^5$  تا  $10^8$  است، بنابراین اندازه کوچکترین ادی ها چیزی در حدود  $10^{-6}$  ~  $10^{-4}$  برابر طول مقیاس مساله است. به عبارت دیگر، برای مدلسازی کاملاً دقیق ادیهای موجود در هر جریان آشفته (بالاخص نحوه اضمحلال ادیهای موجود در جریان)، هر بعد هندسی مساله بایستی حداقل به  $10^6$  تا حداکثر  $10^9$  قسمت تقسیم گردد. یعنی برای یک مساله دو بعدی به  $10^8$  تا  $10^{12}$  عدد المان و در یک مساله سه بعدی نیز به  $10^{12}$  تا  $10^{18}$  عدد المان نیاز می باشد! حال چنانچه بخواهیم مدلسازی را به صورت وابسته به زمان و گذراء انجام دهیم، زمان مورد نیاز برای بررسی کل جریان حداقل بایستی برابر زمان مقیاس بزرگترین ادی یا  $T$  باشد:

$$T = \frac{L_r}{U} \quad (8-2)$$

و گام زمانی مورد استفاده بایستی برابر  $\Delta t = \frac{\eta}{U}$  باشد. تعداد کل گامهای زمانی مورد نیاز برای مدلسازی

دقیق یک مساله آشفته برابر  $\frac{T}{\Delta t}$  می باشد. لذا تعداد کل گامهای زمانی مورد نیاز برابر است با:

$$\frac{T}{\Delta t} = \frac{L_r \nu}{\eta U} = \frac{L_r (\nu \varepsilon)}{\nu^{3/4} / \varepsilon^{1/4} U} = Re^{1/2} \quad (9-2)$$

نظر گرفتن جزئی ترین پدیده ها از مرتبه  $Re^{1/4}$  ( و یا از مرتبه  $10^{13}$  تا  $10^{22}$  نود محاسباتی – اعم از نود فضائی یا نود زمانی ) می شود. به عنوان نمونه، برای محاسبه دقیق جریان آشفته داخل یک لوله، چنانچه از ابرکامپیوتر CRAY استفاده گردد، به  $10^6$  تا  $10^9$  روز محاسبه دائم این ابرکامپیوتر نیاز میباشد که به اندازه چندین برابر عمر فعلی جهان هستی می باشد! همگی این اعداد سرسام آور ما را بر آن و می دارد که فعلاً و با توجه به امکانات موجود محاسباتی، فکر مدل نمودن دقیق جریانات آشفته در با احتساب کوچکترین ادیها را از سر خود بیرون نمائیم. اما راه دیگر استفاده از مدلهای می باشد که بر مبنای کمیتهای متوسط به دست آمده اند، این مدلها جریانات آشفته را با استفاده از مشهها و شبکه هایی با چگالی قابل قبول مدل می کنند. هدف از ارائه مطالب این جزو نیز به نوعی فرار از این هزینه محاسباتی سرسام آور می باشد.



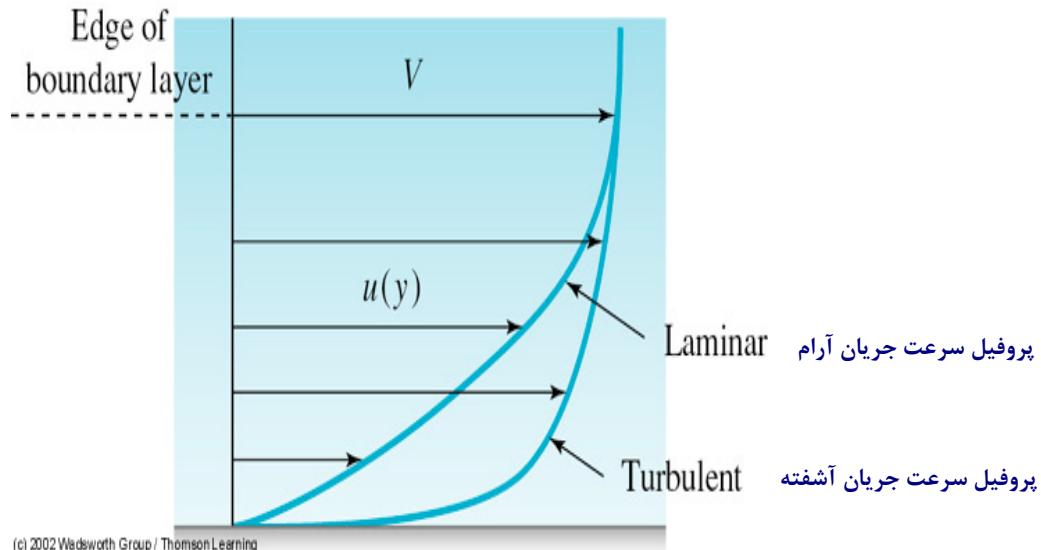
شکل (۱۶): کولموگروف

۱۲- در جریانات آشفته معمولاً با Fluctuation در مقیاسهای بزرگ سروکار داریم که باعث اختلاط جریان می گردد. تقریباً غیر ممکن است که بدون رسیدن به حالت آشفته، فرآیند اختلاط موثری را شاهد باشیم. در سیالات با ویسکوزیتی پائین، به واسطه پائین بودن نیروهای لرجت در مقایسه با نیروهای اینرسیال، رسیدن به حالت آشفته در مقایسه با سیالات با ویسکوزیتی بالا راحتتر است. بنابراین در فرآیندهای اختلاطی معمولاً سعی می شود به نوعی ویسکوزیتی سیال پائین آورده شود، این امر یا با افزایش دمای مایعات، یا کاهش دمای گازها و یا افزودن مواد روانساز به مخلوط صورت می پذیرد. معمولاً اختلاطها در حالت جریان Laminar اختلاطهای غیر موثری می باشند.

۱۳- افت فشار در یک جریان آشفته بسیار بزرگتر از جریان آرام است. بنابراین داشتن جریان آرام در خطوط انتقال جریان مطلوبتر از جریان آشفته می باشد. جریان خون در رگهای بدن نمونه ای از

جريان آرام سیالی غیر نیوتونی است.

۱۴- پروفیل سرعت جریانات آشفته نسبت به جریانات آرام، مسطح تر می باشد، و بالطبع آن گرادیان سرعت در نزدیکی دیواره و تنفس برشی ناشی از آن در جریانات آشفته بیش از جریانات آرام میباشد. به واسطه کوپل بودن توزیع سرعت و دما با یکدیگر، افزایش گرادیان سرعت در نزدیکی دیواره باعث افزایش انتقال حرارت از دیواره نیز می گردد.



شکل (۱-۱۷): جریان بر روی یک صفحه تخت



۱۵- پروفیل نسبتاً یکنواخت سرعت در جریانات آشفته داخل لوله می تواند باعث شود که استفاده از معادله برنولی در این نوع جریانات تا حدی معتبر باشد. ( البته در این بایستی خطای موجود در صرفنظر نمودن اثرات لزجت در داخل معادله برنولی را مد نظر قرار داد ).

۱۶- به واسطه برهمکنش بسیار قوی موجود بین جریان آشفته و جریان متوسط، در مدلسازی پیچیدگیهای موجود در جریانات آشفته و بالاخص در پدیده های ذیل بایستی دقت زیادی به خرج داد:

الف - جریانات با نرخ کرنشهای بسیار بالا<sup>۵۰</sup> اعم از:

الف-۱- جریانات بر روی سطوح منحنی خط جریانی<sup>۵۱</sup>

الف-۲- جریانات با واگرایی جانبی<sup>۵۲</sup> (نظیر جریان بر روی صفحات یک کانال واگرا)

الف-۳- جریانات با شتاب مثبت یا منفی<sup>۵۳</sup>

الف-۴- جریانات چرخشی<sup>۵۴</sup>

الف-۵- جریانات سیرکولاسیون مجدد یا جریانات جدایشی<sup>۵۵</sup>

الف-۶- جریانات ثانویه<sup>۵۶</sup>

ب- اغتشاشات سه بعدی<sup>۵۷</sup>

ج- جریانات عبوری از داخل صفحات ( اعم از جریانات تزریقی یا مکشی)<sup>۵۸</sup>

د- جریانات آزاد حاوی حجم بالائی از اغتشاشات<sup>۵۹</sup>

ه- جریانات برشی بر همکنشی<sup>۶۰</sup>

---

<sup>۵۰</sup> Extra Strain Rate Flows  
<sup>۵۱</sup> Streamline Curvature  
<sup>۵۲</sup> Lateral Divergence  
<sup>۵۳</sup> Acceleration or Deceleration  
<sup>۵۴</sup> Swirl Flows  
<sup>۵۵</sup> Recirculation or Separated Flows  
<sup>۵۶</sup> Secondary Flows  
<sup>۵۷</sup> ۳D Perturbation  
<sup>۵۸</sup> Transpiration ( Blowing or Suction )  
<sup>۵۹</sup> Free Stream Turbulence  
<sup>۶۰</sup> Interacting Shear Layer

## شدت آشفتگی<sup>۶</sup>:

هیچ گاه نمی توان آشفتگی موجود در جریان یک رودخانه آرام را با آشفتگی موجود در یک رودخانه خروشان یکسان فرض نمود. هر دوی این جریانات آشفته محسوب می شوند، لیکن یکی دارای شدت آشفتگی کمتر و دیگری دارای شدت آشفتگی بیشتر می باشد.



شکل (۱-۱۸): یک رودخانه خروشان با شدت آشفتگی بالا

برای مقایسه شدت آشفتگی هر جریان از مقدار نرمالایز شده متوسط زمانی مربع نوسانات سرعت استفاده میشود:

$$\bar{\zeta} = \frac{[(u'^2)]^{\frac{1}{2}}}{\bar{u}} = \frac{\left[ \frac{1}{T} \int_0^T u'^2 dt \right]^{\frac{1}{2}}}{\bar{u}} \quad (10-2)$$

مقادیر معمول شدت توربولانس عبارتند از:

- ۱ برای جریان کاملاً آرام  $\bar{\zeta} = 0$
- ۲ برای یک تونل باد که به خوبی طراحی شده باشد  $\approx 0.01 \approx \bar{\zeta}$
- ۳ برای جریانات داخل رودخانه یا جریانات اتمسفری  $0.1 > \bar{\zeta}$
- ۴ برای جریانات بسیار آشفته نظیر جریان درون رودخانه های خروشان و یا جریان پشت اجسام متحرک سریع  $>> 0.1 > \bar{\zeta}$

<sup>۶</sup> Turbulence Intensity

## زمان مقیاس آشفتگی<sup>۶۲</sup>:

زمان مقیاس آشفتگی، زمان مقیاس مربوط به نوسانات میدان جریان است، به عبارت دیگر متوسط پریود هر نوسان است. این زمان برای جریان خروجی آب از یک شبکه چیزی بین ۰/۱ تا ۰/۰۱ ثانیه (با فرکانسی بین ۱۰ تا ۱۰۰۰ هرتز) می باشد. برای جریانات اقیانوسی یا جریانات جوی این پریود می تواند چیزی بین چند ساعت تا چند روز و حتی بیشتر باشد.

---

<sup>۶۲</sup> Turbulence Time Scale

## فصل سوم

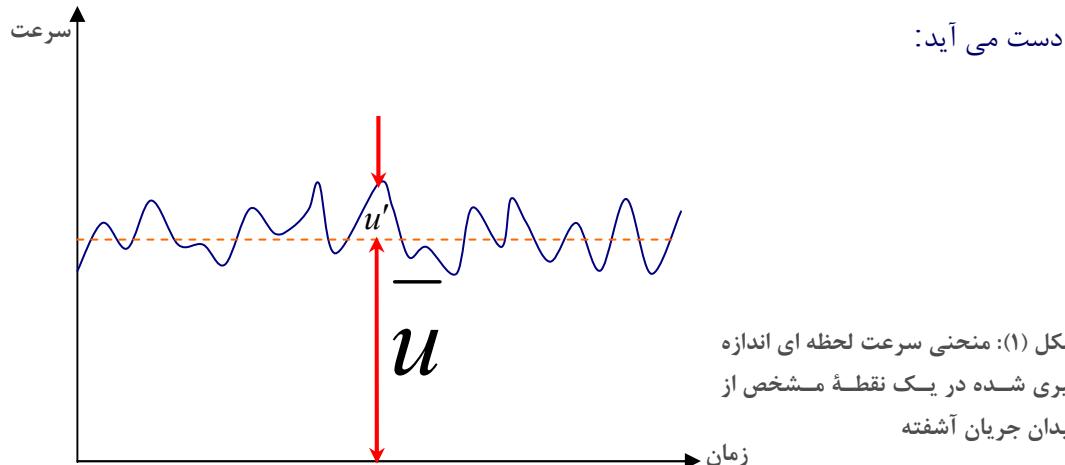
# معادلات حاکم بـ

## جريانهای آشفته

## روش آماری برای بررسی جریانات آشفته:

یک جریان آشفته درون یک لوله را در نظر بگیرید. چنانچه یک نقطه خاص از میدان را جریان درون لوله

مذبور را در نظر گرفته و سرعت آن نقطه را بر حسب زمان اندازه گیری نمائیم، منحنی شبیه شکل (۱) به



شکل (۱): منحنی سرعت لحظه‌ای اندازه گیری شده در یک نقطه مشخص از میدان جریان آشفته

همانطور که می‌بینیم میدان سرعت آشفته  $u(t)$  از برهمنهشت دو قسمت سرعت متوسط  $\bar{u}$  و سرعت نوسانی  $u'$  بدست آمده است.

$$u(t) = \bar{u}_{\text{value}}^{\text{steady mean}} + u_{(t)}^{\text{Fluctuating component}} \quad (1-3)$$

سرعت متوسط زمانی  $\bar{u}$ <sup>۶۳</sup> را به صورت زیر تعریف می‌نمائیم:

$$\bar{u} \equiv \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} u dt \quad (2-3)$$

که در آن  $T_1$  آنقدر بزرگ انتخاب می‌شود که برای مقادیر زمانی بزرگتر از  $T_1$  تغییری در اندازه انتگرال مذبور مشاهده نشود. به عبارت دیگر  $\bar{u}$  مستقل از زمان انتخاب شده  $T_1$  در بیاید. علامت بار (-) بر روی مولفه سرعت بیانگر کمیت متوسط زمانی و  $u'$  بیانگر مولفه نوسانی سرعت می‌باشد. در بخش‌های بعدی نیاز داریم که مولفه‌های نوسانی را به طرق مختلف با یکدیگر ترکیب نمائیم.

به طور کلی کمیت متوسط  $\bar{u}$ <sup>۶۴</sup> را می‌توان به دو طریق محاسبه نمود:

الف) متوسط گیری جمعی<sup>۶۵</sup>

ب) متوسط گیری زمانی<sup>۶۶</sup>

<sup>۶۳</sup> Time Average

<sup>۶۴</sup> Ensemble Averaging

<sup>۶۵</sup> Time Averaging

### متوسط گیری جمعی:

برای فهم مفهوم این نوع متوسط گیری، یک آزمایش جریان آشفته را که شرایط آن کاملاً تکرار پذیر است را در نظر بگیرید. چنانچه آزمایش را  $N$  بار انجام داده و مقادیر میدان  $\eta$  را در لحظه  $t_s$  در هر آزمایش اندازه گیری نمائیم، مجموعه ای از  $N$  عدد مقادیر لحظه ای  $\eta$  را خواهیم داشت. متوسط جمعی  $\bar{\eta}$  عبارتست از:

$$\bar{\eta} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N [\eta(t_s)]_n \quad (3-3)$$

### متوسط گیری زمانی:

در این نوع متوسط گیری، برای یک آزمایش، مقادیر میدان  $\eta$  را در طی زمان آزمایش اندازه گیری نموده و از مقادیر ثبت شده نسبت به زمان متوسط می گیریم:

$$\bar{\eta} = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \eta dt \quad (4-3)$$

در تعریف متوسط گیری زمانی، دامنه زمانی  $\Delta t$  در مقایسه با زمان مقیاس حرکت آشفته و یا به عبارت بهتر در مقایسه با مقیاس زمانی آرامترین تغییرات در خاصیت  $\eta$ ، که بواسطه حضور بزرگترین ادیها میباشد، بسیار بزرگ است. اما در مسائل گذرا،  $\Delta t$  بایستی نسبت به زمان مقیاس نظیر میدان جریان متوسط کوچکتر باشد. به بیان دیگر، تقسیم زمانی مساله بایستی به نحوی صورت پذیرد که رفتار گستته و در عین حال نزدیک به فیزیک مساله به دست آید.

### مقایسه متوسط گیری جمعی در مقابل متوسط گیری زمانی:

معادلاتی که روش مدلسازی آماری را توصیف می کنند، بر مبنای متوسط گیری جمعی بیان شده اند. اما در اندازه گیریهای عملی، نوعاً از کمیتهای متوسط زمانی استفاده میشود. برای جریاناتی که از لحاظ آماری- زمانی ساکن محسوب می شوند<sup>۶۶</sup>) جریاناتی که شامل تپش ها<sup>۶۷</sup> و یا سایر تغییرات مرتبط با زمان در میدان جریان متوسط نیستند) متوسط گیری جمعی و متوسط گیری زمانی نتایج یکسانی را ارائه خواهند داد. مجموعه قوانین ذیل در زمینه متوسط گیری مفید واقع خواهند شد. چنانچه  $a$  و  $b$  را مولفه های نوسانی و  $c$  را به عنوان عدد ثابت در نظر بگیریم، به مجموعه قوانین رینولدز خواهیم رسید:

<sup>۶۶</sup> Statistically Stationary  
<sup>۶۷</sup> Pulsation

$$\overline{a+b} = \bar{a} + \bar{b} \quad (5-3)$$

$$\overline{ca} = c\bar{a} \quad (6-3)$$

$$\overline{ab} = \bar{a}\bar{b} + \bar{a}'\bar{b}' \quad (7-3)$$

$$\frac{\partial \bar{a}}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial x} \quad (8-3)$$

$$\overline{a'} = 0 \quad (9-3)$$

که در آن  $a = \bar{a} + a'$ ,  $b = \bar{b} + b'$  می باشد. مقدار متوسط کمیتهای نوسانی صفر می باشد، یعنی

$\bar{a}' = \bar{b}' = 0$ . البته این فرض آخری از لحاظ آماری فرض قابل قبولی محسوب می گردد.

برای اندازه گیری تجربی مولفه های نوسانی سرعت از تعریف  $\eta_{RMS}$  می توان استفاده نمود:

$$\eta_{RMS} = \sqrt{\overline{\eta'^2}} = \left[ \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \eta'^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \quad (10-3)$$

مزیت تعریف  $\eta_{RMS}$  آن است که بكمک سنسورهای نظیر سیم داغ<sup>۶۸</sup> می توان مقدار  $\eta_{RMS}$  هر کمیت فیزیکی دلخواه را در آزمایشگاه به دقت تعیین نمود.

### معادلات حرکت در جریانات آشفته:

حال می خواهیم معادلات حرکت در جریانات آشفته را مورد بررسی قرار دهیم. روش به کار رفته در اینجا، در سایر مسائل نیز قابل استفاده می باشد.

ابتدا معادلات را برای کمیتهای لحظه ای<sup>۶۹</sup> ( یعنی کمیتهای متوسط به علاوه کمیتهای نوسانی ) می نویسیم.  
آنگاه از طرفین هر معادله متوسط گیری زمانی به عمل می آوریم. البته در این بین بایستی به این نکته توجه نمود که چنانچه تساوی برای معادلات لحظه ای برقرار باشد، این تساوی برای متوسط زمانی آن ( برای دامنه مشخصی از زمان ) نیز برقرار خواهد بود. در نهایت معادلات را ساده سازی نموده تا جاییکه کمیتهای متوسط زمانی ظاهر گردند.

<sup>۶۸</sup> Hot Wire Probe  
<sup>۶۹</sup> Instantaneous Quantities

### معادله پیوستگی برای جریان آشفته:

پیش از این دیدیم که فرم دیفرانسیلی معادله پیوستگی به فرم زیر می باشد:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) = 0 \quad (11-3)$$

این معادله برای مقادیر لحظه ای جریان آشفته نیز برقرار است. چنانچه متوسط گیری زمانی از معادله فوق نمائیم، معادله حاصله به صورت زیر در خواهد آمد:

$$\overline{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i)} = 0 \quad (12-3)$$

با جایگذاری کمیتهای لحظه ای با مقادیر متوسط زمانی به علاوه مقادیر نوسانی، و نیز استفاده از قوانین متوسط گیری رینولدز، خواهیم دید که:

$$\overline{\frac{\partial \rho}{\partial t}} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{\rho u_i}) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{\rho' u'_i}) = 0 \quad (13-3)$$

برای یک جریان تراکم ناپذیر، از آنجا که  $\rho' = 0$  می باشد، معادله فوق به صورت زیر در خواهد آمد:

$$\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_i} = 0 \quad (14-3)$$

### معادله ممنتوم برای جریانات آشفته:

همانطور که پیش از این ذکر شد، معادلات ممنتوم برای یک جریان تراکم ناپذیر با ویسکوزیتۀ ثابت به صورت زیر می باشد:

$$\rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = B_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (15-3)$$

این معادله هم برای جریانات آرام و هم برای جریانات آشفته معتبر می باشد. لیکن برای یک جریان آشفته، متغیرهای وابسته ای نظیر سرعت و فشار تماماً وابسته به زمان می باشند.

حال می خواهیم معادله ممنتوم فوق را بر حسب کمیتهای متوسط زمانی بیان نمائیم. با قرار دادن

$$p = \bar{p} + p' \quad \text{و} \quad u_i = \bar{u}_i + u'_i \quad \text{در معادله (15-3) خواهیم دید:}$$

$$\rho \left( \frac{\partial (\bar{u}_i + u'_i)}{\partial t} + (\bar{u}_j + u'_j) \frac{\partial (\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_j} \right) = B_i - \frac{\partial (\bar{p} + p')}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 (\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_j \partial x_j} \quad (16-3)$$

با ساده سازی معادله (16-3) و نیز اعمال متوسط گیری زمانی بر طرفین این معادله خواهیم دید که:

$$\rho \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \bar{u}'_j \frac{\partial \bar{u}'_i}{\partial x_j} \right) = \bar{B}_i - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (17-3)$$

ترم سوم در سمت چپ معادله (17-3) معمولاً به اشکال مختلف بیان می گردد. از معادله پیوستگی جریانات

$$\text{تراکم ناپذیر، } \frac{\partial u'_j}{\partial x_j} = 0 \text{ می باشد. بنابراین:}$$

$$u'_i \frac{\partial u'_j}{\partial x_j} = 0 \quad \text{and} \quad \bar{u}'_i \frac{\partial u'_j}{\partial x_j} = 0 \quad (18-3)$$

با اضافه و کم نمودن ترم  $\bar{u}'_i \frac{\partial u'_j}{\partial x_j}$  ( که مساوی صفر می باشد ) به طرفین معادله به دست آمده برای

ممنتوم، و از آنجا که:

$$\bar{u}'_i \frac{\partial u'_j}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{u}'_i \bar{u}'_j \quad (19-3)$$

معادله ممنتوم برای جریان آشفته به صورت زیر بیان می گردد:

$$\rho \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) = \bar{B}_i - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \rho \bar{u}'_i \bar{u}'_j \right) \quad (20-3)$$

تنها تفاوت معادله ممنتوم حاصله با معادله ممنتوم با کمیتهای لحظه ای، اضافه شدن ترم آخر در سمت

راست معادله (20-3) یعنی  $\rho \bar{u}'_i \bar{u}'_j$  می باشد. این ترم را اصطلاحاً تنش آشتگی یا تنش رینولز می نامیم.

تنها تفاوت معادلات جریان آرام با آشفته نیز فقط حضور همین ترم می باشد. به طور کلی این ترم، از لحاظ

فیزیکی یک تنش نمی باشد، بلکه بیانگر اثر تبادل اینرسی ( ممنتوم ) می باشد. فراموش نکنیم که این ترم از

سمت راست معادله ممنتوم ( جائیکه با ترمهای اینرسی سروکار داریم ) به سمت چپ منتقل شده است.

بنابراین ریشه و بنیاد این ترم از جنس ممنتوم می باشد.

در حالت کلی، معادلات بقاء حاکم بر جریان سیالات آشفته، (یعنی بقای ممنتوم، غلظت، جرم و انرژی)،

بصورت زیر بیان می شوند:

$$\rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j u_{i,j} \right) = -P_{,i} + (\rho - \rho_{\circ}) g_i + \left[ \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) - \rho \overline{u'_i u'_j} \right]_j \quad (21-3)$$

$$\rho \left( \frac{\partial C}{\partial t} + u_j C_{,j} \right) = \left( \rho \alpha C_{,j} - \rho \overline{u'_j C'} \right)_{,j} + q_c + R \quad (22-3)$$

$$u_{j,j} = 0 \quad (23-3)$$

$$\rho C_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u_j T_{,j} \right) = \left( \lambda T_{,j} - \rho c_p \overline{u'_j T'} \right)_{,j} + H \quad (24-3)$$

پارامتر  $\lambda$  در معادله (24-3) بیان کننده هدایت حرارتی<sup>۷۰</sup> است. بدین سبب از این شکل استفاده شد تا با انرژی جنبشی آشفته (T.K.E.) که آنرا با K نمایش می دهیم، اشتباہ گرفته نشود.

معادلات فوق را اصطلاحاً معادلات RANS نامیده و در ضمن معادلاتی صریح بوده و هیچ فرضی در بدست آمدن و احیاناً ساده سازی آنها نشده است. ولیکن این معادلات تشکیل یک دستگاه بسته<sup>۷۱</sup> را نمی دهند. (یعنی تعداد مجهولات بیش از تعداد معادلات است). بواسطه غیر خطی بودن این معادلات، پس از فرآیند

متوسط گیری، سه همبسته<sup>۷۲</sup> جدید مطرح شده اند:

$$\overline{u'_i u'_j} : \text{همبستگی بین نوسانات سرعت}$$

$$\overline{u'_i C'} : \text{همبستگی بین نوسانات سرعت و غلظت اجزاء}^{73}$$

$$\overline{u'_i T} : \text{همبستگی بین نوسانات سرعت و دما}$$

ترم  $\rho \overline{u'_i u'_j}$  بیانگر انتقال Momentum است. به این ترم

اصطلاحاً تانسور تنش رینولدز گفته می شود.

ترم  $\rho \overline{u'_i C'}$  را اصطلاحاً انتقال غلظت جزء مولکولی در راستای  $x_i$  نامیده و به آن شار جرمی

آشفته<sup>۷۴</sup> گفته می شود.

<sup>۷۰</sup> Thermal Conductivity

<sup>۷۱</sup> Closed Set

<sup>۷۲</sup> Correlation

<sup>۷۳</sup> Species Concentration

<sup>۷۴</sup> Turbulent Mass Flux

- ترم  $\rho C_p \bar{u' T'}$  را اصطلاحاً انتقال آنتالپی ( یا انتقال انرژی ) در راستای  $x$  نامیده و به آن شار

حرارتی آشفته<sup>۷۵</sup> گفته می شود.

- تانسور تنش رینولدز بعنوان یک تنش بر روی سیال عمل کرده و مشخص کننده اثر رفتار ادیهای آشفتگی بر روی میدان جریان متوسط می باشد.

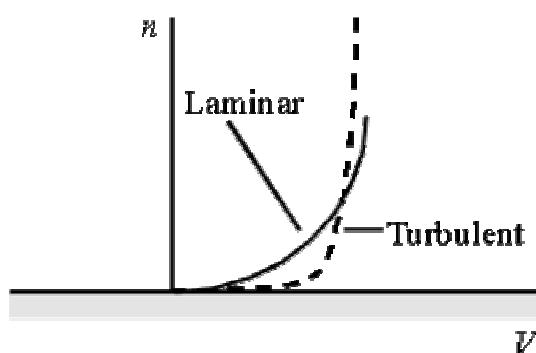
- در بسیاری از نواحی جریان، تنشهای آشفتگی و شارهای آشفتگی بسیار بزرگتر از مقادیر نظری

جریان آرام می باشند و لذا از مقادیر نظری جریان آرام در مقایسه با مقادیر آشفته می توان چشم پوشی نمود.

- هدف از مدلسازی جریانات آشفته، تعیین ترموماهی از قبیل تنش رینولدز، شار جرمی آشفته و یا شار حرارتی آشفته با استفاده از ارتباط دادن مقادیر کمیتهای مذبور به کمیتهای جریان متوسط و بالاخص گرادیانهای موجود در جریان متوسط می باشد.

- برای جریانات ساده برشی ترکیب تنش برشی منتجه از میدان سرعت متوسط با مولفه مربوط به آشفتگی به رابطه زیر منتج خواهد شد:

$$\tau = \tau_{La \min ar} + \tau_{Turbulent} = \mu \frac{d\bar{u}}{dy} - \overline{\rho u' v'} \quad (25-3)$$



**Velocity profiles for Laminar and Turbulent Flow**

شکل (۲): پروفیل سرعت جریان آرام و جریان آشفته بر روی یک صفحه تخت

به جز در ناحیه زیر لایه لزج ( ناحیه مجاور دیواره ) ، در بقیه نواحی، اندازه تنشهای رینولدز،  $\overline{\rho u' v'}$  بسیار بزرگتر از تنشهای لزج  $\mu \frac{d\bar{u}}{dy}$  می باشد.

<sup>۷۵</sup> Turbulent Heat Flux

## معادله انرژی آشفتگی در جریانات آشفته:

چنانچه مجدداً از معادله ممنتوم برای یک جریان تراکم ناپذیر با ویسکوزیتۀ ثابت شروع نمائیم، و معادله ممنتوم با کمیتهای لحظه‌ای در راستای  $\hat{1}$  را در مولفۀ سرعت در همین راستا ضرب نمائیم و پس از ساده سازی به معادله (۲۶-۳) خواهیم رسید:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{u_i u_i}{2} \right) = - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ u_i \left( \frac{p}{\rho} + \frac{u_j u_j}{2} \right) \right] + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ u_i \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] - \nu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (26-3)$$

معادله (۲۶-۳) دارای واحد انرژی می‌باشد و اصطلاحاً آنرا معادله انرژی می‌نامند. لیکن نبایستی این معادله را با قانون اول ترمودینامیک اشتباه نمود. قانون اول ترمودینامیک بیانی از (بقاء) پایستاری انرژی در همه اشکال خود می‌باشد. در حالیکه معادله انرژی (۲۶-۳) از قانون بقای ممنتوم به دست آمده و هیچ شکلی از انرژی حرارتی در آن وجود ندارد. مجدداً چنانچه ترمehای موجود در معادله (۲۶-۳) را به صورت جمع مولفۀ متوسط زمانی و مولفۀ نوسانی ترم مزبور بیان نمائیم:

$$u_i = \bar{u}_i + u'_i \quad (27-3)$$

$$p = \bar{p} + p' \quad (28-3)$$

$$u_i u_i = \bar{u}_i \bar{u}_i + 2\bar{u}_i u'_i + u'_i u'_i \quad (29-3)$$

در نهایت با گرفتن متوسط زمانی از طرفین معادله حاصله و کسر نتیجه حاصله از حاصل ضرب  $\bar{u}_i$  در معادله ممنتوم جریانات آشفته (معادله ای که در آن به صورت صریح تنش رینولدز ذکر شده بود)، به معادله ذیل خواهیم رسید:

$$\begin{aligned} & \overbrace{\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{u'_i u'_i}{2} \right)}^1 + \overbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \bar{u}_i \frac{u'_j u'_j}{2} \right)}^2 = \\ & - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left[ u'_i \left( \frac{p'}{\rho} + \frac{u'_j u'_j}{2} \right) \right]}_3 + \underbrace{u'_i u'_j \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i}}_4 + \underbrace{\nu \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ u'_j \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) \right]}_5 - \underbrace{\nu \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}}_6 \end{aligned} \quad (30-3)$$

معادله (۳۰-۳) را اصطلاحاً معادله انرژی جنبشی آشفتگی می‌نامند و هر ترم به نوعی یک شکل خاص از انرژی و انتقال انرژی را بیان می‌نمایند:

۱- نرخ زمانی افزایش انرژی جنبشی آشفتگی

- ۲- دیفیوژن جابجایی انرژی جنبشی آشفتگی توسط میدان جریان متوسط
- ۳- دیفیوژن جابجایی انرژی آشفتگی کلی توسط آشفتگی جریان
- ۴- تولید آشفتگی ( انرژی کسب شده از میدان جریان متوسط )
- ۵- کار انجام شده توسط تنشهای برشی لزج حرکات آشفته جریان
- ۶- استهلاک و اضمحلال<sup>۷۶</sup> آشفتگی به واسطه حرکت آشفته جریان

---

<sup>۷۶</sup> Dissipation

## تنش برشی در جریانات آشفته:

آشفتگی نوعی ناپایداری جریان است که به واسطه تنشهای برشی ( یا گرادیانهای سرعت ) ایجاد میگردد، هر چه تنش برشی قویتر باشد، آشفتگی جریان نیز شدیدتر خواهد بود. تعیین تنش برشی برای جریانات آشفته بسیار حیاتی و در عین حال از دیدگاه محاسباتی کمی پیچیده می باشد. از طوفی بدون داشتن رابطه ای برای تنش برشی نمی توان با نوشتن بالانس نیروهای وارد بر یک المان سیال، توزیع سرعت را در درون جریان به دست آورد.

تانسور تنش برشی  $\tau_{ij}$  ( تنش برشی آرام  $\tau_{ij,Lam}$  به علاوه تنش برشی آشفتگی  $\tau_{ij,Turb}$  ) به صورت زیر بیان می گردد:

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \rho \bar{u}'_i \bar{u}'_j = \tau_{ij,Lam} + \tau_{ij,Turb} \quad (31-3)$$

$$\tau_{ij,Lam} = \mu \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right), \quad \tau_{ij,Turb} = -\rho \bar{u}'_i \bar{u}'_j \quad for \quad i \neq j \quad (32-3)$$

امید اندکی برای تعیین اندازه تنش رینولدز  $\rho \bar{u}'_i \bar{u}'_j$  به صورت صریح وجود دارد. روش پیشنهاد شده مرتبط نمودن اندازه این تنش آشفته به میدان سرعت متوسط می باشد. این روش در توصیف جریانات آشفته آزاد نظیر جریانات جت و یا Wake موفق عمل نموده است. البته موفقیت این روش محدود به مسائل دو بعدی محدود می باشد.

روشهای مختلفی برای به دست آوردن تنش برشی جریانات آشفته ارائه شده است که در ادامه به تشریح هر یک خواهیم پرداخت:

## ۱- استفاده از سرعت متوسط $\bar{u}$ در رابطه تنش برشی:

$$\tau \neq \mu \frac{d\bar{u}}{dy} \quad (33-3)$$

بایستی خاطرنشان نمود که استفاده از مفهوم تنش برشی ویسکوز جریانات آرام برای جریانات آشفته منجر به نتایج کاملاً غلطی خواهد شد. از همینرو از علامت نامساوی استفاده شده است.

## ۲- استفاده از سرعت متوسط $\bar{u}$ با ترم ویسکوزیته اصلاح شده:

با نوشتن تنش برشی بر حسب ویسکوزیته آرام به علاوه ترم اضافی بیانگر آشفته‌ی یا حرکات میکروسکوپی، برای یک جریان دو بعدی خواهیم دید که:

$$\tau_{ij} = (\mu + \rho\varepsilon) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \quad (34-3)$$

مع اصطلاحاً Eddy Viscosity نامیده شده و توسط رابطه (35-۳) به تنشهای رینولدز مرتبط می‌گردد:

$$\varepsilon = -\frac{1}{\partial \bar{u}_i / \partial x_j} \bar{u}'_i \bar{u}'_j \quad (35-3)$$

مزیت تعریف Eddy Viscosity آن است که چنانچه این کمیت را توسط روش‌های عددی و یا با استفاده از کمیتهای جریان متوسط تعیین گردد، در اینصورت تنش برشی حاصله را در داخل معادله ممنoton قرار داده و بدین وسیله تعداد متغیرهای وابسته مساله کاهش خواهد یافت. این پرسه می‌تواند به ساده شدن قابل توجه مساله منجر گردد. اما مساله اصلی در این بین آن است که از جریانی به جریان دیگر و یا در یک مساله خاص از نقطه‌ای به نقطه دیگر متفاوت می‌باشد. به  $\rho\varepsilon$  اصطلاحاً  $\mu$  گفته می‌شود. توجه شود که  $\mu$  یک خاصیت از سیال نیست، بلکه یک خاصیت از جریان است، یعنی توسط نوع سیال و خواص میدان جریان (نظری هندسه میدان جریان و توزیع سرعت میدان جریان) تعیین می‌شود. بنابراین مقدار  $\mu$  هیچگاه در جداول مهندسی ارائه نشده است بلکه بسته به نوع جریان و در نقاط مختلف یک میدان جریان خاص، میتواند مقادیر مختلفی داشته باشد. در اعداد رینولدز بالا، در تمام یا بخش عمده‌ای از جریان (بالاخص نواحی دور از دیواره)،  $\mu > \mu_t$  می‌باشد. در ادامه جزوی روش‌های مختلفی برای تعیین مقدار  $\mu_t$  ارائه شده است.

استفاده از یک تئوری نیمه تجربی برای به دست آوردن ویسکوزیتة اصلاح شده  $\mu_{\text{mod.}}$ :

پرانتل<sup>۷۷</sup> در سال ۱۹۲۵ پیشنهاد کرد که می توان به یک جریان آشفته، به صورت "انتقال اتفاقی و دسته ای از ذرات در طول یک طول مقیاس اختلاطی"<sup>۷۸</sup>  $l_m$  نگریست (این طول مقیاس اختلاطی معیاری از اندازه ادی می باشد). وی با استفاده از فرضیات ریاضی و مشاهدات آزمایشگاهی فرض نمود که در داخل لایه مرزی، اندازه نوسانات سرعت در راستای  $x$  و  $y$  میدان سرعت را می توان به گرادیان

سرعت میدان جریان در راستای عمود بر راستای صفحه مرتبط دانست:

$$u' \sim l_x \frac{\partial u}{\partial y}, v' \sim l_y \frac{\partial u}{\partial y} \quad (36-3)$$

که در آن،  $l_x, l_y$  اندازه های فرضی برای ادیهای آشفته می باشند. در اینصورت با ضرب نمودن دو اندازه مذبور در یکدیگر و متوسط گیری از نتیجه خواهیم دید که:

$$-\overline{u'v'} = l_m^2 \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (37-3)$$

که در آن طول اختلاطی  $l_m$  برابر است با:

$$l_m = \sqrt{l_x l_y} \quad (38-3)$$

در این بین ثوابت نسبت<sup>۷۹</sup> حذف شده اند. توجه شود که طول مقیاس اختلاطی  $l_m$  معیاری از اندازه متوسط ادیهای جریان آشفته می باشد. از سوی دیگر از آنجا که به دنبال رابطه ای به شکل زیر هستیم:

$$-\rho \overline{u'v'} = \mu_t \frac{\partial u}{\partial y} \quad (39-3)$$

رابطه ای ساده که در آن اندازه تنش برشی غالب در جریانات لایه مرزی آشفته ( یا  $\overline{u'v'} -$  ) را به گرادیان سرعت دائم در راستای عمود بر جریان لایه مرزی صفحه ای مرتبط می نماید. لذا با مقایسه نتایج به دست آمده می توان نشان داد که:

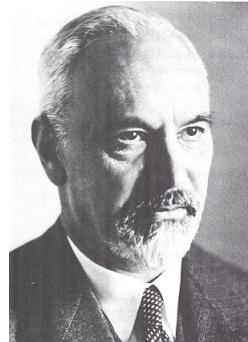
$$\nu_t = l_m^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \quad (40-3)$$

<sup>۷۷</sup> Parndtl

<sup>۷۸</sup> Mixing Length Scale

<sup>۷۹</sup> Proportionality Coefficients

$l_m$  را می‌توان بعنوان "فاصله آزاد متوسط"<sup>۸۰</sup> برای تصادمهای بین ذرات در گازها و یا M.F.P. برای اختلاط گلولهای سیال آشفته در نظر گرفت.



شکل (۳): لودویگ پرانتل (۱۸۷۵-۱۹۵۳)

از نقطه نظر دیگر نیز می‌توان به رابطه  $v_t = l_m^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|$  دست یافت: از آنجا که  $v_t$  دارای بعد

{سرعت}  $\times$  {طول} می‌باشد، پیشنهاد می‌شود که این کمیت به صورت زیر تقریب زده شود:

$$v_t = u_0 \times l_m \quad (41-3)$$

که در آن،  $l_m$  اندازه مرسوم برای ادی آشفته بوده و  $u_0$  یک سرعت مقیاس آشфтگی می‌باشد.

در فرضیه طول اختلاطی فرض می‌شود که  $u_0 = l_m \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)$  می‌باشد. به هر حال نیازمند آن هستیم که

مقادیر  $l_m$  و  $u_0$  را به نحوی تعیین نمائیم. اما تجربه نشان داده است که طول مقیاس اختلاط را میتوان تابعی از "فاصله از دیواره" در نظر گرفت. زیرا در نواحی نزدیک دیواره، به واسطه محدود شدن رشد ادیها توسط دیواره، طول مقیاس اختلاط کوچک می‌گردد؛ به همین دلیل در نواحی دور از دیواره نیز انتظار داریم که اندازه ادیها و نیز طول مقیاس اختلاط بزرگتر باشد. حال چنانچه اندازه نوسانات آشفتگی سرعت را به ترتیب با

$$R \equiv \frac{-\overline{u'v'}}{\sqrt{\overline{u'^2}} \sqrt{\overline{v'^2}}} \quad \text{و} \quad \sqrt{\overline{u'^2}} \quad \text{نمایش داده و رابطه بین آنها و اندازه تنش برشی آشفته را به صورت}$$

تعريف نمائیم، اندازه گیریهای تجربی نشان داده اند که مقدار  $R$  بین ۰/۴۵ و ۰/۵۵ تغییر می‌نماید. پرانتل

فرض نمود که  $R=1$  می‌باشد. بنابراین بر طبق تعريف  $R$  خواهیم دید که:

$$-\rho \overline{u'v'} = \rho \sqrt{\overline{u'^2}} \sqrt{\overline{v'^2}} \quad (42-3)$$

<sup>۸۰</sup> Mean Free Path

او همچنین فرض نمود که آشفتگی جریان ایزوتrop می باشد ( یعنی اندازه آن – یا اندازه ادیها - در جهات  $x$  و  $y$  برابر می باشد ). او همچنین جذر متوسط مربعات نوسانات آشفتگی را به عنوان سرعت مقیاس  $u_*$  در نظر گرفت. بنابراین:

$$\sqrt{u'^2} = \sqrt{v'^2} = u_* \quad (43-3)$$

و یا آنکه:

$$-\rho \overline{u'v'} = \rho u_*^2 \quad (44-3)$$

از آنجا که در یک جریان برشی ساده<sup>۱۱</sup>  $\tau_{xy} = -\rho \overline{u'v'} = \mu_t \frac{\partial u}{\partial y}$  می باشد، و با این فرض که

$V_t = u_* \times l_m$  می باشد، لذا مدل پرانتل اظهار می دارد که:

$$V_t = l_m^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \quad (45-3)$$

بنابراین می توان با استفاده از رابطه فوق، اندازه ویسکوزیته سینماتیک آشفته را به طول مقیاس اختلاط  $l_m$  و گرادیان سرعت متوسط مرتبط نمود. مطالعات تجربی بعدی پرانتل نشان داد که  $l_m$  حتی درون یک جریان مجزا دارای مقدار ثابتی نمی باشد و مقدار آن وابسته به فاصله از دیواره و پارامترهای دیگر می باشد. در بخش بعدی می توان چگونگی تعیین اندازه  $l_m$  را برای جریانات مختلف و در قسمتهای مختلف هر جریان مشاهده نمود. اگرچه می توان روابط کاملتری را در کتابهای مرتبط با جریانات آشفته بیابیم. پیش از ادامه مبحث،

مجدداً یادآوری می کنیم که استفاده از روش پرانتل و روابطی نظیر  $V_t = l_m^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|$  تنها محدود به جریانات

برشی ساده نظیر لایه های مرزی، جریانات جت برشی و کلاً هر جریانی که در آن توزیع سرعت  $u$  در هر مقطع تنها تابعی از  $y$  می باشد. لذا هر چه انحراف جریانات دیگر از این شرط بیشتر باشد، استفاده از رابطه

$$V_t = l_m^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \quad \text{با خطای بیشتری مواجه خواهد بود.}$$

---

<sup>۱۱</sup> Simple Shear Flows

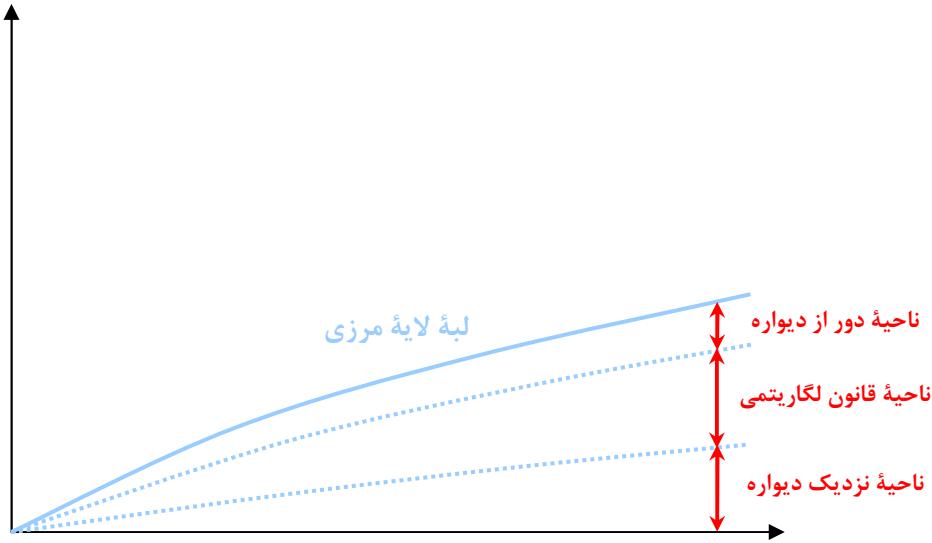
## تعیین اندازه طول اختلاطی $l_m$ در نواحی مختلف یک لایه مرزی:

چنانچه یک میدان جریان تشکیل شده بر روی یک صفحه را به سه ناحیه مختلف ذیل تقسیم نمائیم:

۱) ناحیه نزدیک دیواره یا Near-Wall Region

۲) ناحیه قانون لگاریتمی یا Log-Law Region

۳) ناحیه دور از دیواره یا Outer Layer



شکل (۴): پروفیل سرعت در جریان آشفته و لایه های مختلف موجود در آن

روابط مختلفی برای توزیع  $l_m$  در این نواحی ارائه شده است:

### الف) اندازه طول اختلاطی $l_m$ برای ناحیه قانون لگاریتمی یا Log-Law Region

از آنجا که مجدداً به دنبال رابطه ای به شکل  $\rho \overline{u'v'} = \mu_t \frac{\partial u}{\partial y}$  می باشیم و از طرفی در ناحیه دارای

قانون لگاریتمی، بعداً نشان خواهیم داد که شکل پروفیل سرعت به صورت

$$u^* = \sqrt{\frac{\tau_{Wall}}{\rho}} \quad \text{میباشد که در آن}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u^*}{ky} \quad (46-3)$$

در نتیجه:

$$-\rho \overline{u'v'} = \mu_t \frac{u^*}{ky} = \rho u^{*2} \Rightarrow \mu_t = \rho k u^* y \Rightarrow v_t = k u^* y \quad (47-3)$$

با حذف  $u^*$  از داخل دو معادله فوق خواهیم دید که:

$$\nu_t = (ky)^2 \frac{\partial u}{\partial y} \quad (48-3)$$

با مقایسه رابطه (48-3) با  $\nu_t = l_m^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|$  می توان اینطور استنتاج نمود که در داخل ناحیه

لگاریتمی،  $l_m = ky$  میباشد. به عبارت دیگر، اندازه طول اختلاطی متناسب با فاصله از دیواره است که در آن  $k = 0.41$  بوده و ثابت فن کارمن نامیده می شود.  $y$  در اینجا فاصله از نزدیکترین دیواره است. رابطه به دست آمده برای  $l_m$  رابطه دقیقی برای نواحی نزدیک دیواره محسوب نمی شود، به عنوان مثال در حالتی که صفحه ای درون یک سیال بی نهایت شروع به ارتعاش می نماید، دامنه نوسان سیال به صورت نمائی تغییر می نماید. لذا ون دریست<sup>۸۲</sup> یک تابع نمائی برای  $l_m$  پیشنهاد نمود.

### ب) اندازه طول اختلاطی $l_m$ برای ناحیه نزدیک دیواره یا Near-Wall Region

در نزدیکی سطح جامد، به واسطه طبیعت آرام بودن جریان،  $l_m$  بایستی سریعتر از  $y$  به سمت صفر برود.

لذا بایستی از یک ضریب تصحیح کننده با نام " ضریب میرائی ون دریست " استفاده گردد:

$$l_m = ky \left[ 1 - \exp \left( -\frac{y^+}{A} \right) \right]_{A=24, \dots, 26} \quad (49-3)$$

با توجه به رابطه تصحیح موجود در رابطه (49-3) ( یا همان ترم تصحیح کننده

می توان با استفاده از بسط ریاضی بخش مربوط به عبارت تصحیح شده نشان داد که هر گاه  $y \rightarrow 0$  برود، در اینصورت  $y^2 \propto l_m$  می شود. ضریب تصحیح کننده  $l_m$  بایستی همواره طوری انتخاب گردد که وقتی  $y \rightarrow 0$  برود،  $l_m$  سریعتر از  $y$  به سمت صفر میل نماید، یعنی اینکه  $y^n \propto l_m$ ، به طوریکه  $n > 1$  باشد.

### ج) اندازه طول اختلاطی $l_m$ برای جریانات برشی آزاد و جریانات محصور:

چنانچه جریانات را به دو دسته کلی " جریانات برشی آزاد<sup>۸۳</sup>" و " جریانات محصور<sup>۸۴</sup>" تقسیم نمائیم، در

<sup>۸۲</sup> Van Driest

<sup>۸۳</sup> Free Shear Flows

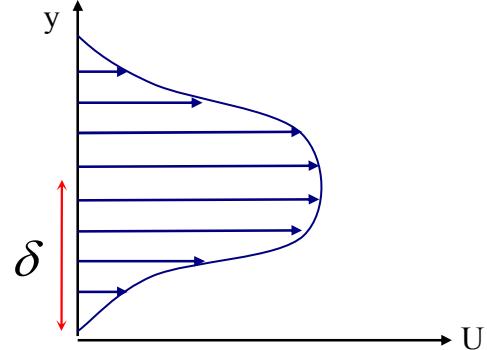
<sup>۸۴</sup> Wall Bounded Flows

اینصورت طول مقیاس اختلاط  $l_m$  با استفاده از روابط ذیل به دست می آیند:

### ج-۱) جریانات برشی آزاد:

در این حالت  $l_m$  ثابت و متناسب با عرض لایه برشی  $\delta$  است. Rodi پیشنهاد نمود که:

$$\frac{l_m}{\delta} = \begin{cases} 0.07 & \text{For Mixing Layer} \\ 0.09 & \text{For Plane Jet} \\ 0.075 & \text{For Round Jet} \\ 0.16 & \text{For Plane Wake} \end{cases}$$



شکل (۵): پروفیل سرعت در یک جریان برشی آزاد نمونه

### ج-۲) جریانات محصور:

طول اختلاطی  $l_m$  (معیاری از اندازه ادی) ، در فواصل دور از دیواره نمی تواند به طور بی حد و حصر

رشد نمایند، چراکه همواره اندازه ادیهای آشفتگی (جزء در اعداد رینولدز خیلی بزرگ که ادیها در داخل

لایه مرزی کشیده میشوند) از ضخامت لایه مرزی کوچکتر می باشند. لذا کاری که در اینجا عملاً صورت

می پذیرد آن است که یک حد فوقانی برای جلوگیری از رشد بی حد و حصر ادیها تعیین می گردد که

این حد فوقانی کسری از ضخامت لایه مرزی  $\delta$  می باشد.  $l_m$  متناسب با فاصله از دیواره،  $y$ ، و نیز بخشی

از ضخامت لایه مرزی است. Smith و Cebeci پیشنهاد نموده اند که:

$$l_m = \text{Min}(ky, 0.09\delta) \quad (50-3)$$

که ثابت  $k$  ثابت فن کارمن و برابر  $41/40$  می باشد. این رابطه برای ناحیه دور از دیواره یا Outer Layer

مربوط به یک لایه مرزی نیز صادق است.

به طور کلی مدل طول اختلاطی برای جریانات برشی تعادلی یا جریانات نزدیک به حالت تعادل خوب

جواب می دهد ولی در جریانات پیچیده این مدل مشکلات عمدی دارد. مشکل اصلی مدل نیمه تجربی

طول اختلاطی ارائه شده برای تعیین ویسکوزیتیه اصلاح شده  $\mu_{\text{mod}}$  یا ویسکوزیتیه آشفته  $\mu$  این است

که در نواحی از میدان جریان که به واسطه شکل خاصی از پروفیل سرعت،  $0 \frac{d\bar{u}}{dy} = 0$  می شود،

ویسکوزیتۀ اصلاح شدۀ  $\mu_{mod}$  یا ویسکوزیتۀ آشفته  $\mu$  صفر خواهند شد که به معنای آرام بودن جریان

در آن نقطه ( البته از دید این تئوری ) می باشد که این ادعای غیر جامع و بعض‌اً غلطی می باشد.

#### ۴- ترکیب تنش برشی منتجه از میدان سرعت متوسط با مولفه های مربوط به آشفتگی:

$$\tau = \tau_{Lam.} + \tau_{Turb.} = \mu \frac{d\bar{u}}{dy} - \rho \bar{u}' \bar{v}' \quad (60-3)$$

به ترمهای مثل  $\rho \bar{u}' \bar{v}'$  اصطلاحاً تنش رینولدز اطلاق می شود، این تنشها را می توان عامل انتقال ممتدوم توسط آشفتگی جریان نام برد. همانطور که از رابطه فوق هویداست، تنشهای رینولدز باعث بالا رفتن اندازه تنش برشی و به وجود آمدن برش اضافی در جریان می شوند. در یک جریان آرام، از آنجا که مقادیر نوسانی میدان سرعت نظیر  $\bar{u}' \bar{v}'$  صفر می باشند، لذا اندازه تنشهای رینولدز در جریانات آرام صفر شده و این امر باعث می شود که رابطه ارائه شده، هم برای جریانات آرام و هم برای جریانات آشفته قابل استفاده باشند. از آنجا که مقدار کمیت  $\rho \bar{u}' \bar{v}'$  در یک جریان آشفته همواره مثبت می باشد، بنابراین در یک جریان آشفتگی، اندازه تنش برشی و بالتبع آن پسای برشی و افت فشار ناشی از آن بسیار بزرگتر از جریانات آرام می باشد.

## فصل چهارم:

### بررسی جریانهای نزدیک دیواره و

### مفهوم توابع دیوار

هدف از مباحث ارائه شده در این بخش، مروری بر پروفیلهای تحلیلی جریان در نزدیکی دیواره می باشد. در مدلسازی های جریانات آشفته به کرات مشاهده شده است که از مفهومی با نام تابع دیواره<sup>۸۵</sup> استفاده شده است. توابع دیواره در حقیقت پروفیلهای تحلیلی جریان در لایه مرزی مجاور دیواره هستند که با استفاده از روش‌های تحلیلی و از حل صریح معادلات جریان در نزدیکی دیواره (پس از اعمال برخی فرضیات ساده کننده بر روی معادلات حاکم بر لایه مرزی مجاور دیواره) به دست آمده اند، و از آنجا که به صورت تحلیلی به دست آمده اند، دیگر خطاهای موجود در روش‌های عددی (که ذات تمام روش‌های عددی و روش‌های گسسته سازی میدان جریان هستند) در پروفیلهای توابع دیواره به چشم نمی خورند. بنابراین مزیت استفاده از توابع دیواره را می توان به صورت ذیل دسته بندی نمود:

- ۱ کاهش حجم محاسبات به واسطه عدم نیاز به شبکه بندی در نواحی نزدیک دیواره
- ۲ افزایش دقت محاسبات (برای مسائل نه چندان پیچیده)

البته بایستی توجه داشت که در به دست آوردن توابع دیواره، معمولاً از فرضیات ساده کننده ای استفاده میشود که کاربرد این توابع را محدود به مسائل دارای هندسه ساده و جریانات نسبتاً ساده نموده است. اگرچه تلاشهای زیادی در جهت تعمیم این توابع و بالا بردن توانائی آنها جهت مدل کردن پدیده های پیچیده ای مانند جدایش جریان در گرادیان فشار معکوس<sup>۸۶</sup>، اندرکنش شوک و لایه مرزی<sup>۸۷</sup>، اتصال مجدد جریان<sup>۸۸</sup>، تزریق یا مکش جریان از طریق دیواره<sup>۸۹</sup> و غیره صورت گرفته است، لیکن هنوز مسیری طولانی در جهت بالا بردن دقت و عمومیت این پروفیلهای تحلیلی وجود دارد، به طوریکه هنوز در بسیاری از مسائل پیچیده مهندسی لاجرم مجبور به شبکه بندی نواحی نزدیک دیواره و حل نمودن معادلات RANS درست تا لب دیواره می باشیم. نکته جالب در استفاده از توابع دیواره آن است که چنانچه شخص بخواهد از توابع دیواره در نزدیکی دیواره استفاده نماید، حتماً بایستی توجه داشته باشد که از شبکه بندی و گسسته سازی میدان جریان در نواحی نزدیک دیواره (نواحی ای که تابع دیواره مورد نظر برای آن نواحی معتبر می باشد) اکیداً خودداری نماید، در غیر اینصورت به واسطه تداخل مفهومی میدان سرعت به دست آمده از توابع دیواره

<sup>۸۵</sup> Wall Function

<sup>۸۶</sup> Flow Separation in Adverse Pressure Gradient

<sup>۸۷</sup> Shock-Boundary Layer Interaction

<sup>۸۸</sup> Reattachment

<sup>۸۹</sup> Flow Transpiration

و میدان سرعت محاسبه شده از گسسته سازی میدان جریان در نواحی نزدیک دیواره، نتیجه گیری به دست آمده از مساله بعضاً غلط و غیر قابل توجیه می گردد.

آزمایشات بی شماری نشان داده اند که ناحیه نزدیک دیواره را می توان به  $3$  لایه مجرما تقسیم نمود. در داخلی ترین لایه، که اصطلاحاً زیرلایه لزج<sup>۹۰</sup> نامیده می شود، جریان اغلب شبیه جریان آرام می باشد، یعنی در این ناحیه، دیفیوژن مولکولی<sup>۹۱</sup> نقش غالب را در انتقال ممنتوم و انتقال حرارت بر عهده دارد. خارجی ترین لایه که اصطلاحاً لایه تمام آشفته<sup>۹۲</sup> نامیده می شود، ادی ها نقش غالب را در انتقال ممنتوم و حرارت بر عهده دارند. در بین این دو ناحیه، ناحیه ای به نام لایه گذرا، یا میانی یا لایه محافظ<sup>۹۳</sup> وجود دارد که دیفیوژن مولکولی و ادیها از اهمیت یکسان برخوردار می باشند. چنانچه کمیتهای بدون بعد  $u^+$  و  $y^+$  به صورت زیر تعریف گردند:

$$u^+ = \frac{u}{u^*} \quad (1-4)$$

$$\text{Where } u^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (2-4)$$

$$y^+ = \frac{\rho u^* y}{\mu} \quad (3-4)$$

در تعریف فوق،  $u^*$  یک سرعت مشخصه برای جریان آشفته و  $u^+$  سرعت مشخصه بی بعد برای جریان آشفته می باشد. همانطور که از تعریف  $u^*$  مشهود است، از سوی دیگر همانطور که دیده می شود کمیت  $y^+$  چیزی از جنس عدد رینولدز می باشد.

همانطور که در جریان روی صفحات تخت، با استفاده از عدد رینولدز سه محدوده جریان آرام، گذرا و آشفته تعیین می گردد، در جریانات آشفته و در راستای عمود بر دیواره نیز با استفاده از  $y^+$  سه محدوده جریانی به صورت زیرلایه لزج، ناحیه گذرا و ناحیه تمام آشفته تعریف می گردد:

الف- ناحیه زیرلایه لزج یا ناحیه مجاور دیواره با جریانی کاملاً آرام

ب- ناحیه میانی یا ناحیه ترکیبی با جریانی در حالت گذرا

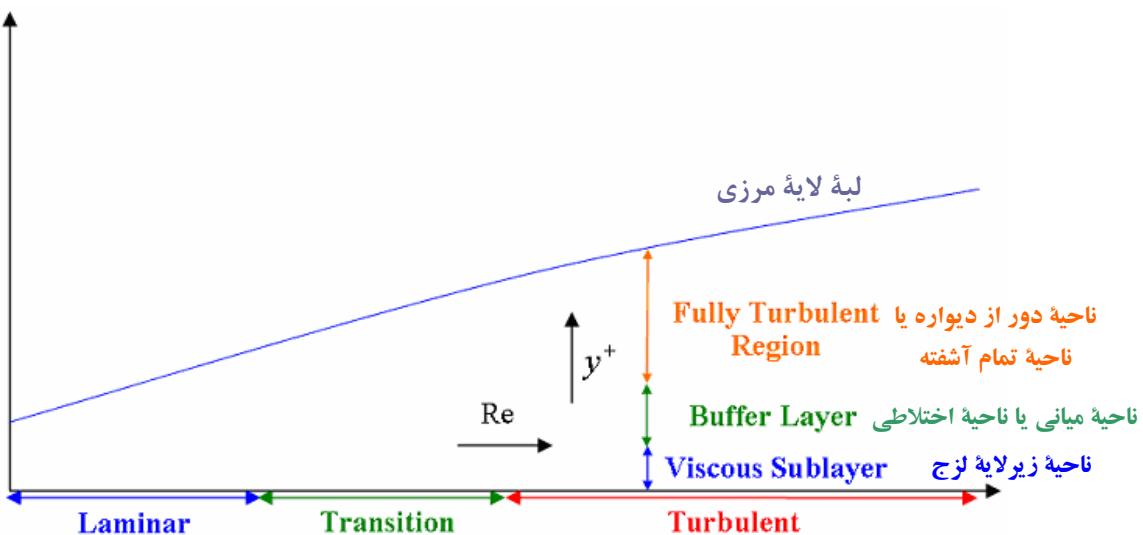
ج- ناحیه دور از دیواره یا ناحیه قانون لگاریتمی با جریان تماماً آشفته

<sup>۹۰</sup> Viscous Sublayer

<sup>۹۱</sup> Molecular Diffusion

<sup>۹۲</sup> Fully Turbulent Layer

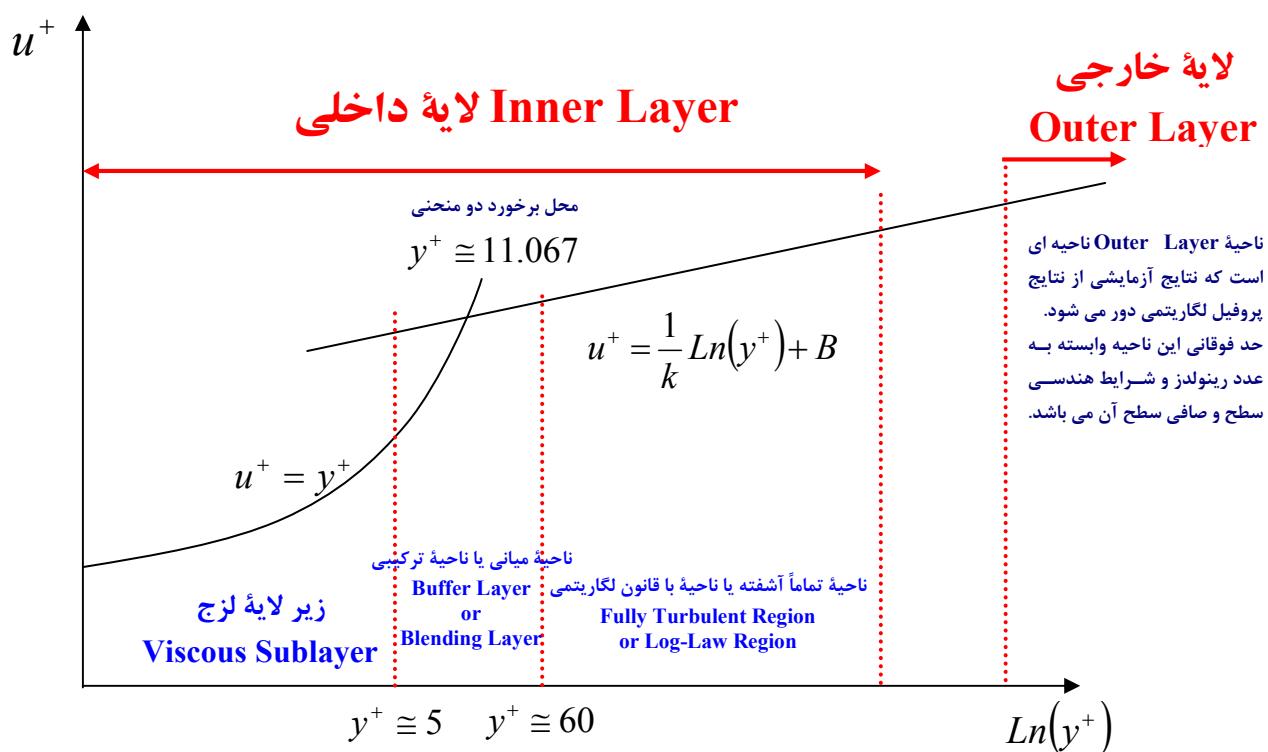
<sup>۹۳</sup> Buffer Layer



شکل (۱): پروفیل سرعت در یک جریان آشفته و لایه های مختلف جریان مجاور دیواره

پروفیل سرعت در لایه های مختلف یک جریان آشفته و در راستای عمود بر دیواره به صورت زیر نشان داده

می شود. مقادیر و روابط ارائه شده در ذیل بعداً به تفضیل مورد بررسی قرار خواهد گرفت:



شکل (۲): لایه های مجاور دیواره در یک جریان آشفته

در مورد منحنی نشان داده شده فوق، چند نکته وجود دارد که بایستی به آنها اشاره نمود:

اولاً حدودی که برای جریانات زیر لایه لزج یا جریان گذرا بر حسب  $y^+$  بیان شده است (اعداد ۵ یا ۶۰

نشان داده شده بر روی منحنی)، صرفاً برای شرایط خاصی از آزمایش و برای یک صفحه تخت با سطح

یکنواخت می باشند. همین وضعیت قبلًا برای عدد رینولدز صفحه تخت نیز اشاره شده بود. به عنوان مثال،

مرسوم است که برای یک صفحه تخت جریانات دارای عدد رینولدز فراتر از ۵۰۰۰۰ جریانات آشفته محسوب می شوند، لیکن این گفته تنها برای شرایط خاصی از صفحه و شرایط آزمایشگاهی صادق می باشد، به عبارت دیگر عدد ۵۰۰۰۰ اشاره شده، برای یک صفحه تخت دارای صافی سطح مشخصی بوده که جریانی با میزان آشفتگی آزاد<sup>۹۴</sup> مشخصی بر روی آن جریان دارد. چنانچه صافی سطح این صفحه با استفاده از صیقل کاری افزایش یابد، و یا آنکه جریانی با میزان آشفتگی آزاد حمل شده کمتری بر روی صفحه جریان یابد، عدد ۵۰۰۰۰ مورد نظر به اعداد بالاتر منتقل می گردد، یعنی لایه مرزی تشکیل شده بر روی صفحه مورد نظر دیرتر و در فواصل طولانیتر نسبت به ابتدای صفحه به حالت آشفته می رسد. بالعکس چنانچه سطح صفحه زبرتر گردد و یا آنکه میزان اغتشاشات موجود در جریان آزاد افزایش یابد، ممکن است جریان در اعداد رینولدز خیلی پائین هم به حالت جریان آشفته برسد. همین مطلب برای محدوده های ذکر شده برای نواحی زیرلایه لزج و یا ناحیه لگاریتمی و غیره نیز صادق است.

ثانیاً تجربه نشان داده است که ناحیه قانون لگاریتمی معمولاً تا  $y^+ = 500$  ادامه پیدا می کند.

$$u^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} = u^* \text{ اصطلاحاً سرعت اصطکاکی گفته می شود. هر چند در عمل هیچ تعبیر فیزیکی برای کمیت}$$

این کمیت نمی توان یافت، لیکن این کمیت که دارای بعد سرعت بوده و کمیتی بسیار مناسب برای بی بعد سازی معادلات در فضای جریانات آشفته می باشد.

چنانچه به خاطر داشته باشید، پیش از این عدد رینولدز در راستای جریان را به صورت نسبت نیروهای اینرسی به نیروهای لزجت تفسیر نمودیم. برای راستای عمود بر جریان ( عمود بر صفحه ) نیز می توان عدد

$$\text{رینولدزی به صورت } Re_y = \frac{\rho U_\infty y}{\mu} \text{ تعریف می نمائیم. با استفاده از این تعریف، ناحیه زیرلایه لزج}$$

معادل  $Re_y \approx 1$  است. به عبارت دیگر در ناحیه زیرلایه لزج، به علت قدرت قابل توجه نیروهای لزجت، اغتشاشات جریانی همگی میرا می شوند و بالتبع آن جریان در این ناحیه کاملاً آرام می باشد. در این ناحیه است که ترمehای نوسانی سرعت به عنوان مولفه های اغتشاشی، یعنی  $u', v', w'$  همگی به سمت صفر میل

می کنند و لذا ترمehای تنشهای رینولدز نظیر  $\overline{u'v'}$  ( به عنوان عامل آشفته کننده جریان ) به سمت صفر

<sup>۹۴</sup> Free Stream Disturbance

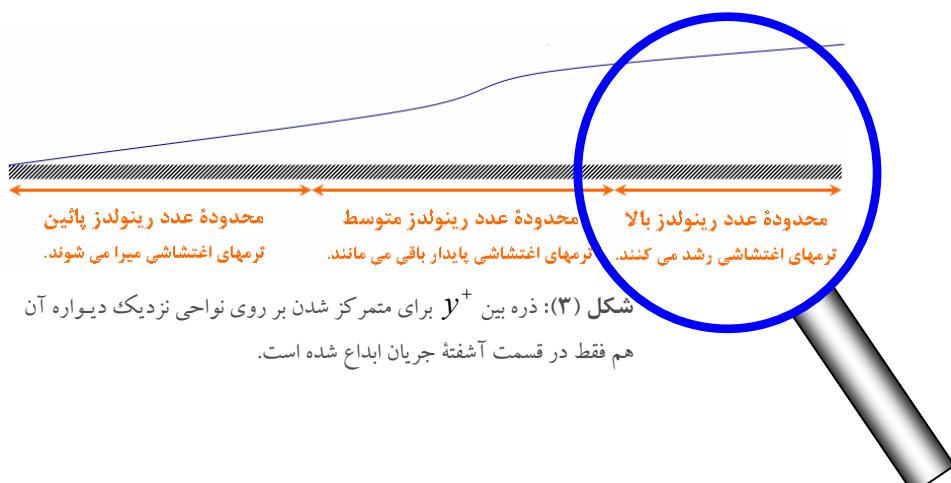
میل می نمایند. تنشهای رینولز شناسنامه جریانات آشفته محسوب می شوند و بدون حضور آنها جریانی به نام جریان آشفته وجود نداشته و جریانی تماماً آرام خواهیم داشت.

از همین تعبیری که برای عدد رینولز استفاده شد می توان برای  $y^+ = \frac{\rho u^* y}{\mu}$  استفاده نمود، یعنی عدد

بدون بعد  $y^+$  را به صورت نسبت نیروهای اینرسی و آشفتگی بیان می نمائیم:

$$y^+ = \frac{\rho u^* y}{\mu} = \frac{\rho u^{*2}}{\mu u^* / y} = \frac{\text{Inertial Force in Turbulent Flow}}{\text{Viscous Force in Turbulent Flow}} \quad (5-4)$$

بنابراین در راستای عمود بر صفحه (جریان) هر جا که عدد بدون بعد  $y^+$  در نزدیکی دیواره کوچک باشد، نیروهای لزجت در مقایسه با نیروهای اینرسی بزرگتر بوده و اغتشاشات احتمالی در ناحیه مزبور میرا خواهند شد. با فاصله گرفتن از دیواره و افزایش عدد بدون بعد  $y^+$ ، قدرت نیروهای لزجت برای میرا نمودن اغتشاشات احتمالی موجود در جریان تضعیف شده و برخی از اغتشاشات فرصت رشد را خواهند یافت. با دورتر شدن هر چه بیشتر از دیواره تعداد بیشتری از اغتشاشات رشد خواهند کرد تا جائیکه در نواحی به اندازه کافی دور از دیواره به جریانی سرشار از اغتشاشات رشد کرده و یا به عبارت بهتر جریان آشفته خواهیم رسید. البته بایستی این نکته را خاطر نشان نمود که استفاده از عدد بدون بعد  $y^+$  برای بررسی جریانات مجاور دیواره در نواحی ای از میدان جریان است که به صورت تئوریک و در طول صفحه به جریان آشفته رسیده ایم. و گرنه برای نواحی ابتدائی صفحه که جریان هنوز آرام می باشد، استفاده از این تفسیر مناسب به نظر نمی رسد. در شکل زیر نشان داده شده است که برای جریان بر روی یک صفحه تخت، استفاده از کمیت بدون بعد  $y^+$  تنها برای متمرکز شدن بر روی رفتار جریان نزدیک دیواره در ناحیه آشفته جریان می باشد.



## توابع دیواره و نحوه به دست آوردن آنها:

توابع دیواره مجموعه‌ای از پروفیلهای نیمه تجربی<sup>۹۵</sup> می‌باشند و در اصل پلی هستند که مقادیر متغیرهای فیزیکی المانهای عددی نزدیک دیواره را به مقادیر نظیر بر روی دیواره مرتبط می‌سازند.

توابع دیواره متشکل از:

- ۱ پروفیلهایی برای سرعت متوسط و دما و نیز سایر کمیتهای اسکالر در نزدیکی دیواره
- ۲ فرمولهایی برای کمیتهای آشفته در نزدیکی دیواره می‌باشند.

به عنوان نمونه با استفاده از معادله X-Momentum در جریان آشفته، رابطه‌ای را برای پروفیل سرعت روی دیواره تخت بدون تزریق یا مکش جریان به دست خواهیم آورد. معادله ممنتوم در راستای X برای یک جریان آشفته دو بعدی را می‌توان به طور کلی به صورت زیر بیان نمود:

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial y} (\bar{u}' \bar{v}') \quad (6-4)$$

$$\Rightarrow \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \rho \bar{u}' \bar{v}' \right)$$

Since we Assume that :  $-\bar{u}' \bar{v}' = \nu, \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$

$$\Rightarrow \text{After Substitution : } \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left[ (\nu + \nu') \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right]$$

از معادله حاصله برای حالت  $\frac{dP}{dx} = 0$  یا حالت جریان بر روی صفحه تخت انتگرال می‌گیریم. از آنجا که در

اینجا فرض را بر مبنای معادلات جریان اصلاح شده برای یک صفحه تخت قرار داده ایم، لذا از پروفیل به دست آمده یا تابع دیواره حاصله تنها برای صفحات تخت و یا صفحات دارای شعاع انحنای بزرگ می‌توان استفاده نمود. از سوی دیگر از آنجا که اساس محاسبه پروفیلها بر مبنای معادله ممنتوم برای یک جریان دو بعدی نهاده شده است، اعتبار این پروفیل تنها برای جریانات دو بعدی قابل قبول است و هر چه به سمت جریانات سه بعدی پیش برویم، از اعتبار پروفیلهای حاصله به عنوان توابع دیواره کاسته خواهد شد.

برای نواحی نزدیک دیواره می‌توان فرض نمود که علاوه بر مقادیر سرعت متوسط جریان، ترمehای اغتشاشی سرعت نیز دارای مقادیر نزدیک صفر می‌باشند،  $\bar{u} \approx 0$ . بنابراین اعتبار پروفیل حاصله باز هم محدود و

<sup>۹۵</sup> Semi Empirical

منحصر به جریانات بسیار نزدیک به دیواره می شود و هر چه از دیواره دورتر می شویم اعتبار پروفیل حاصله کمتر و کمتر خواهد شد.

$$0 + 0 = 0 + \frac{\partial}{\partial y} \left[ (\nu + \nu_t) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right]$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\tau}{\rho} \right) = 0 \quad (7-4)$$

بر طبق رابطه (7-4) تغییرات تنش در مجاورت دیواره صفر می باشد، به عبارت دیگر تنش در نواحی نزدیک دیواره برابر تنش روی دیواره می باشد.

$$\text{Near the Wall: } \tau = \tau_{wall} = \rho(\nu + \nu_t) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (8-4)$$

البته این گفته تنها برای نواحی بسیار نزدیک به دیواره (جاییکه مقادیر متوسط و اغتشاشی سرعت در راستای x و y برابر صفر می باشند)، صادق می باشد.

$$\frac{\tau_w}{\rho} = (\nu + \nu_t) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \text{Cons. Very Close to the Wall} \quad (9-4)$$

با استفاده از تعریف اعداد بدون بعد  $y^+ = \frac{\rho u^* y}{\mu}$ ,  $x^+ = \frac{\rho u^* x}{\mu}$ ,  $v^+ = \frac{v}{u^*}$ ,  $u^+ = \frac{u}{u^*}$  و دانستن اینکه

$$u^* = \left( \frac{\tau_w}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (7-4)$$

$$\left( 1 + \frac{\nu_t}{\nu} \right) \frac{du^+}{dy^+} = 1 \quad (10-4)$$

رابطه (10-4) رابطه اساسی بیان کننده پروفیل سرعت در نزدیک دیواره و تشکیل شده بر روی سطوح صاف می باشد. حال این رابطه را برای دو ناحیه حدی، یعنی ناحیه زیرلایه لزج Viscous Sublayer و ناحیه تمام آشفته Fully Turbulent Region مورد مطالعه قرار می دهیم:

**الف) زیر لایه لزج که در آن  $V_t$  می باشد:**

همانطور که پیش از این اشاره شد، برای ناحیه نزدیک دیواره، جریان کاملاً آرام بوده و لذا نقش آشفتگی جریان تقریباً از بین رفته است. لذا در این ناحیه لزجت سینماتیکی آشفتگی در مقایسه با لزجت سینماتیکی

جریان آرام قابل صرفنظر کردن است. به عبارت دیگر  $V_t << V$ ، لذا  $\frac{V_t}{V} \ll 1$  می باشد و رابطه (۱۰-۴)

به صورت زیر در می آید:

$$(11-4) \quad (1+0) \frac{du^+}{dy^+} = 1 \Rightarrow \frac{du^+}{dy^+} = 1$$

$$(12-4) \quad u^+ = y^+$$

بنابراین در زیرلایه لزج نظیر جریانات لایه مرزی تشکیل شده بر روی صفحات تخت، پروفیل سرعت و یاتابع دیواره سرعتی به صورت  $u^+ = y^+$  در می آید. به علت خطی بودن پروفیل سرعت در این ناحیه، تنش برشی در این ناحیه برابر تنش روی دیواره می باشد.

**ب) ناحیه تمام آشفته که در آن  $V_t >> V$  می باشد:**

در این ناحیه، از آنجا که آشفتگی، فیزیک غالب جریان محسوب می شود، لذا  $V_t >> V$  می باشد، رابطه

(۱۰-۴) به صورت زیر در می آید:

$$(13-4) \quad \frac{V_t}{V} \frac{du^+}{dy^+} = 1 \Rightarrow \frac{du^+}{dy^+} = \frac{V_t}{V}$$

با استفاده از رابطه طول اختلاطی پرانتل، یعنی  $\mu_t = \rho l_m^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$ ،  $l_m = ky$  می توان اینطور بیان کرد که:

$$\frac{V_t}{V} = k^2 y^{+2} \left| \frac{\partial u^+}{\partial y^+} \right|$$

رابطه (۱۳-۴) را می توان به صورت زیر بیان نمود:

$$(14-4) \quad k^2 y^{+2} \left| \frac{\partial u^+}{\partial y^+} \right|^2 = 1 \Rightarrow k y^+ \frac{du^+}{dy^+} = 1$$

از معادله (۱۴-۴) از ناحیه زیرلایه لزج (با اندیس<sup>۹۶</sup> VSL) تا هر<sup>+</sup>  $y$  دلخواه در ناحیه تمام آشفته انتگرال می‌گیریم:

$$u^+ = \frac{1}{k} \ln(y^+) + y_{VSL}^+ - \frac{1}{k} \ln(y_{VSL}^+) \quad (15-4)$$

بنابراین معادله (۱۴-۴) در حالت کلی به صورت زیر در می‌آید:

$$u^+ = \frac{1}{k} \ln(y^+) + B = \frac{1}{k} \ln(Ey^+) \quad (16-4)$$

بنابراین پروفیل سرعت یاتابع دیواره در ناحیه تمام آشفته به صورت رابطه (۱۶-۴) در آمد. به این ناحیه اصطلاحاً ناحیه دارای قانون لگاریتمی گفته می‌شود. اندازه گیری‌های تجربی نشان داده اند که قانون

لگاریتمی در ناحیه  $0.2 < \frac{y}{\delta} < 0.02$  معتبر می‌باشد که در آن  $\delta$  ضخامت لایه مرزی است.

ضرائب  $k, B, E$  ضرایبی جهانی بوده و مقدار آنها برای تمام جریانات عبوری از روی صفحات تخت صاف (و نه زبر) و در اعداد رینولدز بالا عبارتند از:

$$k = 0.4, B = 5.5, E = 9.8$$

افزایش زبری دیواره می‌تواند باعث کاهش مقدار  $B$  گردد. از آنجا که در به دست آوردن روابط (۱۲-۴) و (۱۶-۴) از فرضیات حدی استفاده شده است، لذا هیچ کدام از این دو رابطه برای نواحی نزدیک مرز بین این دو ناحیه، یعنی حوالی  $y^+ = y_{VSL}^+$  از هیچ کدام از دو کمیت  $V, V'$  در مقابل دیگری نمی‌توان چشم پوشی نمود. ولی چنانچه از رابطه کلی (۱۰-۴) بدون در نظر گرفتن روابط حدی انتگرال گیری شود، به معادله کلی و جامع ذیل می‌رسیم:

$$\left[ 1 + k^2 y^{+2} \frac{du^+}{dy^+} \right] \frac{du^+}{dy^+} = 1 \quad (17-4)$$

$$ku^+ = \frac{\cos(\alpha) - 1}{\sin(\alpha)} + \ln \left[ \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) \right] \quad (18-4)$$

که در آن  $\alpha = \text{ArcTan}(2ky^+)$  می‌باشد. از روشی مشابه می‌توان برای پیدا کردن توابع دیواره در مسائل پیچیده تر استفاده نمود.

<sup>۹۶</sup> Viscous Sub-Layer

شکل دیگری از معادله (۱۸-۴) که تمام عرض دیواره را می پوشاند و شامل ناحیه گذرا، یعنی  $y^+ < 5$  نیز می باشد، رابطه ای است که اصطلاحاً "قانون ریچارد" نامیده می شود:

$$u^+ = \frac{1}{k} \ln(1 + ky^+) + 7.8 \left[ 1 - \text{Exp}\left(-\frac{y^+}{11}\right) - \frac{y^+}{11} \text{Exp}\left(-0.33y^+\right) \right] \quad (19-4)$$

تجربه نشان داده است که رابطه ریچارد، یعنی رابطه (۱۹-۴) یکی از دقیقترین روابط موجود برای مدلسازی جریان در ناحیه زیرلایه لزج، ناحیه گذرا و ناحیه تماماً آشفته می باشد. مشکل این رابطه نیز پیچیده بودن شکل ریاضی این رابطه نسبت به روابط (۱۲-۴) و (۱۶-۴) می باشد.

نکته ای که در اینجا لازم است بدان اشاره شود آن است که در ناحیه زیرلایه لزج، از آنجا که پروفیل سرعت خطی است و برای تقریب هر خط تنها به دو نقطه نیاز می باشد، لذا در روش‌های عددی و گسته سازی میدان جریان در زیرلایه لزج در موقعی که استفاده از توابع دیواره مجاز نبوده و معادلات آشفتگی بایستی درست تا لب دیواره حل شوند، نبایستی از تعداد المان بالا استفاده نمود، چرا که تنها استفاده از دو نود<sup>۹۷</sup> در این ناحیه، یعنی یک نود بر روی دیواره و نود دیگر در حوالی مرز بین ناحیه زیرلایه لزج و ناحیه گذرا، مثلاً  $y^+ = 5$ ، کافی بوده و استفاده از نودهای بیشتر، بدون تاثیر بر روی دقت جواب نهائی، تنها باعث افزایش حجم محاسبات و حتی بالا رفتن حجم خطاهای عددی (بالاخص خطای دیفیوژن عددی که ذات افزایش تعداد المان در یک ناحیه می باشد) میگردد. اما در محدوده قانون لگاریتمی، نبایستی تعداد المان آنقدر کم باشد که نتوان یک منحنی لگاریتمی را با استفاده از آنها تقریب زد.

نکته دیگری که ذکر آن در اینجا مفید به نظر می رسد، آن است که توابع استاندارد معرفی شده ای که تاکنون در مورد آنها بحث شد، تنها برای شرایط خاصی از جریان و تحت فرضیات خاصی معتبر میباشند و استفاده از این توابع وقتی از شرایط و فرضیات ایده آل دور می شویم، دیگر روش مطمئنی نخواهد بود. این

فرضیات در نزدیکی دیواره عبارتند از:

- ۱ جریان دو بعدی بر روی صفحات تخت و یا صفحات دارای شعاع انحنای بالا
- ۲ تنش برشی ثابت<sup>۹۸</sup> در نزدیکی دیواره
- ۳ تعادل موضعی<sup>۹۹</sup> جریان

<sup>۹۷</sup> Node

<sup>۹۸</sup> Constant Shear

<sup>۹۹</sup> Local Equilibrium

محققین توانسته اند با وارد کردن اثرات گرادیانهای معکوس فشار (که می‌تواند منجر به جدایش جریان گردد) و نیز اثرات غیر تعادلی در فرضیات خود، توابعی را به دست بیاورند که اصطلاحاً توابع دیواره غیر تعادلی<sup>۱۰۰</sup> نامیده می‌شوند. این توابع برای استفاده در جریانات پیچیده شامل:

(۱) جدایش جریان

(۲) اتصال مجدد جریان<sup>۱۰۱</sup>

(۳) جت برخوردی با دیواره<sup>۱۰۲</sup>

مناسب می‌باشد. جریانات مورد اشاره به واسطه گرادیانهای بسیار شدید در ساختار خود می‌توانند برهمنکش و ارتباط تنگاتنگی با آشفتگی موجود در هسته مرکزی جریان داشته باشند و لذا در محاسبات مربوط به آنها بایستی دقت زیادی به خرج داد.

به طور کلی، به واسطه برهمنکش بسیار شدید بین جریان آشفته و جریان متوسط<sup>۱۰۳</sup>، جریانات آشفته در مقایسه با جریانات آرام به شبکه عددي<sup>۱۰۴</sup> ایجاد شده بسیار حساستر می‌باشند، یعنی چه بسا با افزایش کمی در تعداد المانهای یک ناحیه، تغییرات زیاد و قابل توجهی در رژیم جریان آشفته آن ناحیه ایجاد گردد. تجربه نشان داده است که تا جایی که قدرت محاسباتی و حافظه سیستم و زمان محاسبات اجازه می‌دهد، در نواحی دارای گرادیانهای شدید در خواص، بالاخص در نواحی با نرخ کرنش بالا (مثلًا در جریانات برشی<sup>۱۰۵</sup>) بایستی از تعداد المانهای بالا استفاده نمود.

<sup>۱۰۰</sup> Non-Equilibrium Wall Function

<sup>۱۰۱</sup> Reattachment

<sup>۱۰۲</sup> Jet Impingement

<sup>۱۰۳</sup> Mean Flow

<sup>۱۰۴</sup> Numerical Grid or Mesh

<sup>۱۰۵</sup> Shear Layers

## توابع دیواره برای توزیع دما در نزدیکی دیواره:

با استفاده از آنالوژی رینولدز بین معادلات انتقال ممنتوم و انرژی، قانون لگاریتمی مشابهی برای توزیع دما به دست می آید. در نواحی نزدیک دیواره برای توزیع دما نیز دو ناحیه کلی می توان تصور نمود:

### ۱- ناحیه زیرلایه هدایت حرارتی<sup>۱۰۶</sup>:

در این ناحیه، به علت نزدیکی زیاد به دیواره و کاهش اهمیت ترمهای اینرسی سیال (ترمهای مرتبط با سرعت سیال) اثرات هدایت حرارتی در مقابل جابجایی حرارتی<sup>۱۰۷</sup> قابل توجه و غالب می باشد.

### ۲- ناحیه با پروفیل لگاریتمی:

در این ناحیه، که ناحیه جریان آشفته نزدیک دیواره می باشد، اثرات آشفتگی و حضور ادی ها بر اثرات هدایت حرارتی غالب می باشد.

ضخامت زیرلایه هدایت حرارتی متفاوت از ضخامت زیرلایه لزج سیالاتی می باشد و ضخامت مذبور تابعی از عدد پرانتل  $Pr$  می باشد. بدین صورت که برای سیالات با عدد پرانتل بالا، نظیر روغن، ضخامت زیرلایه هدایت حرارتی بسیار کوچکتر از ضخامت زیرلایه لزج سیالاتی می باشد. ولی برای سیالات با عدد پرانتل پائین، نظیر فلزات مایع، ضخامت زیرلایه هدایت حرارتی بسیار بزرگتر از ضخامت زیرلایه لزج سیالاتی می باشد.

به طور کلی در مسائل همراه با انتقال جرم و انتقال حرارت، انتقال از حالت تماماً آرام (ناحیه زیرلایه لزج) به حالت تماماً آشفته به شدت وابسته به اعداد پرانتل آرام و اشمت آرام می باشد. در مسائل جریان سیالاتی که تاکنون مورد بحث و بررسی قرار گرفت دیدیم که این انتقال در ناحیه گذرائی با  $y^+ < 30$  رخ میدهد. اما در مسائل درگیر با انتقال حرارت و انتقال جرم، این محدوده مورد اشاره بسته به خواص مولکولی سیال می تواند بسیار متفاوت باشد. برای گازهای مانند هوا، از آنجا که عدد پرانتل آرام آنها بسیار نزدیک به یک می باشد، لذا محدوده گذرای حرارتی تقریباً منطبق بر محدوده گذرای سیالاتی، یعنی  $y^+ < 5$ ، می باشد. برای سیالات با عدد پرانتل کوچک، نظیر فلزات مایع، به واسطه ضربی افزایش یافته دیفیوژن

<sup>۱۰۶</sup> Thermal Conduction Sublayer  
<sup>۱۰۷</sup> Convection

مولکولی، گذر حرارتی در مقایسه با گذر سیالاتی تاخیر چشمگیری خواهد داشت و در فواصل دورتری نسبت

به دیواره رخ خواهد داد، به طوریکه حتی برای مقادیر بزرگتر از  $30 = y^+$ ، فرآیند انتقال حرارت کماکان

توسط اثرات غالب دیفیوژن مولکولی و هدایت حرارتی صورت می‌گیرد و نه به واسطه ادیهای جریان آشفته.

هر چه عدد پرانتل کوچکتر باشد، حد بالای محدوده گذرای انتقال حرارت، (در اینجا عدد ۳۰)، افزایش

خواهد یافت. برای سیالات با عدد پرانتل خیلی بزرگ، نظیر روغنها و پلاستیکهای مذاب، به واسطه ضرب

کاهش یافته دیفیوژن مولکولی، گذر از حالت هدایت حرارتی به انتقال حرارت جابجایی آشفته، خیلی سریعتر

و در مقادیر  $30 < y^+$  رخ میدهد. مجدداً در اینجا می‌توان گفت که هر چه عدد پرانتل بزرگتر باشد، حد

بالای محدوده گذر از حالت هدایت حرارتی به انتقال حرارت جابجایی آشفته کاهش خواهد یافت، لیکن حد

مینیمم یعنی  $5 \approx y^+$ ، برای سیالات چه پرانتل بالا یا چه پرانتل پائین، کماکان ثابت باقی می‌ماند، بدین

معنا که در پائینتر از این حد، امکان وجود جریان آشفته وجود ندارد و چه از نقطه نظر هیدرودینامیکی و چه

از نقطه نظر انتقال حرارتی در این ناحیه جریان آرامی را شاهد خواهیم بود. از طرف دیگر، در جریانات به

شدت تراکم پذیر و بالاخص در جریانات با عدد ماخ بالا، توزیع دما و بالتبع آن توابع دیواره ای دمایی، بسیار

متفاوت از توزیع دما و توابع دیواره نظیر آن در جریانات با عدد ماخ پائین می‌باشد.

رفتار بسیار مشابهی نیز در مورد انتقال جرم وجود دارد. یعنی اینکه در مبحث انتقال جرم نیز محدوده گذراء،

حساسیت بسیار بالائی به عدد اشمیت جریان آرام خواهد داشت. (نقش عدد پرانتل در انتقال حرارت را عدد

اشمیت در مسائل انتقال جرم بر عهده دارد). توجه داشته باشید که هم در مورد مسائل انتقال حرارت و هم

در مورد مسائل انتقال جرم، تغییرات محدوده گذراء، علاوه بر پارامترهای مذکور، به مقادیر پرانتل آشفته و

اشمیت آشفته نیز وابسته می‌باشد. اما از آنجا که تغییرات این پارامترها خیلی بزرگ نمی‌باشد، (و نزدیک

به واحد است)، این وابستگی نسبتاً ضعیف خواهد بود.

تلاش‌های زیادی برای ارائه پروفیلی عمومی در مسائل انتقال حرارت و انتقال جرم، که طیف وسیعی از عرض

ناحیه نزدیک دیواره را بپوشاند، (نظیر رابطه ریچارد)، صورت گرفته است، اما هنوز موفقیت چندانی حاصل

نشده است. با این وجود، دو رابطه نیمه تجربی ذیل ارائه شده اند که از آنها می‌توان به عنوان پروفیلهای

مربوطه در مسائل انتقال حرارت و انتقال جرم استفاده نمود:

$$T^+ = \Pr u^+ D_T + \sigma_t (1 - D_T) (u^+ + P_T) \quad (20-4)$$

$$C^+ = Sc u^+ D_C + S_t (1 - D_C) (u^+ + P_C) \quad (21-4)$$

که در آن:

$$D_\theta = \text{Exp}\left(-\frac{y^+}{11} R_\theta^\alpha\right) \quad \alpha = \begin{cases} 11 & \text{For } R_\theta < 0.1 \\ 0.333 & \text{For } R_\theta \geq 0.1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_\theta = \frac{\text{Pr}}{\sigma_t} & \text{For } \theta = T \\ R_\theta = \frac{Sc}{S_t} & \text{For } \theta = C \end{cases}, \quad P_\theta = 9.24(R_\theta^{0.75} - 1)[1 + 0.28\text{Exp}(-0.007R_\theta)]$$

## اثرات زبری سطح بر روی توابع دیواره:

همانطور که اشاره شد، نیکورادزه توانست با استفاده از آزمایشات مختلف، اثرات زبری سطح بر روی جریانات مختلف را نشان دهد. وی بر پایه اندازه گیری های آزمایشی خود برای جریان درون لوله های با زبری کنترل شده، جدولی تعییه نمود که در آن شرحی از مشاهدات آزمایشگاهی در هر محدوده زبری نشان داده شده است. اگرچه جدول ذیل برای جریان درون لوله ماسه اندود شده تعییه شده است، لیکن بدون آنکه کلیت مطلب از بین برود، می توان نتایج به دست آمده را به جریانات سطوح مسطح نیز تعمیم داد. در جدول زیر،

$$y_s^+ = \frac{\rho u^* y_s}{\mu} \text{ و } y_s^+ \text{ اندازه ماسه می باشد.}$$

توصیف مشاهدات آزمایشگاهی	رژیم جریان
در این حالت هیچ اثری از زبری بر روی جریان مشاهده نمی شود، بدین معنا که ضریب اصطکاک لوله تنها تابعی از عدد رینولدز متوسط لوله است. این رژیم در موقعیتهای مشاهده می گردد که اندازه زبری آنقدر ریز است که بر جستگیهای سطح محدود و در داخل زیر لایه لزج قرار دارد. بنابراین هر گونه اغتشاشی که در اثر برهمنکش جریان با زبری دیواره حاصل شود، در این ناحیه و به واسطه اثرات غالب لزجت جریان میرا می شود. این رژیم را از نقطه نظر هیدرودینامیکی یا آیرودینامیکی، اصطلاحاً Smooth می نامند.	$0 < y_s^+ < 5$
در این حالت یک نوع افزایش در مقاومت جریان مشاهده می شود، بدین معنا که ضریب اصطکاک همزمان تابعی از عدد رینولدز متوسط و زبری نسبی لوله $\left(\frac{y_s}{D}\right)$ ، که قطر لوله است، می باشد. همچنین مشاهده شده است که با افزایش مقدار $y_s$ ، وابستگی ضریب اصطکاک به عدد رینولدز متوسط جریان ضعیفتر و وابستگی آن به زبری سطح افزایش خواهد یافت. این رژیم را که اصطلاحاً Rizim گذراء می نامند، این حالت مربوط به موقعی است که بر جستگی عناصر زبری، زیر لایه لزج را نیز پوشش داده و پسا و مقاومت اضافی ایجاد شده ناشی از Form Drag (پسای شکلی ناشی از این بر جستگیها) می باشد.	$5 < y_s^+ < 70$
در این حالت، افزایش بیشتری در مقاومت در مقابل جریان مشاهده شده و میزان وابستگی ضریب اصطکاک به عدد رینولدز متوسط جریان کاملاً از بین رفته و ضریب اصطکاک کاملاً تابعی از زبری نسبی خواهد شد. این رژیم را اصطلاحاً Rizim تماماً زبر، Fully Rough می نامند.	$y_s^+ > 70$

می نامند و مختص موقعی است که اندازه برجستگی زبری ها، بسیار بزرگتر از زیرلایه لزج و ناحیه گذرا<sup>۱۰۸</sup> می باشد. در این نوع رژیمهای مقاومت در مقابل جریان عمدتاً به واسطه پسای ناشی از برجستگی زبری ها است.

لازم به یادآوری است که یکنواخت بودن اندازه زبری ها در آزمایش نیکورادزه و همچنین در دست نبودن شکل زبری ها و دانه های ماسه به کار گرفته شده، منجر به ساده سازی بیش از حد نتایج و آزمایشات نیکورادزه شده است، آزمایشاتی که در آنها، زبری سطوح تنها به واسطه طول مشخصه  $y_s^+$  مشخص شده است. در مسائل مهندسی، زبری سطوح به طور قابل توجهی دارای اشکال پیچیده و متنوعی می باشد. به عنوان یک نتیجه کلی، غیر ممکن است که بتوان منحصراً هر سطح زبر را توصیف نمود، چرا که هر سطحی شامل تعداد بسیار زیاد و در عین حال طیف متنوعی از "مقیاسهای زبری"<sup>۱۰۸</sup> بوده و لذا جهت تعریف شکل زبری ها، نیاز به طیف وسیعی از اندازه های مقیاس می باشد. به علاوه هر شکلی از زبری سطوح، میدان جریان را به شیوه خاص خود مورد تاثیر قرار می دهد. این امر بالاخص برای رژیم گذرا<sup>۱۰۹</sup>  $y_s^+ < 5$ ، که رژیمی ناپایدار است و در آن از نقطه نظر هیدرودینامیکی سطح نه کاملاً صاف است و نه کاملاً زبر، صادق است.

به طور تاریخی، اثرات زبری سطح، با استفاده از یک روش تقریبی و با مرتع دادن به نتایج آزمایشی نیکورادزه مدل می شود. این عمل با مشخص نمودن هر سطح زبر به کمک یک "زبری ماسه ای معادل"<sup>۱۰۹</sup> که اجازه همخوانی با نتایج نیکورادزه را می دهد، صورت می گیرد. واضح است که محدودیت این روش آن است که نمی توان تمام سطوح زبر موجود در مساله را به کمک یک "مقیاس زبری یکسان و یگانه" مشخص نمود. اما آزمایشات نشان داده اند که این روش در رژیم تمامًا زبر Fully Rough، که در آن پروفیل سرعت وابستگی ضعیفی به جزئیات زبری سطح زبر دارد، تا حدی موثر واقع شده است. در دهه ۱۹۳۰ میلادی، کلبروک<sup>۱۱۰</sup> نتایج آزمایشات گسترده خود را در زمینه زبری سطوح ارائه داد. در نیمة دهه ۱۹۴۰ میلادی، مودی<sup>۱۱۱</sup>، نتایج کلبروک را به صورت نمودار ارائه داد که

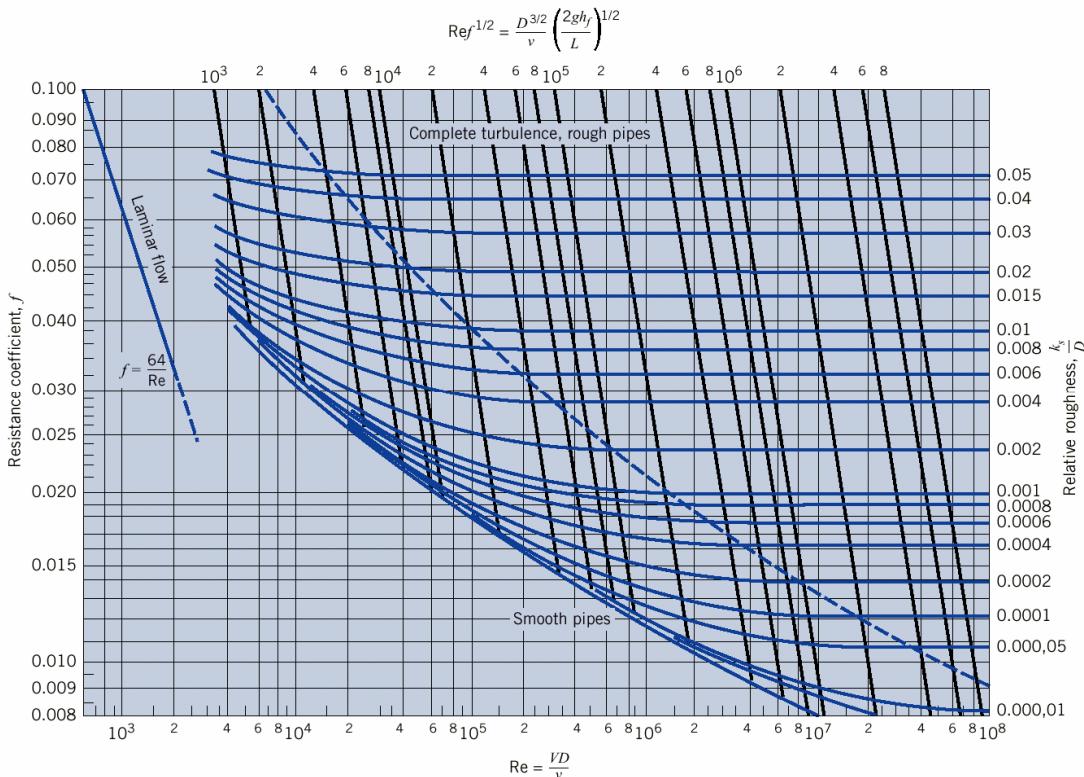
<sup>۱۰۸</sup> Roughness Scales

<sup>۱۰۹</sup> Equivalent Sand Roughness

<sup>۱۱۰</sup> Colebrook

<sup>۱۱۱</sup> L.F.Moody

هنوز هم به طور گستردۀ ای مورد استفاده قرار می گیرد. در این نمودار، ضریب اصطکاک<sup>۱۱۲</sup>، به صورت تابعی از عدد رینولدز متوسط جریان و نیز زبری نسبی ارائه شده است.



شکل (۴): دیاگرام مودی

در محدوده تمام‌اً زبر، Fully Rough، نمودار مودی مقادیر ضریب اصطکاک را به صورت تابعی از زبری نسبی ارائه می نماید که با نتایج نیکورادزه همخوانی دارد. این بدان معناست که اندازه زبری ها در نتایج کلبروک، برابر مقدار  $\lambda$  یا اندازه دانه های ماسه بکار رفته در آزمایشات نیکورادزه می باشد، لیکن نتایج این دو محقق در داخل محدوده گذرا، تفاوت زیادی با یکدیگر دارند.

در اینجا نیز می خواهیم جریانات آشفته را بر روی دو دسته از سطوح زبر، یعنی " سطوح زبر شده با استفاده از ماسه"<sup>۱۱۳</sup> و " سطوح زبر موجود در ادوات تجاری"<sup>۱۱۴</sup>، مورد مطالعه و مدلسازی قرار دهیم. برای هر دو نوع زبری، طیف کامل رژیمهای جریان از حالت کاملاً صاف (Smooth) تا حالت کاملاً زبر مدل شده است. این مدلسازی نیازمند استفاده از " المانهای مخصوص"<sup>۱۱۵</sup> می باشد. استفاده از این المانها نیازمند آگاهی داشتن از شکل پروفیلهای معمول جریان در نواحی نزدیک دیواره سطوح زبر است.

<sup>۱۱۲</sup> Friction Factor

<sup>۱۱۳</sup> Sand Roughened Surfaces

<sup>۱۱۴</sup> Commercial Rough Surfaces

<sup>۱۱۵</sup> Special Elements

برای دو نوع از سطوح زبر مورد نظر، پروفیلهای سرعت ذیل، که تطابق خوبی با نتایج آزمایشی نیکورادزه و کلبروک دارند، ارائه شده اند:

$$u^+ = \begin{cases} \frac{1}{(k+\alpha)} \ln[1 + (k+\alpha)y^+] + [7.8 + C - \delta u^+] d_1 & \text{For } y^+ \leq y_o^+ \\ \frac{1}{k} \ln[1 + \alpha y_o^+ + k y^+] + [7.8 - \delta u^+] d_1 & \text{For } y^+ > y_o^+ \end{cases} \quad (22-4)$$

در رابطه (22-4)،  $y_o^+$  می باشد که در آن  $y$ ، طول مقیاس مناسب برای زبری می باشد. به

عبارت دیگر،  $y_o^+$  اندازه زبری دانه های ماسه در آزمایش نیکورادزه و یا اندازه زبری مطلق در آزمایش کلبروک است. به علاوه:

$$\begin{aligned} d_1 &= 1 - \text{Exp}\left(-\frac{y^+}{11}\right) - \left(\frac{y^+}{11}\right) \text{Exp.}(-0.33y^+) \\ d_2 &= 1 - \text{Exp}\left(-\frac{y_o^+}{70}\right) \\ \alpha &= 0.15d_2 \\ C &= \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+\alpha}\right] \ln[1 + (k+\alpha)y_o^+] \end{aligned} \quad (23-4)$$

در رابطه (22-4)،  $\delta u^+$  بیانگر میزان انحراف پروفیل سرعت به واسطه داخل شدن اثرات زبری سطوح است. بسته به اینکه از بین دو پروفیل سرعت نیکورادزه و کلبروک، کدام یک مورد استفاده قرار می گیرد،

دو عبارت مختلف برای  $\delta u^+$  ارائه شده است:

$$\delta u^+ = \begin{cases} \frac{1}{k} \ln(1 + k d_2 y_o^+) - 0.7 d_2 & \text{Sand Roughness (Nikoradse)} \\ \frac{1}{k} \ln(1 + k y_o^+) - 0.7 d_2 & \text{Commercial Roughness (Moody)} \end{cases} \quad (24-4)$$

توجه شود که هنگامیکه  $y_o^+ \rightarrow 0$ ، یعنی هنگامیکه با سطوح کاملاً صیغلى سروکار داریم، پروفیل سرعت (22-4) همان پروفیل سرعت ریچارد، رابطه (۱۹-۴)، می باشد که این امر از جامعیت رابطه (22-4) حکایت می کند. بنابراین رابطه (22-4) جامعترین و دقیقترین رابطه برای پروفیل سرعت در نزدیک دیواره، یا توابع دیواره برای تمام انواع سطوح، اعم از صیغلى و یا زبر، می باشد. متاسفانه اطلاعات چندانی راجع به پروفیل دما و غلظت در روی سطوح زبر وجود ندارد. اما همان میزان اطلاعات ناچیزی هم که

وجود دارد، همانطور هم که انتظار هم می‌رفت، نشان دهنده افزایش میزان انتقال حرارت از سطوح زبر در مقایسه با سطوح صیغلی است. لیکن می‌توان با ترکیب روابط (۲۰-۴) و (۲۱-۴) با رابطه (۲۲-۴) به پروفیلهای تقریبی مناسبی دست یافت.

## کمیتهای $y^*$ , $U^*$

دیده شد که فاصله بدون بعد  $y^+ = \frac{\rho u^* y}{\mu}$  به صورت  $y^+ = \left(\frac{\tau_w}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}$  تعریف شد که در آن،  $u^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$  می باشد.

گاهی به جای تعریف فوق، از طول بدون بعد  $y^* = \frac{\rho \sqrt{k} (c_\mu)^{\frac{1}{4}} y}{\mu}$ ، که در آن  $k$  انرژی جنبشی آشفتگی و

$C_\mu$  عدد ثابت آزمایشگاهی است استفاده می شود. به جای تعریف سابق  $u^*$  از تعریف سابق  $y^*$  استفاده دیگری استفاده

شده است. به جای تعریف دیگری به صورت  $U^* = \frac{U(C_\mu)^{\frac{1}{4}}(k)^{\frac{1}{2}}}{\tau_w / \rho}$  استفاده شده است.

این تعاریف نبایستی نگرانی یا حساسیت خاصی را در فرد ایجاد نماید. هر مهندس مکانیکی حق دارد که برای بی بعد کردن کمیتهای مهندسی مورد نظر خود از هر طول یا سرعت یا فشار مبنای مشخصی استفاده نماید، به شرط آنکه در نهایت بتواند مزیت استفاده از پارامترهای مورد نظر خود را نشان دهد. فقط بایستی دقیق داشت که روابطی که بر طبق این تعریف ارائه شده اند، اکثراً در مورد محدوده کاربرد یا برخی از ضرائب ساختاری، دارای اصلاحاتی می باشند که بایستی مد نظر قرار گیرند. با استفاده از این تعاریف، شکل توابع دیواره به صورت زیر اصلاح می گردد:

$$U^* = y^* \quad \text{For } y^* < 11.225 \quad (25-4)$$

$$U^* = \frac{1}{k} \ln(y^*) + B \quad \text{For } y^* > 11.225 \quad (26-4)$$

نکته ای که بایستی بدان توجه نمود آن است که رابطه (25-4) برای ناحیه زیرلایه لزج و رابطه (26-4) برای ناحیه کاملاً آشفته بیان شده است. در حالیکه مرز بین این دو تنها محدوده  $y^* = 11.225$  در نظر گرفته شده است، با این تعریف ظاهراً از وجود ناحیه Buffer Layer به عنوان ناحیه گذرای بین زیرلایه لزج و کاملاً آشفته صرفنظر شده است، لیکن این چشم پوشی از وجود این ناحیه در مسائل معمول، معمولاً خطای چندانی را ایجاد نمی کند. چنانچه کاربر بخواهد وجود این ناحیه را نیز حتماً مد نظر قرار دهد، بایستی از روابط پیچیده ای نظیر رابطه (18-4) یا رابطه معروف ریچارد، رابطه (19-4) استفاده نماید که می تواند حجم محاسبات را نسبت به حجم محاسباتی دیگر توابع دیواره موجود افزایش قابل ملاحظه ای بدهد.

## فصل پنجم:

# مدل‌سازی جریانات آشفته و مدل‌های آشفته‌گی

تاکنون صدها مدل توربولانسی ارائه شده اند که هر یک برای رژیمهای خاص جریانی و حتی در ناحیه ای خاص از میدان جریان معتبر و دقیق می باشند. هدف نهائی تمام مدلها توربولانسی، محاسبه اندازه تنفس رینولدز  $\rho \bar{u}_i' \bar{u}_j'$  - در نقاط مختلف جریان میباشد.

مدلهای توربولانسی موجود را می توان از دو منظر نگریست:

الف) روابط اساسی حاکم بر <sup>۱۱۶</sup> Eddy-Viscosity

ب) مدلهاي <sup>۱۱۷</sup> Eddy Viscosity

روابط اساسی حاکم بر Eddy-Viscosity از یک پارامتر منفرد که اصطلاحاً ویسکوزیتة آشفته  $\mu$  نامیده می شود، برای بیان رابطه بین تنشهای رینولدز موجود در معادلات RANS و پروفیلهای موجود در میدان جریان متوسط استفاده می کنند. از سوی دیگر مدلهاي Eddy-Viscosity نیز برای محاسبه  $\mu$  معرفی شده در روابط اساسی Eddy-Viscosity استفاده می شود.

در اینجا، سه رابطه بعنوان روابط اساسی و نیز ۹ مدل بعنوان مدلهاي جریان آشفته معرفی می شوند. در ادامه سعی خواهیک کرد که تعداد معادلات بیشتری را مورد بررسی قرار دهیم.

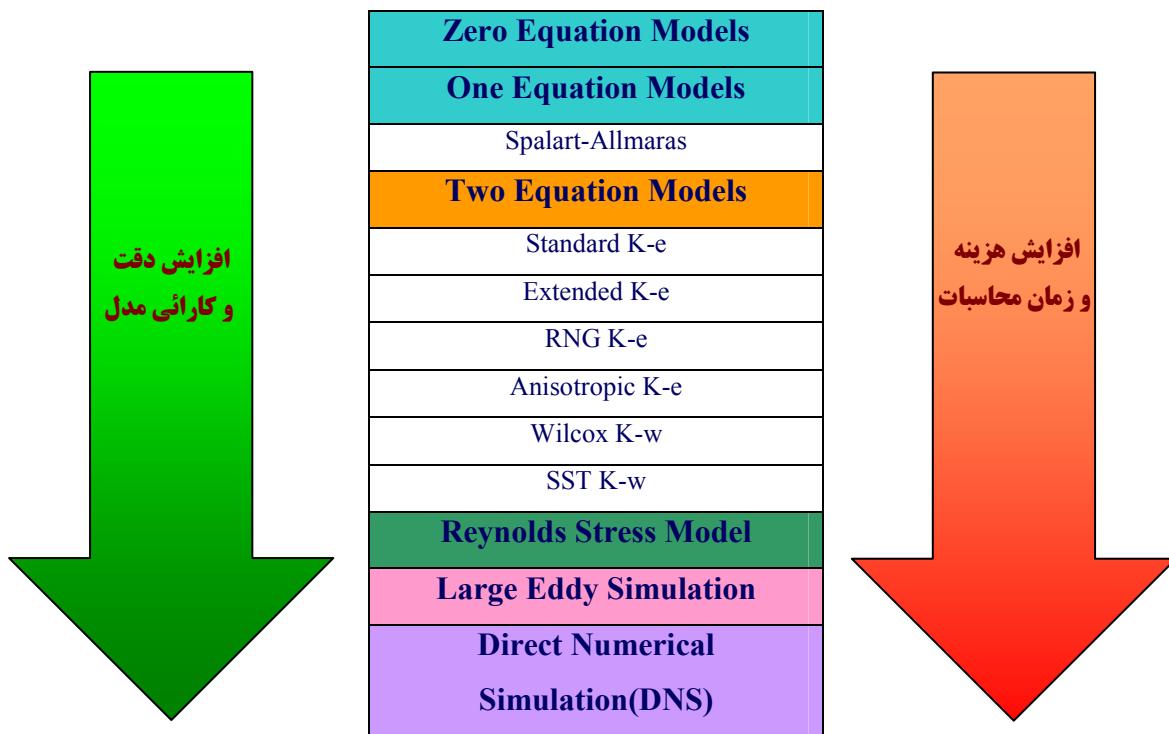
روابط اساسی	RANS Based Models				
	Eddy_viscosity Models			RSM	LES
- Boussinesq	مدلهای صفر معادله ای	مدلهای یک معادله ای	مدلهای دو معادله ای	Reynolds Stress Models	Large Eddy Simulation
- Speziale	- Automatic Mixing Length	Spalart-Allmaras	- Standarad K-e		
- Launder	- User-specified Mixing Length		- Extended K-e		
	این روشهای قبلا در مبحث "تنش برشی در جریانات آشفته" مورد بحث و بررسی کامل قرار گرفتند.		- RNG K-e		
			- Anisotropic K-e		
			- Wilcox K-w		
			- SST K-w		

می توان هر یک از ۳ عدد رابطه اساسی را با هر یک از ۶ عدد مدل دو معادله ای ترکیب نمود تا به ترکیبات جامعی برای مدلسازی جریانات آشفته دست یابیم. ولیکن بایستی توجه داشت که برای مدل

<sup>۱۱۶</sup> Eddy-Viscosity Constitutive Relation

<sup>۱۱۷</sup> Eddy-Viscosity Model

فقط اجازه استفاده از یکی از دو مدل غیر ایزوتروپ یعنی Anisotropic  $k - \varepsilon$  و Speziale را داریم. برای مقایسه انواع مدلها با یکدیگر، استفاده از نمودار زیر، کمک شایانی خواهد نمود:



### ۳) روابط اساسی حاکم بر Eddy-Viscosity

همانطور که گفته شد، روابط اساسی حاکم بر Eddy-Viscosity از یک پارامتر منفرد که اصطلاحاً ویسکوزیتۀ آشفته  $\mu_t$  نامیده می شود، برای بیان رابطه بین تنشهای رینولدز موجود در معادلات RANS و پروفیلهای موجود در میدان جریان متوسط استفاده می کنند. ۳ عدد از این دسته روابط وجود دارد:

۱) Boussinesq

۲) Speziale

۳) Launder

رابطه Boussinesq رابطه پایه و مبنا در مفهوم Eddy-Viscosity است. روابط Boussinesq و Launder

در حقیقت بسط رابطه Boussinesq برای پیش بینی رفتارهای غیرایزوتروپی جریانات آشفته هستند.

مدلهای Eddy-Viscosity بطور گسترده ای در روش‌های عددی مورد استفاده قرار گرفته اند، چراکه:

الف) اعمال این مدلها در هر Solver بسیار آسان است. ( فقط کافیست که بجای ویسکوزیتۀ مولکولی  $\mu$

ثابت، از ویسکوزیتۀ آشفته – متغیر در فضای مکان و زمان – استفاده شود. )

ب) ویسکوزیتۀ آشفته بالا که اغلب در اعداد رینولدز بالای جریانات آشفته با آن مواجه می شویم، باعث کمک

به پایداری حل خواهد شد. به عبارت دیگر همانطور که اغتشاشات موجود در جریانات فیزیکی در برخی از

نقاط جریان می توانند رشد نموده و با گسترش وسعت تاثیر و اندازه دامنه خود، فضای کلی جریان را آشفته

نمایند، اغتشاشات موجود در فضای محاسبات عددی ( CFD ) نیز می توانند در برخی از نقاط میدان

محاسباتی رشد نموده و چنانچه این رشد به نحوی کنترل نگردد، باعث ناپایداری جریان و در نهایت واگرائی

رونده حل خواهند شد. همانطور که در فضای فیزیکی جریان، لزجت باعث میرا شدن اغتشاشات موجود در

جریان می گردد، در فضای محاسباتی نیز لزجت باعث میرا شدن ناپایداریهای عددی خواهد شد. فضای

محاسباتی عددی CFD چیزی نیست جزء همان فضای فیزیکی واقعی جریان که همان معادلات فیزیکی

در این فضا گسترش شده اند. بنابراین هر چه لزجت سیال بالاتر باشد، ( که در جریان آشفته، ویسکوزیتۀ

آشفته به مراتب بزرگتر از ویسکوزیتۀ جریان آرام می باشد )، احتمال رشد ناپایداریهای موجود در جریان

کمتر و پایداری جریان بیشتر تضمین خواهد شد.

ج) مدل Eddy– Viscosity در جریانات ساده برشی<sup>۱۱۸</sup> ( نظیر جریانات لایه مرزی، جریانات جت دو بعدی و غیره ) دارای پایه و اساس کاملاً علمی است. در سایر جریانات، نیز اگرچه دارای خطا می باشد، لیکن خطاهای مزبور قابل چشم پوشی می باشند. تمام تلاشهایی که امروزه بر روی مدلها صورت می گیرد، بر روی کاهش خطا و بالا بردن کارائی مدلها به منظور تعمیم توانائی این مدلها برای استفاده در دسته وسیعی از جریانات می باشد.

نکته بسیار مهمی که بایستی در اینجا به آن اشاره نمود، آن است که تمام مدلهای آشفتگی، از معادلات حاکم بر جریانات تراکم ناپذیر در محاسبه کمیتهای آشفته استفاده می نمایند. چرا که بر طبق نظریه مارکوین<sup>۱۱۹</sup> تنها در سرعتهای فراصوت ( Hyper-Sonic ) با عدد ماخ بزرگتر از ۵ است که کمیتهای آشفتگی از تراکم پذیری تاثیر می پذیرند و در سرعتهای پائینتر می توان در محاسبه کمیتهای آشفتگی نظیر مدلسازی تنشهای رینولدز، از معادلات آشفتگی حاکم بر جریانات تراکم ناپذیر استفاده نمود.

---

<sup>۱۱۸</sup> Simple Shear Flows  
<sup>۱۱۹</sup> Markovin's Hypothesis

## رابطه اساسی Boussinesq Eddy-Viscosity

رابطه بوزینسک بر پایه این اصل بنا نهاده شده است که مولفه های تنشهای رینولذ متناسب با گرادیانهای

سرعت متوسط می باشند، یعنی:

$$-\rho \overline{u'_i u'_j} = 2\mu_t S_{ij} - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \quad (1-5)$$

که در آن،  $S_{ij}$  تانسور نرخ کرنش متوسط<sup>۱۲۰</sup> بوده و توسط رابطه تعريف می شود.

(لازم به یادآوری است که در بیان تانسوری  $u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$  می باشد. مقادیر متوسط جریان و مشتقات مربوط

به آن از حل معادلات متوسط ناویر استوکس در داخل میدان جریان به دست می آید.) البته بايستی توجه داشت که رابطه ارائه شده (۱-۵)، شکل تراکم ناپذیر معادله بوزینسک است، لیکن شکل کامل کاملاً معادله که شامل اثرات تراکم پذیری جریان می باشد، به صورت زیر خواهد بود:

$$-\rho \overline{u'_i u'_j} = 2\mu_t S_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \quad (2-5)$$

بر خلاف ویسکوزیتۀ مولکولی  $\mu$ ، که یک خاصیت از سیال است،  $\mu_t$  رابطه ای مستقیم و وابستگی شدیدی به میزان آشفتگی جریان و میدان سرعت دارد و لذا تابعیتی از جریان و موقعیت دارد. در اعداد رینولذ بالا، در تمام و یا بخش عمدۀ ای از جریان،  $\mu_t >> \mu$  است.

چنانچه ویسکوزیتۀ کلی را بصورت:

$$\mu = \mu_0 + \mu_t \quad (3-5)$$

RANS بنویسیم، (که در آن  $\mu$  ویسکوزیتۀ جریان آرام و خاصیتی از سیال است) در اینصورت معادلات (همراه با تنشهای رینولذ) را می توان با حذف تنشهای رینولذ و جایگزینی ویسکوزیتۀ  $\mu$  با ویسکوزیتۀ معادل جریانات آشفته،  $\mu = \mu_0 + \mu_t$ ، بشکلی شبیه به معادلات ناویر-استوکس جریانات آرام نوشت که

شامل تانسور تنش رینولذ آشفته  $\rho \overline{u'_i u'_j}$  نمی باشند. با استفاده از این استراتژی می توان برای مدلسازی

یک جریان آشفته، به جای پیش بینی مستقیم مقدار  $\overline{u'_i u'_j}$  تنها بدنبال توزیع  $\mu_t$  بگردیم.

<sup>۱۲۰</sup> Mean Strain Rate Tensor

## معادله ممتومن در یک جریان آشفته

$$\rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j u_{i,j} \right) = -P_{,i} + B_i + \left[ \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) - \rho \overline{u'_i u'_j} \right]_j$$

استفاده از روابط Eddy-Viscosity برای تعیین نش رینولدز نظری

$$-\rho \overline{u'_i u'_j} = 2\mu_t S_{ij} - \frac{2}{3}\rho k \delta_{ij}$$

استفاده از مدل‌های نظری Eddy-Viscosity

$\mu_t$  برای تعیین ویسکوزیتۀ آشفته  $k - \varepsilon, k - \omega, \dots$

متشابها چنانچه مفهوم ضریب پخش آشفته<sup>۱۲۱</sup> را به دنیای انتقال حرارت و انتقال جرم بسط دهیم، به روابط

تقریبی زیر برای شارهای حرارتی و جرمی آشفته<sup>۱۲۲</sup> می‌رسیم:

$$-\rho \overline{u'_i C'} = \rho \alpha_t C_i \quad (4-5)$$

$$-\rho C_p \overline{u'_i T'} = \lambda_t T_i \quad (5-5)$$

دو رابطه (۴-۵) و (۵-۵) بیانگر پخش آشفتگی<sup>۱۲۳</sup> و هدایت حرارتی آشفتگی<sup>۱۲۴</sup> هستند و بصورت زیر تعریف

می‌شوند:

$$\alpha_t = \frac{\mu_t}{\rho S_t} \quad (6-5)$$

$$\lambda_t = \frac{C_p \mu_t}{\sigma_t} \quad (7-5)$$

که در آن  $S_t$  عدد اشمیت آشفته و  $\sigma_t$  عدد پرانتل آشفته می‌باشد.

<sup>۱۲۱</sup> Turbulent Diffusion

<sup>۱۲۲</sup> Turbulent Heat & Mass Fluxes

<sup>۱۲۳</sup> Turbulent Diffusivity

<sup>۱۲۴</sup> Turbulent Thermal Conductivity

توجه شود که بر خلاف مقادیر اشمیت و پرانتل جریان آرام که فقط تابعی از سیال می باشند، این مقادیر در جریان آشفته تابعی از آشفتگی و پروفیلهای جریان متوسط می باشند. لیکن برای اغلب جریانات،  $S_t$  و  $\sigma_t$  از مرتبه واحد هستند. چنانچه رابطه (۴-۵) را در داخل رابطه (۲۲-۳) جایگزین نمائیم و از تعریف زیر نیز استفاده نمائیم:

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_t \quad (8-5)$$

در اینصورت معادله آشفتگی (۲۲-۳) به شکل معادله آرام (۷-۱) در خواهد آمد. متشابه‌ها چنانچه رابطه (۵-۵) را در رابطه (۲۴-۳) جایگزین نموده و از تعریف زیر نیز استفاده نمائیم:

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_t \quad (9-5)$$

در اینصورت معادله آشفتگی (۲۴-۳) به شکل معادله آرام (۹-۱) در خواهد آمد.

نکته جالب توجه در مدلسازی مسائل صنعتی - مهندسی آن است که در اغلب این مسائل با جریاناتی مواجه هستیم که به طور همزمان، بخشی از جریان آرام ( مثلًا در داخل لایه مرزی و یا در نواحی سکون جریان ) و بخش دیگری از جریان آشفته می باشد. تجربه نشان داده است که در چنین جریاناتی چنانچه از روابط اساسی Eddy-Viscosity و مدل‌های آشفتگی مربوطه ( اعم از صفر، یک و یا دو معادله ای ) استفاده شود، آن بخش از جریان که دارای رژیم آرام میباشد، اغلب به روش غلط مدلسازی شده است و به همین ترتیب جریان در نواحی آشفتگی جریان نیز متاثر از این مدلسازی غلط خواهد شد. علت نیز بسیار واضح می باشد. چنانچه به معادله (۱-۵) و معادلات مشابه توجه شود میتوان مشاهده نمود که برای یک جریان آرام می توان همواره

نقاطی را یافت که در آن نقاط ترم  $S_{ij} = \left( \frac{\mathbf{u}_{i,j} + \mathbf{u}_{j,i}}{2} \right)$  ترمی قابل توجه ( اغلب مخالف صفر ) باشد. همواره

در هر جریان، اعم از جریان آرام و یا آشفته، گرادیانهای سرعت مخالف صفر وجود خواهند داشت که ترم  $S_{ij}$  را مخالف صفر خواهند کرد. به همین ترتیب از آنجا که برای جریان آرام مورد نظر از مدل‌های آشفته استفاده شده است، لذا با استفاده از حل معادلات انتقالی کمیت‌های آشفته ( نظیر  $k, \varepsilon$  و یا  $k, \omega$  ) در داخل نواحی

جریان آرام مساله، مقدار کمیت ویسکوزیتی آشفتگی  $\mu_t$  ( که مثلًا در مدل  $\varepsilon - k$  از رابطه

به دست می آید ) مقداری مخالف صفر و نه لزوماً نزدیک صفر خواهد شد. لذا بر خلاف انتظار ما، در داخل نواحی آرام جریان، مقادیر تنشهای رینولدز مخالف صفر در آمده و عملاً ترمehای تنش برشی در آن نواحی

بیش از تنشهای واقعی در نواحی آرام جریان خواهد شد. بنابراین در داخل ناحیه آرام میدان، ترموماتیک محاسبه و در محاسبات داخل شده اند که ذاتاً متعلق به این نواحی نمیباشند.

$$-\rho \overline{u'_i u'_j} = 2\mu_t S_{ij} - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij}$$

تجربه نشان داده است که در نقاط مختلف جریان و بسته به مقادیر به دست آمده از حل معادلات انتقالی، نظریه مدل  $\epsilon - k$ ، مقدار  $\mu_t$  نیز می تواند حتی در نقاط جریان آرام مخالف صفر در بیاید. همین امر استفاده کلی از این روش برای جریانات توام آرام و آشفته را با مشکل مواجه می گردد.

در نقاط مختلف جریان و بسته به گرادیانهای موجود در جریان متوسط مقدار  $S_{ij}$  می تواند قابل توجه باشد.

## رابطه اساسی : Speziale Eddy -Viscosity

در رابطه اساسی Speziale Eddy-Viscosity، تانسور تنش رینولدز با استفاده از رابطه ذیل تقریب زده

میشود:

$$-\rho \overline{u'_i u'_j} = 2\mu_t S_{ij} - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} + 4C_{SP} C_\mu \frac{k}{\varepsilon} \mu_t \left( S_{ik} S_{kj} + \hat{S}_{ij} - \frac{1}{3} (S_{mn} S_{mn} + \hat{S}_{mm}) \delta_{ij} \right) \quad (10-5)$$

که در آن  $C_{SP}$  ثابت مدل است که در حالت پیش فرض دارای مقدار ۱/۶۸ است و  $\hat{S}_{ij}$  مشتق برشی و

Oldroyd نظیر  $S_{ij}$  است:

$$\hat{S}_{ij} = -\frac{\partial u_i}{\partial x_k} S_{kj} - \frac{\partial u_j}{\partial x_k} S_{ki}$$

در رابطه Speziale، تانسور تنش رینولدز تابعی Quadratic از تانسور نرخ کرنش است، لذا این رابطه مکانیزم لازم برای پیش بینی اثرات Anisotropic توربولانس (اثرات ناشی از ذات جهتدار بودن جریانات آشفته) را در اختیار دارد. می توان نشان داد که این رابطه به خوبی Anisotropy تنشهای نرمال در داخل جریانات از نوع لایه مرزی را در اختیار می گیرد، لیکن در پیش بینی جریانات ثانویه ناشی از Anisotropy تنشها در کانالهای با مقاطع غیر دایروی ضعیف عمل می نماید.

## رابطه اساسی : Launder Eddy-Viscosity

در رابطه اساسی Launder Eddy-Viscosity، تانسور تنش رینولذ با استفاده از رابطه ذیل تقریب زده میشود:

$$\begin{aligned}
 -\rho \overline{u'_i u'_j} &= 2\mu_t S_{ij} - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} + 4C_{l1}\mu_t \frac{k}{\varepsilon} \left( S_{ik}S_{kj} - \frac{1}{3} S_{mn}S_{mn} \delta_{ij} \right) \\
 &- 4C_{l2}\mu_t \frac{k}{\varepsilon} (\omega_{ik}S_{kj} - \omega_{jk}S_{ki}) - 4C_{l3}\mu_t \frac{k}{\varepsilon} \left( \omega_{ik}\omega_{jk} - \frac{1}{3} \omega_{mn}\omega_{mn} \delta_{ij} \right) \\
 &+ 8C_{l4}C_\mu\mu_t \frac{k^2}{\varepsilon^2} \left( S_{ik}\omega_{lj} + S_{kj}\omega_{li} - \frac{2}{3} S_{km}\omega_{lm} \delta_{ij} \right) S_{kl} \\
 &- 8C_{l5}C_\mu\mu_t \frac{k^2}{\varepsilon^2} \left( S_{ik}S_{jl} - \frac{1}{3} S_{mk}S_{ml} \delta_{ij} \right) S_{kl} + 8C_{l6}C_\mu\mu_t \frac{k^2}{\varepsilon^2} S_{ij}S_{kl}S_{kl} \\
 &- 8C_{l7}C_\mu\mu_t \frac{k^2}{\varepsilon^2} S_{ij}\omega_{kl}\omega_{kl}
 \end{aligned} \tag{11-5}$$

$\omega_{ij}$  را اصطلاحاً تانسور ورتیسیتیه متوسط<sup>۱۲۵</sup> می نامند. که در آن

مقادیر پیش فرض برای ضرائب به صورت ذیل می باشد:

$C_{l1}$	$C_{l2}$	$C_{l3}$	$C_{l4}$	$C_{l5}$	$C_{l6}$	$C_{l7}$
۰/۱	۰/۱	۰/۲۶	۱	۰	۰/۱	۰/۱

در رابطه اساسی Launder، تانسور تنش رینولذ تابعی Cubic از تانسور نرخ کرنش است ( این امر از روی رابطه ها و یا هم بسته های سه گانه نظیر  $S_{ij}S_{kl}S_{kl}$  واضح می باشد). همانند رابطه Spezile، رابطه Launder نیز پیش بینی صحیحی از Anisotropy تنشهای نرمال آشفته در جریانات از نوع لایه مرزی خواهد داشت و نسبتاً می تواند جریانات ثانویه در کانالهای با مقاطع غیر دایروی را پیش بینی صحیحی نماید. ( بر خلاف رابطه Speziale که پیش بینی صحیحی از این جریانات نداشت ). به علاوه رابطه Launder نسبت به رابطه Speziale جهت پیش بینی جریانات swirling مجهرتر می باشد.

<sup>۱۲۵</sup> Mean Vorticity Tensor

## ۲-۲ : Eddy-Viscosity مدل‌های

هدف هر مدل Eddy Viscosity و کمیتهای قابل اندازه گیری فیزیکی جریان و یا کمیتهای محاسبه شده میدان جریان است. به طور کلی این مدلها را می‌توان به سه دسته تقسیم نمود:

۱- مدل‌های صفر معادله ای<sup>۱۲۶</sup>

۲- مدل‌های یک معادله ای<sup>۱۲۷</sup>

۳- مدل‌های دو معادله ای<sup>۱۲۸</sup>

مدل‌های صفر معادله ای، تنها از روابط و معادلات جبری جهت توصیف رابطه بین  $\mu$  و خواص محاسبه شده و یا قابل اندازه گیری استفاده می‌کنند. مدل‌های یک معادله ای از یک معادله انتقال PDE اضافی نیز در این بین استفاده می‌کنند، مدل‌های دو معادله ای شامل دو عدد PDE اضافی هستند.

واضح است که هیچ مدل آشفتگی وجود ندارد که برای تمامی مسائل مهندسی جوابگو باشد. انتخاب مدل از

بین مدل‌های موجود بستگی به:

الف) فیزیک جریانی که با آن در مساله مورد نظر درگیر هستیم.

ب) وجود یا عدم وجود همزمان چند رژیم متفاوت جریانی در کنار یکدیگر

ج) میزان دقت مورد نیاز

د) امکانات محاسباتی موجود (از قبیل RAM و یا CPU در درسترس)

ه) میزان زمان مورد نیاز برای رسیدن به جوابی معقول دارد.

<sup>۱۲۶</sup> Zero Equation Model

<sup>۱۲۷</sup> One Equation Model

<sup>۱۲۸</sup> Two Equation Model

## ۲-۱) مدل‌های صفر معادله‌ای (مدل‌های طول اختلاطی)<sup>۱۲۹</sup>

نظریه طول اختلاطی، که پیش از این مورد بحث و بررسی قرار گرفت، فقط برای جریانات نسبتاً ساده نظریه جریانات برپی نازک<sup>۱۳۰</sup> و جریانات جت و جریانات Wakes و جریانات لایه مرزی تشکیل شده بر روی دیواره خوب کار می‌کند. چراکه تنها برای این جریانات است که می‌توان  $L_m$  را با روابط تجربی ساده بیان نمود. اما این مدل اثرات انتقالی آشفته و نیز History Effects نظیر جریانات آشفته را در نظر نمی‌گیرد (عنوان توضیح بیشتر، این مدل نمی‌تواند اثرات اغتشاشات ایجاد شده در بالادست جریان را بر روی جریان پائین دست پیش بینی نماید). از نقطه نظر ریاضی، سیستم معادلات جریان به دست آمده از مدل‌سازی جریان آشفته از نوع صفر معادله‌ای تقریباً همانند سیستم معادلات مربوط به جریانات آرام می‌باشد که در آن  $\mu$  ثابت و یا متغیر نسبت به مکان و رژیم موضعی جریان است. به عنوان مثالی دیگر از جریانات دارای ویسکوزیتۀ متغیر می‌توان به جریانات دارای ویسکوزیتۀ وابسته به دما و یا جریان سیالات غیر نیوتونی با "ویسکوزیتۀ وابسته به برش<sup>۱۳۱</sup>" اشاره نمود.

بنابراین از نقطه نظر محاسباتی و خواص همگرائی، می‌توان انتظار داشت که در استفاده از مدل طول اختلاطی (یا مدل‌های صفر معادله‌ای) در نهایت رفتاری شبیه به رفتار جریانات آرام را شاهد خواهیم بود. بالاخص چنانچه از شرایط مرزی مناسب استفاده شده باشد، حل عددی با استفاده از این مدلها، با سرعت بالاتری همگرا شده و نتایج همگرا شده بهتری را در تعداد تکرار کمتر خواهد داد. به علاوه در استفاده از روش صفر معادله‌ای، خواص همگرائی فرآیند حل به پارامترهای ذیل حساس نمی‌باشد:

۱- تغییرات جزئی در چگالی و توزیع مکانی المانها (شبکه بندي Grid Generation)

۲- تغییرات در شکل دامنه محاسباتی

۳- حدس اولیۀ آغازین (بدین معنا که شعاع همگرائی بزرگی داریم).

لازم به ذکر است که این مدل در جاهایی که فرآیند جابجائی و یا دیفیوژن کمیتهای آشфтگی مهم است نظریه:

۱- جریاناتی که دارای نرخ تشکیل بالائی می‌باشند<sup>۱۳۲</sup> (نظیر جریانات انفجاری، تخلیۀ ظروف و یا معابر پر فشار و ...)

<sup>۱۲۹</sup> Zero Equation Models (Mixing Length Models)

<sup>۱۳۰</sup> Thin Shear Layer Flows

<sup>۱۳۱</sup> Shear Dependent Viscosity

<sup>۱۳۲</sup> Rapidly Developing Flows

## ۲- انتقال حرارت در عرض صفحات بدون گرادیان جریانی<sup>۱۳۳</sup>

جریانات دوباره چرخشی<sup>۱۳۴</sup> و به طور کلی هر جریانی که دارای رژیمهای پیچیده در مقایسه با جریانات ساده کلاسیک می باشد و بالتبع آن تعیین  $l_m$  با مشکل مواجه می شود، مناسب نخواهد بود.

---

<sup>۱۳۳</sup> Heat Transfer Across Planes Across Zero Gradient Flows  
<sup>۱۳۴</sup> Recirculating Flows

## ۲-۲-۲) مدل‌های یک معادله ای :Spalart-Allmaras

در مدل‌های یک معادله ای، یکی از دو مقیاس مهم در جریانات آشفته، یعنی از میان زمان مقیاس جریانات آشفته و طول مقیاس جریانات آشفته و یا ترکیبی از آن دو، با استفاده از یک معادله انتقالی به دست می‌آید. عموماً این انرژی جنبشی آشفته،  $k$  است که برای آن از یک معادله انتقالی استفاده می‌شود. ( لازم به یادآوری است که یک معادله انتقال کمیت دلخواه  $\varphi$ ، معادله حاکم بر تغییرات زمانی، جابجایی و دیفیوژن و به طور کلی معادله بیانگر توزیع  $\varphi$  در میدان می‌باشد ).

مدل Spalart-Allmaras یک مدل تک معادله ای ساده بوده که یک معادله مدل شده انتقال را برای به دست آوردن  $\mu$  حل می‌کند. مدل مزبور برای کاربردهای هوافضا ارائه شده است و همچنین نتایج خوبی برای لایه‌های مرزی ایکه در معرض گرادیان فشار معکوس<sup>۱۳۵</sup> قرار دارند، ارائه داده است. همچنین این مدل، یک مدل عمومی برای کاربردهای توربوماشین است.

در شکل اصلی خود، مدل Spalart-Allmaras مدلی موثر برای اعداد رینولدز پائین محسوب می‌گردد، یعنی استفاده موثر از این مدل تنها محدود به نواحی متاثر از لزجت در داخل لایه مرزی و نواحی مشابه ( با عدد رینولدز پائین ) می‌باشد. هر چه از نواحی با عدد رینولدز دور شویم و به سمت نواحی با عدد رینولدز بالاتر ( بالاخص نواحی دور از دیواره ) حرکت نمائیم، از قابلیتهای این مدل در تعیین مقدار  $\mu$  کاسته خواهد شد. اما در برخی از نرم افزارهای تجاری، این مدل را می‌توان برای موقعی که المانهای نزدیک دیواره خیلی ریز نمی‌باشند، به توابع دیواره مجهر نمود تا بتوان اثرات نواحی با ویسکوزیتی بالای نزدیک دیواره را در تواناییهای این مدل داخل نمود. این امر باعث شده است که این مدل، بهترین گزینه برای رسیدن به حل‌های خام<sup>۱۳۶</sup> بر روی مش زخت اولیه<sup>۱۳۷</sup> باشد. ( البته برای موقعی که محاسبات دقیق میدان جریان آشفته خیلی ضروری نبوده و هدف کلی رسیدن به یک رفتار کلی و تقریبی از جریان آشفته است).

بعلاوه گرادیانهای نزدیک دیواره<sup>۱۳۸</sup> متغیرهای انتقالی در این مدل بسیار کوچکتر از گرادیانهای نزدیک دیواره متغیرهای انتقالی در مدل‌های  $\epsilon - k$  است. این امر باعث آن می‌شود که این مدل در مقایسه با مدل  $\epsilon - k$  نسبت به خراب بودن مشها (که می‌تواند منجر به ایجاد دیفیوژن مجازی<sup>۱۳۹</sup> شود) از حساسیت کمتری

<sup>۱۳۵</sup> Adverse Pressure Gradient

<sup>۱۳۶</sup> Crude Simulation

<sup>۱۳۷</sup> Coarse Mesh

<sup>۱۳۸</sup> Near Wall Gradients

<sup>۱۳۹</sup> False Diffusion

برخوردار باشد و از این لحاظ با مشکلات کمتری مواجه می شود. تجربه نشان داده است که این مدل در جریانات با سرعت کاهش یابنده<sup>۱۴۰</sup> با گرادیان فشار معکوس بهتر از مدل  $Chien's\ k - \epsilon$  عمل می کند.

مدل جدیدی بوده و هنوز هیچ ادعائی مبنی بر مناسب بودن این مدل برای تمام جریانات مهندسی پیچیده ارائه نشده است. البته هنوز جزو رایجترین مدلها در کاربردهای هوافضائی می باشد.

مدلها یک معادله ای ( نظیر مدل Spalart-Allmaras ) بخاطر عدم توانائی در وفق دادن خود با تغییرات سریع در مقیاسهای طولی<sup>۱۴۱</sup> همواره مورد انتقاد قرار داشته اند. این تغییرات شدید را بالاخص در تغییرات ناگهانی از جریانات محدود به دیواره<sup>۱۴۲</sup> به جریانات برشی آزاد<sup>۱۴۳</sup> ( همانند تخلیه یک جت با ابعاد محدود به درون محیطی با ابعاد نامتناهی نظیر هوای اتمسفر ) مشاهده می نمائیم. از طرفی از نقطه نظر توانائی داخل نمودن اثرات زیر مدلها ( مثلاً در مسائل احتراق یا مسائل درگیر با جابجائی آزاد و نیروهای بویانسی ) مدل Spalart-Allmaras با کمبودهای جدی مواجه است.

<sup>۱۴۰</sup> Decelerating Flows

<sup>۱۴۱</sup> Length Scales

<sup>۱۴۲</sup> Wall-bounded Flows

<sup>۱۴۳</sup> Free-Shear Flows

### ۳-۲-۲) مدل‌های دو معادله ای:

مدل‌های دو معادله ای به عنوان زیربنای بسیاری از تحقیقات مربوط به مدل‌سازی جریانات آشفته، بالاخص در سالیان اخیر بسیار مورد توجه قرار گرفته‌اند. ساده‌ترین مدل‌های کامل آشفتگی (که در عین قابلیت‌های بالا، دارای معادلات نسبتاً ساده ای نیز می‌باشند)، مدل‌های دو معادله ای هستند که در آنها، حل دو معادله انتقال جدأگانه باعث تعیین شدن مستقلانه مقیاس سرعت آشفتگی<sup>۱۴۴</sup> و مقیاس طول آشفتگی<sup>۱۴۵</sup> می‌شوند.

مهمترین اختلاف بین مدل‌های دو معادله ای و سایر مدل‌های Eddy-Viscosity آن است که مدل‌های دو معادله ای مدل‌های کاملی می‌باشند یعنی از آنها می‌توان برای پیش‌بینی خواص یک جریان آشفته بدون آگاهی قبلی از ساختار جریان و یا هندسه جریان استفاده نمود. در حالیکه هم در معادلات صفر معادله ای (جبری) و هم در معادلات یک معادله ای، طول مقیاس‌های وجود دارد که برای تعیین اندازه آنها، نیاز به دانستن از قبل رژیم جریان و شکل آن می‌باشد و این امر مدل‌سازی جریانات آشفته قبل از حل آنها را کمی پیچیده می‌نماید. نقطه آغاز تمام مدل‌های Eddy – Viscosity دو معادله ای مجازاً خطی، استفاده از تقریب بوزینسک و معادله انتقال برای انرژی جنبشی آشفتگی،  $k$  می‌باشد. انتخاب متغیر دوم دلخواه بوده و تا امروز پیشنهادات بسیاری برای این انتخاب ارائه شده است:

معنای فیزیکی	نماد	متغیر	سال ارائه	ارائه دهنده
فرکانس	$\omega$	$\frac{\sqrt{k}}{l}$	۱۹۴۲	Kolmogorov
طول مقیاس	$l$	$l$	۱۹۵۱	Rotta
ضربدر طول مقیاس $K$	$kl$	$kl$	۱۹۶۸	Rotta
نرخ اضمحلال لزج	$\varepsilon$	$\frac{k^{3/2}}{l}$	۱۹۶۸	Harlow & Nakayama
نوسانات ورتیسیتی	$\omega'$	$\frac{k}{l^2}$	۱۹۶۹	Spalding
ادی ویسکوزیته	$V_t$	$l\sqrt{k}$	۱۹۶۹	Nee & Kovasznay
زمان مقیاس	$\tau$	$\frac{l}{\sqrt{k}}$	۱۹۹۲	Speziale

<sup>۱۴۴</sup> Turbulent Velocity Scale

<sup>۱۴۵</sup> Turbulent Length Scale

قدرت، اقتصادی بودن و دقت قابل قبول برای طیف وسیعی از جریانات آشفته، این مدل را به یک مدل رایج برای جریانات صنعتی و مدلسازی انتقال حرارت نموده است.

## ۱-۳-۲-۲ مدل استاندارد $k - \varepsilon$

مدل  $k - \varepsilon$  معروفترین مدل دو معادله ای می باشد. چرا که فهم آن آسان و استفاده از آن در برنامه نویسی ساده می باشد. در مدلهای  $k - \varepsilon$  Eddy-Viscosity میدان آشفته بر حسب دو متغیر بیان می شود:

الف) انرژی جنبشی جریان آشفته<sup>۱۴۶</sup>  $\mathbf{k}$

ب) نرخ اضمحلال ویسکوز انرژی جنبشی آشفته<sup>۱۴۷</sup>  $\varepsilon$

$$k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i} \quad (12-5)$$

$$\varepsilon = \left( \frac{\mu}{\rho} \right) \overline{u'_{i,j} u'_{i,j}} \quad (13-5)$$

می توان بكمک آنالیز ابعادی<sup>۱۴۸</sup> نشان داد که ویسکوزیتۀ آشفته  $\mu_t$  را می توان به طول مقیاس ادی های بزرگ جریان آشفته مرتبط ساخت:

$$\mu_t \propto \rho u_t \delta_t \quad (14-5)$$

که در آن  $u_t$  و  $\delta_t$  به ترتیب سرعت مقیاس و طول مقیاس بزرگترین ادی ها در میدان جریان آشفته میباشند. بعلاوه می توان نشان داد که:

$$u_t \propto \sqrt{k} \quad (15-5)$$

$$\delta_t \propto \frac{\sqrt{k^3}}{\varepsilon} \quad (16-5)$$

با جایگذاری معادلات (۱۵-۵) و (۱۶-۵) درون معادله (۱۴-۵) به نتیجه زیر می رسیم:

$$\mu_t = C_\mu \rho \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (17-5)$$

که در آن  $C_\mu$  یک ضریب تجربی است که مقدار آنرا معمولاً برابر  $0.09$  در نظر می گیرند.

در مدل استاندارد  $k - \varepsilon$ ، مقادیر  $k$ ,  $\varepsilon$  توسط معادلات نیمه تجربی<sup>۱۴۹</sup> زیر بدست می آیند:

<sup>۱۴۶</sup> Turbulent Kinetic Energy (T.K.E.)

<sup>۱۴۷</sup> Viscous Dissipation Rate of Turbulent Kinetic Energy

<sup>۱۴۸</sup> Dimensional Analysis

<sup>۱۴۹</sup> Semi-Empirical

$$\rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho u_j k_{,j} = \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} k_{,j} \right)_{,j} + G + B - \rho \varepsilon \quad (18-5)$$

$$\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \rho u_j \varepsilon_{,j} = \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \varepsilon_{,j} \right)_{,j} + C_1 \frac{\varepsilon}{k} G + C_1 (1 - C_3) \frac{\varepsilon}{k} B - C_2 \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (19-5)$$

که در آن  $C_1$  و  $C_2$  و  $C_3$  ضرایبی تجربی بوده و  $\sigma_k$  و  $\sigma_\varepsilon$  نیز به ترتیب اعداد پرانتل و اشمت آشفته میباشند.

ترمهای  $C_2 \rho \left( \frac{\varepsilon^2}{k} \right)$  و  $C_1 \left( \frac{\varepsilon}{k} \right) G$  در معادله (19-5) بترتیب بیانگر فرآیندهای تولید برشی<sup>۱۵۰</sup>  $\varepsilon$  و

فرآیندهای اضمحلال ویسکوز  $\varepsilon$  میباشند. ترم  $C_1 (1 - C_3) \left( \frac{\varepsilon}{k} \right) B$  بیانگر اثرات بویانسی میباشد.

در معادله (18-5)، ترم  $G$ ، بیانگر میزان تولید انرژی جنبشی آشفتگی<sup>۱۵۱</sup> ناشی از اندرکنش بین جریان متوسط<sup>۱۵۲</sup> و میدان جریان آشفته میباشد و از همینرو به آن اصطلاحاً ترم تولید برشی گفته میشود. ترم  $B$  نیز بیانگر ترم تولید-اتلاف بویانسی ناشی از میدان چگالی نوسان کننده جریان<sup>۱۵۳</sup> میباشد.

روابط صریح<sup>۱۵۴</sup> برای  $G$  و  $B$  بصورت زیر هستند:

$$G = -\rho \overline{u'_i u'_j} u_{i,j} \quad (20-5)$$

$$B = \overline{\rho' u'_i g_i} \quad (21-5)$$

با قرار دادن رابطه (1-5) (رابطه بوزینسک) در داخل (20-5) خواهیم دید که:

$$G \approx \mu_t (u_{i,j} + u_{j,i}) \mu_{i,j} \quad (22-5)$$

پارامتر  $B$  را میتوان با استفاده از تقریب Eddy-Viscosity که در آن شار آشفته چگالی نوسان کننده<sup>۱۵۵</sup> بر حسب گرادیانهای چگالی متوسط<sup>۱۵۶</sup> بدست میآید، مدل نمود.

$$B \approx -\frac{\mu_t}{\rho \sigma_p} \rho_{,i} g_i \quad (23-5)$$

<sup>۱۵۰</sup> Shear Generation Processes

<sup>۱۵۱</sup> Turbulent Kinetic Energy (T.K.E.)

<sup>۱۵۲</sup> Mean Flow

<sup>۱۵۳</sup> Fluctuating Density Field

<sup>۱۵۴</sup> Exact Relations

<sup>۱۵۵</sup> Turbulent Flux of Fluctuating Density

<sup>۱۵۶</sup> Mean Density

که در آن  $\sigma_p$  عدد اشمیت و پرانتل جریان آشفته چگالی می باشند. (در اینجا چگالی هم مجاز به تغییرات مکانی<sup>۱۵۷</sup> و هم تغییرات زمانی می باشد).

برای جریانات چگالی ثابت، ترمehای بويانسی با استفاده از تقریب بوزینسک بصورت زیر بدست می آید:

$$B = g_i \left[ \frac{\mu_t}{\sigma_t} \beta_T T_{,i} + \frac{\mu_t}{S_t} \beta_C C_{,i} \right] \quad (24-5)$$

<sup>۱۵۷</sup> Spatial Variation

## جريانات همدماي بدون انتقال جرم<sup>۱۵۸</sup>:

برای جريانات همدماي بدون انتقال جرم، ضرائب بهينه شده عبارتند از:

Coefficient	$\sigma_k$	$\sigma_\epsilon$	$C_1$	$C_2$	$C_\mu$
Value	۱/۰	۱/۳	۱/۴۴	۱/۹۲	۰/۰۹

اين مقادير برای طيف وسعي از جريانات قابل استفاده هستند. می توان اين ضرائب را برای رسيدن به جوابهاي منطبقتر بر جوابهاي آزمایشي تغيير داد. ولیکن بايستي توجه داشت که مدل  $k - \epsilon$  نسبت به تغييرات هر چند ناچيز در برخی از اين ضرائب (بالاخص  $C_1$  و  $C_2$ ) حساس می باشد.

اگرچه تغييرات مناسب ضرائب می تواند منجر به بهبود نتایج گردد، لیکن اين امر می تواند منجر به کاهش شدید تواناييهای عمومی مدل در پيش بینی جريان و نيز نتایج و پيش بینی های ضعيف در موقعی گردد که تغييرات اندکی در هندسه جريان و نيز شرائط مرزی ايجاد می شود.

## جريانات غير هدمما و جريانات با انتقال جرم<sup>۱۵۹</sup>:

برای جريانات غير هدمما و/ يا جريانات با انتقال جرم، لازم است که مقاديری را به  $\sigma_t$  و  $S_t$  و  $\sigma_\mu$  و  $C_3$  نسبت داد. اين ضرائب (بالاخص  $C_3$ ) وابسته به جريان<sup>۱۶۰</sup> هستند. بالاخص  $C_3$  که می تواند بسته به وضعیت موضعی Thermal Stratification ، تغييرات شدیدی داشته باشند. پارامترهای  $\sigma_t$  و  $S_t$  و  $\sigma_\mu$  عموماً نزديک يك هستند و يا بايستي بصورت آزمایشي و يا بكمک كوك كردن عددی<sup>۱۶۱</sup> بdst آيند. ما در اينجا از مقادير زير استفاده می کنيم:

Coefficient	$\sigma_t$	$S_t$	$C_3$	$\sigma_\mu$
Value	۰/۹	۰/۹	۰/۸	۰/۹

نکته اي که بايستي در اينجا بدان اشاره نمود آن است که ثوابتی که در اين مدل و ساير مدلها ذكر ميگردنند، لروماً ثوابت جهاني نمی باشنند، بلکه مقدار اين ثوابت می تواند از مساله اي به مساله ديگر يا از رژيم جريانی به

<sup>۱۵۸</sup> Isothermal Flows With No Mass Transfer

<sup>۱۵۹</sup> Non-Isothermal Flows and Flows With Mass Transfer

<sup>۱۶۰</sup> Flow-Dependent

<sup>۱۶۱</sup> Numerical Tuning

رژیم جریان دیگر تغییر نماید. حتی در یک مساله خاص، برای رسیدن به جوابهای دقیق، این ثابت بایستی نقطه به نقطه تغییر کنند.

## ویژگیهای مدل استاندارد $\epsilon - k$ :

مدل استاندارد  $\epsilon - k$  وقتی در کنار رابطه Boussinesq Eddy-Viscosity بکار برد می شود، برای طیف وسیعی از مسائل نسبتاً مشکل بخوبی کار می کند. اما برای مسائلی که شامل غیرایزوتروپهای شدید جریان و نیز اثرات غیرتعادلی هستند، این مدل در نهایت به جوابهای خواهد رسید که تا حدی فوق دیفیوز<sup>۱۶۲</sup> است، یعنی مقادیر  $\mu$  که توسط این مدل پیش بینی می شود، تا حدی بزرگ خواهند بود.

بعنوان یک نتیجه مهم از این عیب موجود در این مدل، می توان گفت که این مدل تمایل به پیش بینی پروفیلهای کشیده تر<sup>۱۶۳</sup> برای جریانات Swirling و نیز ناحیه Recirculating کوتاهتر در جریانات جدایش یافته دارد. گاهای دیده شده است که این مدل، در پیش بینی هسته های جدایشی<sup>۱۶۴</sup> تشکیل شده بر روی با سطوح با انحنای ملایم، نتایج غلطی را دربرداشته است.

برای نتایج شامل اثرات غیرایزوتروپی شدید جریان، روابط Launder و Speziale و Boussinesq می شوند که از نتایج حاصل از استفاده از رابطه Boussinesq بهتر می باشند. با شناخته شدن نقاط ضعف و قوت مدل  $\epsilon - k$ ، بهینه سازی های بر روی این مدل و به منظور بهبود کارائی این مدل صورت گرفته است.

این مدل بالاخص می تواند در جریانات محصور که در آنها تنشهای برشی  $Re$  بسیار مهمند نیز مورد استفاده قرار گیرد. کاربردهای دیگر مدل  $\epsilon - k$  عبارتند از:

۱) مدلسازی انحلال ادی در احتراق

۲) محاسبه جریان بویانت و جریان سیال در داخل ساختمان

۳) جریان در یک لوله با انقباض ناگهانی

۴) مدلسازی آتش سوزی در یک اتاق تست

۵) پیش بینی جریان و انتقال حرارت در یک دسته لوله پیچیده در مبدل های حرارتی

<sup>۱۶۲</sup> Over Diffusive

<sup>۱۶۳</sup> Flatter Flow Profiles

<sup>۱۶۴</sup> Separation Bubble

۶) مدلسازی جریان آرام در یک لوله با مقطع دایره‌ای با تغییرات فشار متناوب بین ورودی و خروجی نظیر جریان درون رگهای بدن، امواج فشاری در خطوط انتقال نفت و جریان هوادر manifold موتورهای احتراق داخلی

۷) مدلسازی پراکندگی آلودگی در هوای جو و در دریاچه‌ها

۸) محاسبه و بررسی نرخ گسترش جت‌های متقارن محوری در محیط‌های ساکن

در بخش عمده‌ای از این جریانات، نرخ تولید انرژی جنبشی آشفتگی بسیار کمتر از نرخ اضمحلال است و برای غلبه بر چنین مشکلی، نیازمند تنظیمات بسیار ماهرانه و کارشناسی شده بر روی ثوابت  $C$  است. برخلاف بسیاری از موقفيت‌های مدل استاندارد  $\epsilon - k$ ، این مدل دارای جوابهای نه چندان قوی در بحث جریانات غیر محصور است. برخی دیگر از این گونه نقایص عبارتند از:

۱) مدلسازی لایه‌های برشی ضعیف

۲) مدلسازی جریانات پیچشی جریانات باکرنشهای بسیار بزرگ و سریع - لایه‌های مرزی بسیار منحنی وار و مسیرهای واگرا - جریانات دورانی و چرخشی<sup>۱۶۵</sup>

۳) جریان ثانویه در کانالهای طویل مقاطع غیر گرد.

۴) جریانات کاملاً توسعه یافته در کانالهای با مقاطع غیر گرد.

به منظور اصلاح این عیوب، تلاشهای زیادی بر روی اصلاح مدل دو معادله ای  $\epsilon - k$  صورت گرفت که به ظهور نسلهای جدیدی از مدل  $\epsilon - k$  و نیز تولد مدل‌های جدیدتر منجر شد. در ادامه به بررسی این مدلها خواهیم پرداخت.

## ۱۶۶) مدل توسعه یافته $\varepsilon - k$ - ۲-۳-۲-۲

تعداد زیادی از فرمهای مختلف مدل استاندارد  $\varepsilon - k$  وجود دارد که هدف هر یک بهبود تواناییهای این مدل در پیش بینی خواص جریان است. بسیاری از گونه های مختلف این مدل، به منظور استفاده در کاربردهای خاص ایجاد شده اند که از فرضیاتی Ad-hoc استفاده می نمایند و از این فرضیات نمی توان برای کاربردهای عمومی و حالات عمومی جریان استفاده نمود.

تعداد قلیلی از فرمهای مختلف این مدل نیز وجود دارند که به منظور گسترش تواناییهای این مدل استاندارد و برای استفاده در طیف وسیعتری از اشکال مختلف جریان ارائه شده اند. مدل  $\varepsilon - k$  بسط یافته نیز از این دسته مدلها می باشد. این مدل را می توان به همراه هر یک از سه رابطه اساسی یعنی استفاده نیز از این دسته مدلها می باشد. این مدل را می توان به همراه هر یک از سه رابطه اساسی یعنی Boussinesq, Speziale, Launder و Chen (دو تن از محققین جریانات آشفته) بیان شده است. استدلال و منطقی که در

پشت این مدل نهفته است، این است که علاوه بر مقیاس زمانی آشفتگی،  $\frac{k}{\varepsilon}$ ، مقیاس زمانی دیگری به صورت  $\frac{\rho k}{G}$  نیز وجود دارد که به کمک آن می توان نرخ اضمحلال ویسکوز را به نرخ کرنش متوسط در جریان مرتبط ساخت. با این استدلال آنها معادله نظری  $\varepsilon$  در مدل استاندارد را به فرم ذیل تغییر دادند:

$$\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \rho u_j \varepsilon_{,j} = \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \varepsilon_{,j} \right)_{,j} + C_1 \frac{\varepsilon}{k} G + C_1 (1 - C_3) \frac{\varepsilon}{k} B - C_2 \rho \frac{\varepsilon^2}{k} + C_4 \frac{G^2}{\rho k} \quad (25-5)$$

برای جریاناتی که در آنها آشفتگی به صورت موضعی در حالت تعادل قرار دارد،  $G = \rho k$  ، دو مقیاس زمانی با یکدیگر برابر هستند. برای جریاناتی که در خارج از حالت تعادل قرار دارند،  $G > \rho k$ ، مقیاس زمانی

دوم  $\frac{\rho k}{G}$  کوچکتر از مقیاس زمانی اول  $\frac{k}{\varepsilon}$  می باشد. همانطور که مشاهده می شود، معادله  $\varepsilon$  اصلاح شده

شامل ضریب  $C_4$  نیز هست. این دو نفر علاوه بر پیشنهاد برای مقدار  $C_4$ ، دیگر مقادیر مدل استاندارد را مورد اصلاح و بازبینی قرار داده اند:

$\sigma_k$	$\sigma_\varepsilon$	$C_1$	$C_2$	$C_4$
۰/۷۵	۱/۱۵	۱/۱۵	۱/۹	۰/۲۵

<sup>۱۶۶</sup> Extended K-e Model

## ویژگیهای مدل توسعه یافته $k-\varepsilon$ :

مدل  $k-\varepsilon$  توسعه یافته با ضرائب اصلاح شده پیشنهادی، برای جریانات ساده همان نتایج مدل استاندارد را خواهد داد، ولی برای جریانات پیچیده ای نظیر StreamLine Curvature, Recirculation و نیز جریانات Swirl نتایج بهتر و دقیقتری را نسبت به مدل استاندارد به وجود خواهد آورد. در مواردی که جوابهای مدل استاندارد در مقایسه با جوابهای آزمایشی دقت خوبی ندارند، بهتر است از مدل توسعه یافته استفاده نمود.

## :RNG $k - \varepsilon$ مدل (۲-۳-۳-۴)

یاخوت و همکارانش<sup>۱۶۷</sup> گونه جدیدی از مدل  $\varepsilon - k$  را ارائه نموده اند که مشخصات و ویژگیهای عملکردی آن در مقایسه با مدل استاندارد بهینه شده است.

مدل پیشنهادی آنها بر مبنای تئوری Renormalized Group قرار داشته و از همینرو به آن RNG گفته می‌شود. مدل  $RNG k - \varepsilon$  در شکل ظاهری خود، بسیار شبیه به دو مدل استاندارد و بسط یافته می‌باشد. درست همانند مدل بسط یافته  $\varepsilon - k$ ، این مدل نیز از یک ترم اضافی در معادله  $\varepsilon$  خود بهره می‌برد. توجه داشته باشید که مقادیر ضرائب این مدل نسبت به مدل بسط یافته متفاوت می‌باشد. از این مدل نیز می‌توان در کنار سه رابطه اساسی Launder و Speziale Boussinesq استفاده نمود.

فرم کلی معادلات در مدل  $RNG k - \varepsilon$  به صورت زیر می‌باشد:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho u_j k_{,j} = \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} k_{,j} \right)_{,j} + G + B - \rho \varepsilon \\ \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \rho u_j \varepsilon_{,j} = \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \varepsilon_{,j} \right)_{,j} + C_1 \frac{\varepsilon}{k} G + C_1 (1 - C_3) \frac{\varepsilon}{k} B - C_2 \rho \frac{\varepsilon^2}{k} - \frac{C_\mu \eta^3 \left( 1 - \frac{\eta}{\eta_*} \right)}{1 + \beta \eta^3} \frac{\varepsilon^2}{k} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (26-5\text{-الف}) \\ (26-5\text{-ب}) \end{array}$$

در معادله (26-5-ب)، ترم اضافی شامل پارامتر  $\eta$  نیز می‌باشد که بیانگر نسبت زمان مشخصه آشفتگی به زمان مشخصه میدان جریان است. بنابراین این مدل اثرات Off-Equilibrium را نیز مد نظر قرار داده است.

$$\eta = S \frac{k}{\varepsilon} \quad \text{Where } S = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}} = \sqrt{\frac{G}{\mu_t}}, \quad S_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (27-5)$$

می‌توان نشان داد که  $\eta$  تابعی از نسبت  $\frac{\text{Generation of } k}{\text{Dissipation of } k}$  بوده و می‌توان آنرا به صورت زیر بیان نمود:

$$\eta = \sqrt{C_\mu^{-1} \frac{G}{\rho \varepsilon}} \quad (28-5)$$

معادله (28-5) نشان دهنده آن است که  $\eta$  بیانگر ویژگیهای تعادلی میدان جریان آشفته می‌باشد.

ضرائب اصلی مدل RNG برای جریانات همدماب عبارتند از:  $C_\mu, C_1, C_2, \sigma_k, \sigma_\varepsilon$ . دو ضریب دیگر یعنی  $\beta, \eta$  را می‌توان مستقیماً با استفاده از این ضرائب و نیز ثابت فن کارمن  $k$  به دست آورد.

<sup>۱۶۷</sup> Yakhout, et al

یاخوت و همکاران ضرائب ذیل را برای این مدل پیشنهاد نموده اند:

$\sigma_k$	$\sigma_\varepsilon$	$C_\mu$	$C_1$	$C_2$	k
۰/۷۱۷۹	۰/۷۱۷۹	۰/۰۸۵	۱/۴۲	۱/۶۸	۰/۳۸۷۵

با استفاده از این ضرائب، مقادیر  $\beta, \eta$  به صورت زیر به دست می آیند:

$$\eta = 4.38, \beta = 0.015$$

این مقادیر به عنوان مقادیر اصلی ضرائب که توسط یاخوت و همکاران ارائه شده، محسوب می شوند. اما آزمایشات عددی نشان داده اند که چنانچه به جای ضرائب پیشنهادی سازندگان مدل، از ضرائب اصلاح شده

استفاده گردد، نتایج بهتری حاصل می گردد:

$\sigma_k$	$\sigma_\varepsilon$	$C_\mu$	$C_1$	$C_2$	k
۰/۸	۱/۱۵	۰/۰۸۶۵	۱/۴۵	۱/۸۳	۰/۴۱

### RNG k- $\varepsilon$ ویژگیهای مدل

برای جریانات ساده که در آن آشفتگی در حالت تعادل موضعی قرار دارد، این مدل نتایجی شبیه به مدل استاندارد  $\kappa - \epsilon$  ارائه می کند. برای جریانات Off-Equilibrium، بالاخص آنهائی که دارای استاندارد  $\kappa - \epsilon$  نتایجی را ارائه می نماید که دارای Diffusive کمتری هستند. به عبارت دیگر می توان اینطور بیان کرد که مقادیر پیش بینی شده  $\mu$  دیگر خیلی بزرگ نمی شوند و این خود یک مزیت محسوب می شود. این مدل، علاوه بر دیگر ویژگیهای مدل استاندارد  $\kappa - \epsilon$ ، دارای خواص ذیل نیز می باشد:

۱- به واسطه داشتن ترمهای اضافی در معادله  $\epsilon$ ، تحلیل جریانات سریعاً کرنش یافته<sup>۱۶۸</sup> و جریانات بر روی سطوح با انحنای های زیاد<sup>۱۶۹</sup> بهبود یافته است.

۲- اثرات Swirl بر روی آشفتگی جریان وارد شده است.

۳- در مدلسازی جریانات گذرا ( Transitional Flows ) توانایی بالائی دارد.

۴- انتقال جرم و ممنتوم از دیواره در این مدل بهتر پیش بینی می شود.

<sup>۱۶۸</sup> Rapidly Strained Flows

<sup>۱۶۹</sup> High Streamline Curvature

## ۴-۳-۲-۲ مدل $k - \varepsilon$ غیر ایزوتropیک:

مدل آشفته  $\varepsilon - k$  غیر ایزوتropیک، نسخه ای از مدل استاندارد است که شامل ترمهای در معادله  $\varepsilon$  است که این ترمهای مربوط به ساختار غیر ایزوتropیک میدان جریان آشفته می باشند. این ترمهای بر مبنای ترمهای بکار رفته در مدل تنش رینولدز<sup>۱۷۰</sup> ارائه شده اند. هدف این ترمهای اضافی، بهبود قابلیت مدل در پیش بینی اثرات غیر ایزوتropیک جریان است که نمی توان این اثرات را توسط مدلها دو معادله ای به خوبی مدل نمود.

این اثرات در جریانات پیچیده و مشکل، نظیر Strong Curvature, Swirl و نیز جریانات دارای Body Force (مانند جابجای آزاد و جریانات شدیداً چرخشی) و جریانات ثانویه<sup>۱۷۱</sup> به چشم می خورد.

ساختار غیر ایزوتropیک جریانات آشفته تنها به کمک یکی از دو معادله اساسی Launder و Speziale قابل پیش بینی است. مدل آشفته  $\varepsilon - k$  غیر ایزوتropیک را نمی توان در کنار رابطه اساسی Boussinesq استفاده نمود، چرا که این رابطه توانایی مدل نمودن ساختارهای غیر ایزوتropیک جریانات آشفته را ندارد.

فرم کلی معادلات  $\varepsilon - k$  غیر ایزوتropیک درست شبیه به مدل استاندارد  $\varepsilon - k$  می باشد:

$$\rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho u_j k_{,j} = \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} k_{,j} \right)_{,j} + G + B - \rho \varepsilon \quad (29-5\text{-الف})$$

$$\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \rho u_j \varepsilon_{,j} = \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \varepsilon_{,j} \right)_{,j} + C_1 \frac{\varepsilon}{k} G + C_1 (1 - C_3) \frac{\varepsilon}{k} B - C_2 \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (29-5\text{-ب})$$

مدل  $\varepsilon - k$  غیر ایزوتropیک نسبت به مدل استاندارد در ضرائب  $C_1, C_2$  متفاوت هستند:

$$C_1 = 1.125 (\text{Launder}) = 1.085 (\text{Speziale})$$

$$C_2 = \frac{192}{\left( 1 + 0.9 A^{\frac{1}{2}} A_2 \right)}$$

$$A = 1 - \frac{9}{8} (A_2 - A_3)$$

$$A_2 = a_{ij} a_{ji}$$

$$A_3 = \overline{a_{ij} a_{jk} a_{ki}}$$

$$a_{ij} = \left( \frac{u'_i u'_j}{k} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \right) \text{Anisotropy Tensor}$$

<sup>۱۷۰</sup> RSM

<sup>۱۷۱</sup> Secondary Flows

این معادلات نشان می دهند که ضریب  $C_2$  وابسته به تانسور غیر ایزوتروپ  $a_{ij}$  ( به دست آمده از تنش رینولدز ) می باشد. تانسور تنش رینولدز مورد نیاز در این بحث را می توان از یکی از دو معادله اساسی Launder و ya Speziale به دست آورد.

## ۱۷۲) مدل ویلکوکس $k - \omega$

حالت عمومی مدل‌های  $k - \omega$  از فرکانس آشفتگی  $\omega$  بجای نرخ اضمحلال لزج  $\varepsilon$  برای مشخص کردن آشفتگی استفاده می‌کند. چنین مدل‌هایی بطور واضحی به انواع مدل  $\varepsilon - k$  نزدیک و مرتبط می‌باشند. ما در اینجا به بررسی نوع Wiclox مدل  $k - \omega$  می‌پردازیم.

در مدل  $k - \omega$ ، ارتباط بین مقیاس آشفتگی طولی و سرعتی یعنی  $\delta_t$  و  $u_t$  با  $\mathbf{k}$  و فرکانس آشفتگی  $\omega$  توسط روابط زیر داده شده‌اند:

$$\delta_t \propto \frac{\sqrt{k}}{\omega} \quad (30-5)$$

$$u_t \propto \sqrt{k} \quad (30-5)$$

همانطور که دیده می‌شود، تغییری در روابط اساسی و طول مقیاسها و .... دیده نمی‌شود.

فرکانس آشفتگی  $\omega$  را می‌توان توسط عبارت  $\varepsilon = \omega k$  به مقادیر  $\mathbf{k}$  و  $\omega$  مربوط ساخت. و ویسکوزیتۀ آشفتگی  $\mu_t$  نیز توسط رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\mu_t = C_\mu \rho \frac{k}{\omega} \quad (31-5)$$

معادلات انتقال برای  $\mathbf{k}$  و  $\omega$  در مدل Wiccox عبارتند از :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho u_j k_{,j} = \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} k_{,j} \right)_{,j} + G + B - \rho \omega k \\ \rho \frac{\partial \omega}{\partial t} + \rho u_j \omega_{,j} = \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \omega_{,j} \right)_{,j} + C_1 \frac{\omega}{k} G + C_1 (1 - C_3) \frac{\omega}{k} B - C_2 \rho \omega^2 \end{array} \right. \quad (32-5)$$

$$\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right. \quad (32-5)$$

ضرائب مدل Wiccox نیز بكمک جدول زیر تعیین می‌شوند.

$\sigma_k$	$\sigma_\varepsilon$	$C_\mu$	$C_1$	$C_2$
۲	۲	۰/۰۹	۰/۵۵۵	۰/۸۳۳۳

## ویژگیهای مدل ویلکوکس $k - \omega$

مدل Wilcox  $k - \omega$  نسبت به مدل استاندارد  $\epsilon - k$  در جریاناتی که شامل کاهش سرعت<sup>۱۷۳</sup> و جدایش ناشی از گرادیان فشار معکوس می باشند، بهتر عمل می کند. مدلهای  $\epsilon - k$  از آنجا که از دسته مدلهای رینولدز بالا می باشند ( یعنی فقط در نواحی با عدد رینولدز بالا نتایج خوبی را ارائه می کنند )، برای حل معادلات در نواحی نزدیک دیواره ( که بطور موضعی جزو نواحی با عدد رینولدز پائین محسوب می شوند )، با مشکلات عدیده ای مواجه می شوند. ولیکن مدل Wilcox  $k - \omega$  را می توان برای پیش بینی تغییرات متغیرهای آشفته تا لب دیواره های جامد ( و البته با استفاده از المانهای متراکم نزدیک دیواره ) مورد استفاده قرار داد.

مدل Wilcox مقادیری را که برای نرخ پراکندگی جریانات آزاد برشی<sup>۱۷۴</sup> پیش بینی می نماید، دارای تطابق نزدیکی با مقادیر اندازه گیری شده برای گردابه های دور<sup>۱۷۵</sup>، لایه های اختلاطی<sup>۱۷۶</sup>، جتھای صفحه ای، گرد و شعاعی<sup>۱۷۷</sup> می باشد و لذا از این مدل می توان برای هم جریانات محصور به دیواره و هم البته تا حدودی برای جریانات آزاد برشی استفاده نمود.

<sup>۱۷۳</sup> Deceleration

<sup>۱۷۴</sup> Free Shear Flow Spreading Rates

<sup>۱۷۵</sup> Far Wakes

<sup>۱۷۶</sup> Mixing Layers

<sup>۱۷۷</sup> Plane, Round , Radial Jets

## ۶-۳-۲-۲ مدل انتقال نش برشی $\omega - k$ <sup>۱۷۸</sup>:

مدل  $SST.K - \omega$  توسط منتر<sup>۱۷۹</sup> و به منظور آمیختن فرمولبندی دقیق و قدرتمند مدل  $k - \omega$  در نواحی نزدیک دیواره با مدل  $\epsilon - k$  مستقل از جریان آزاد در نواحی دور از دیواره ارائه شده است. یعنی این مدل بطور همزمان، توانائی بالای مدل  $k - \omega$  در نواحی با عدد رینولدز پائین و توانائی بالای مدل  $\epsilon - k$  در نواحی با عدد رینولدز بالا را در اختیار گرفته است. برای این ترکیب دو مدل، نیازمند آن هستیم که فرمول بندی مدل  $\epsilon - k$  را بشك مدل  $k - \omega$  در بیاوریم.

مدل  $SST.K - \omega$  بسیار شبیه به مدل استاندارد  $k - \omega$  است و لیکن شامل بهینه سازیهای زیر نیز میباشد: (لازم به ذکر است که مدل استاندارد  $\omega - k$  بر مبنای مدل Wilcox  $k - \omega$  قرار دارد که حاوی اصلاحاتی در اثرات عدد رینولدز پائین، تراکم پذیری<sup>۱۸۰</sup> و پراکندگی جریان برشی<sup>۱۸۱</sup> می باشد.)

الف) مدل استاندارد  $\omega - k$  و شکل تبدیل یافته مدل  $\epsilon - k$  هر دو در یکتابع آمیختگی<sup>۱۸۲</sup> ضرب شده و آنگاه دو مدل با یکدیگر جمع می شوند.

تابع آمیختگی طوری طراحی شده است که در نواحی نزدیک دیوار دارای مقدار یک (که باعث فعال شدن مدل  $\omega - k$  در آن نواحی می شود) و در نواحی دور از دیوار دارای مقدار صفر (که باعث فعال شدن شکل تبدیل یافته مدل  $\epsilon - k$  می شود) می باشد. توجه شود که اگر چه این روش می تواند قابلیتهای هر دو مدل را افزایش قابل توجهی بدهد، لیکن به واسطه فرآیند سوئیچ شدن از یک مدل به مدل دیگر، این مدل اغلب با رفتارهای ناپایداری و یا همگرایی های ضعیفی مواجه می گردد.

ب) مدل SST دارای یک Damped Cross Diffusion Derivative Term در معادله  $\omega$  است.

ج) تعریف ویسکوزیتۀ آشفتگی  $\mu$  به منظور به حساب آوردن اثرات انتقال تنشهای برشی اصلی جریان آشفته مورد تغییر قرار گرفته است.

د) ثوابت مدل نسبت به مدل استاندارد  $\omega - k$  تغییر یافته است.

<sup>۱۷۸</sup> Shear Stress Transport (SST) K-w Model  
<sup>۱۷۹</sup> Menter

<sup>۱۸۰</sup> Compressibility

<sup>۱۸۱</sup> Shear Flow Spreading Blending Function

این خصوصیات باعث شده است که مدل  $SST.K - \omega$  برای دسته وسیعی از جریانات ( همانند جریانات حاوی گرادیان فشار معکوس، ایرفوبلها و موج شوک گذرا<sup>۱۸۳</sup>) نسبت به مدل استاندارد  $\omega - k$  بسیار دقیقتر و مطمئن تر باشد.

## مقایسه کلی مدل‌های صفر معادله ای با مدل‌های دو معادله ای:

در مقایسه کلی مدل‌های دو معادله ای با مدل‌های صفر معادله ای، ذکر نکات ذیل ضروری به نظر می‌رسد:

۱- از نقطه نظر کارائی و کاربرد، مدل‌های دو معادله ای دقیق‌تر و عمومی‌تر بوده و به کرات مورد استفاده

قرار می‌گیرند.

۲- استفاده از مدل‌های دو معادله ای، مستلزم حل دو معادله انتقالی اضافی است که می‌تواند منجر به

افزایش قابل توجهی در CPU-Time روش عددی گردد. به علاوه مطرح شدن معادلات  $\epsilon, k$  (و

یا  $\omega, k$ ) باعث افزایش قابل توجهی در غیر خطی بودن و وابستگی معادلات کلی جریان به یکدیگر

می‌گردد که این امر می‌تواند باعث ناپایداری خواص همگرائی فرآیند حل عددی گردد. لیکن در

مقابل، مدلسازی‌های جریانات آشفته ای که با استفاده از مدل‌های صفر معادله ای صورت می‌پذیرد،

خواص همگرائی و پایداری بهتری را در مقایسه با مدل‌های دو معادله ای نشان می‌دهند.

## راههای رسیدن به جوابهای همگرا شده واقعی و منطبق بر فیزیک جریان:

برخی از عواملی که می‌تواند سیمای فیزیکی و عددی مدلسازی‌های جریانات آشفته را متأثر از خود نماید، عبارتند از:

۱- شرایط مرزی<sup>۱۸۴</sup>

۲- تراکم مش و توزیع فضائی آن<sup>۱۸۵</sup>

۳- فرآیند حل<sup>۱۸۶</sup>

واضح است که برای مدلسازی جریانات آشفته، لازم است که دانش و آگاهی کافی راجع به این جریانات و نیز مدلها م وجود و توانایی هر یک وجود داشته باشد. این دانش ما را قادر خواهد ساخت که مدل آشфтگی بهینه را بر مبنای دقت مورد نیاز و CPU Time و CPU Resources انتخاب نمود. این دانش همچنین این توانایی را به ما خواهد داد تا بتوان ارزیابی صحیحی از جواب داشت و بتوان در مورد واقعی و فیزیکی بودن جوابهای بدست آمده اظهار نظر نمود. انجام چنین ارزیابیهایی بر روی جواب به دست آمده، اغلب مستلزم انجام دادن عملیاتهای اضافی نظیر چک کردن حساسیت جواب به دست آمده به شرایط مرزی انتخاب شده و نیز شکل و توزیع المانهای میدان و دیگر پارامترهای عددی یا فیزیکی مساله می‌باشد.

<sup>۱۸۴</sup> Boundary Conditions

<sup>۱۸۵</sup> Mesh Density and Spatial Distribution  
<sup>۱۸۶</sup> Solution Procedure

## شرایط مرزی برای مدل‌های دو معادله‌ای:

یکی از تفاوت‌های اساسی بین مدل‌های دو معادله‌ای با مدل‌های صفر معادله‌ای آن است که در استفاده از مدل‌های دو معادله‌ای، برای متغیرهای اساسی آشفتگی (یعنی معادلات  $k$ ,  $\varepsilon$  و یا  $k, \omega$ ) در مرزهای دامنه محاسباتی بایستی مقادیری را به عنوان شرایط مرزی تعیین نمود. (دقت شود وقتی مقداری را برای  $\varepsilon$  به عنوان شرط مرزی تعیین می‌شود، با توجه به رابطه  $\varepsilon = k\omega$  این مقدار خود به خود برای کمیت  $\omega$  نیز محاسبه خواهد شد، لذا در ادامه بحث وقتی صحبت از شرط مرزی راجع به  $\varepsilon$ ,  $k$  می‌شود، خود به خود و بر طبق رابطه  $\varepsilon = k\omega$ , شرط مرزی مورد نیاز  $k, \omega$  نیز تعیین می‌گردد).

به طور کلی با ۵ نوع مختلف از مرزهای محاسباتی در مدل‌سازی جریان مواجه می‌شویم:

۱ - ورودی یا Inlet

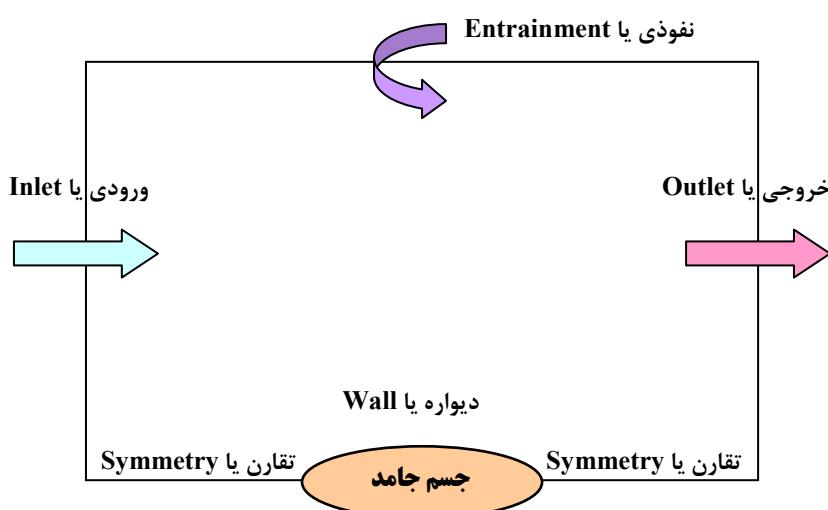
۲ - خروجی یا Outlet

۳ - تقارن یا Symmetry

۴ - دیواره یا Wall

۵ - نفوذی یا Entrainment

شماییک شرایط مرزی در شکل ذیل نشان داده شده است:



شکل (۱): شرایط مرزی به کار رفته در روشهای عددی

## شرایط مرزی ورودی برای مدلهای دو معادله ای:

در مرزهای مربوط به شرایط مرزی ورودی، بایستی از شرایط مرزی از نوع دریچله<sup>۱۸۷</sup> برای  $k, \varepsilon, \omega$  استفاده نمود. به طور کلی می‌توان اینطور اظهار نمود که سطح و شکل پروفیلهای  $k, \varepsilon, \omega$  در مرزهای ورودی برای مسائل مختلف جریانی یکتا می‌باشد. معمولاً این پروفیلهای Level آنها توسط اندازه‌گیری‌های آزمایشی به دست می‌آید. اما در اغلب موارد هیچ نتیجه آزمایشی یا روابط تئوریک برای تعیین این پروفیلهای وجود ندارد.

دو حالتی که اغلب در جریانات با آنها مواجه می‌گردیم، عبارتند از:

الف) جریانات خارجی / جریانات غیر محصور<sup>۱۸۸</sup>

ب) جریانات داخلی یا نسبتاً محصور<sup>۱۸۹</sup>

مطلوبی که در ادامه می‌آید، فرآیند مورد نیاز برای رسیدن به تخمینی قابل قبول از مشخصه‌های  $\varepsilon, k$  برای دو موقعیت متفاوت فوق را توضیح می‌دهد.

<sup>۱۸۷</sup> Dirichlet

<sup>۱۸۸</sup> External/Unconfined Flows

<sup>۱۸۹</sup> Internal or Partially Confined Flows

## الف) جریانات خارجی / جریانات غیر محصور:

### الف-۱- تخمین $k$ :

برای رسیدن به تخمین قابل قبولی از  $k$  برای جریانات خارجی و غیر محصور، ابتدا بایستی یک "مقیاس سرعت مشخصه از جریان متوسط"<sup>۱۹۰</sup> برای جریان مشخص نمود. (به عنوان مثال سرعت جریان آزاد  $U_\infty$ ).).

آنگاه می‌توان مقدار مشخصه نظیر  $k$  را از رابطه ذیل به دست آورد:

$$k = \mathfrak{I} U_\infty^2 \quad (33-5)$$

که در آن  $\mathfrak{I}$  شدت آشفتگی بوده که قبلاً تعریف شده است. مقدار شدت آشفتگی برای برخی از جریانات دارای محدوده ذیل می‌باشد:

$$\mathfrak{I} = \begin{cases} O(0.1); & \text{For Shear Flows (Wakes, Jets, etc.)} \\ O(0 \sim 0.001); & \text{For Shear - Free Flows} \end{cases}$$

در برخی از جریانات بدون برش، همانند همان حالتی که در جریانات تونل باد مشاهده می‌شود، تعریف دیگری از شدت آشفتگی،  $I$ ، مورد استفاده قرار می‌گیرد:

$$I = \frac{\left(\overline{u'^2}\right)^{1/2}}{U_\infty} \quad (34-5)$$

مقدار  $k$  نیز با استفاده از رابطه ذیل به دست می‌آید:

$$k = 1.5(IU_\infty)^2 = 1.5\left(\overline{u'^2}\right) \quad (35-5)$$

### الف-۲- تخمین $\epsilon$ :

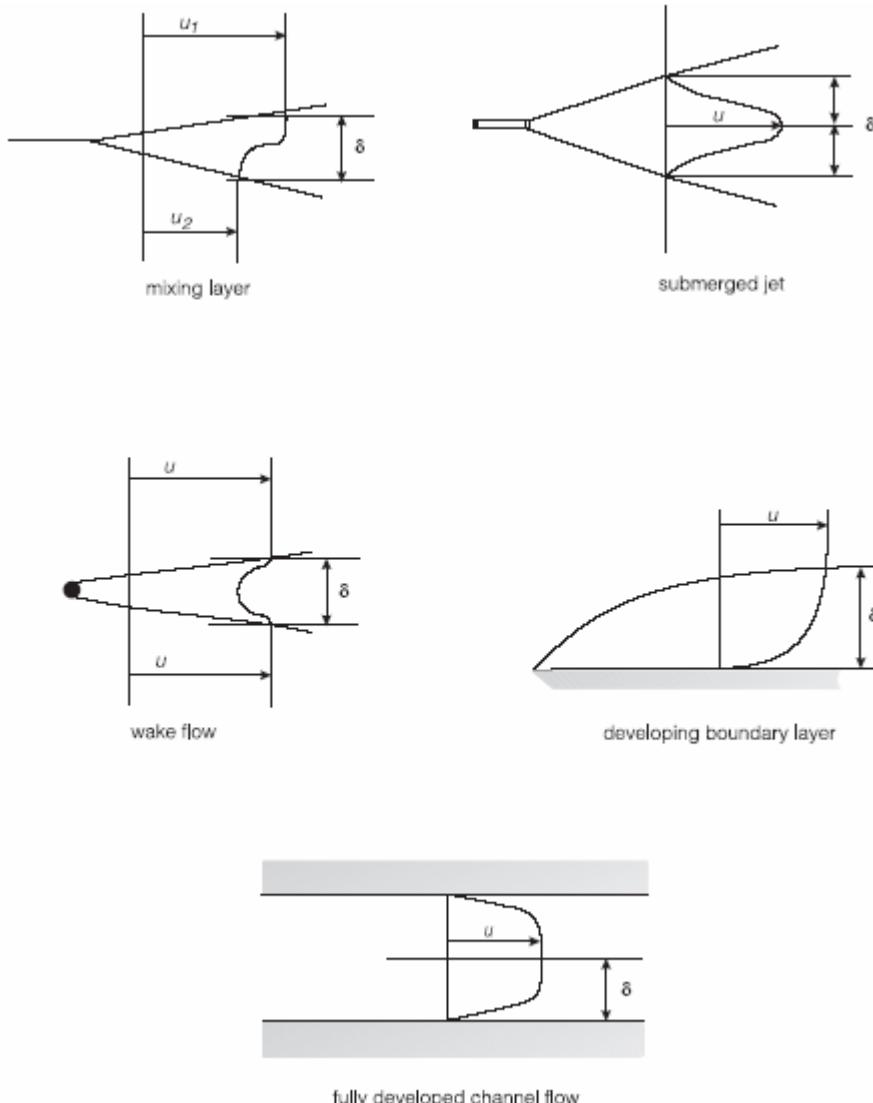
مقادیر مشخصه  $\epsilon$  را می‌توان به دو طریق تعیین نمود. البته این امر بستگی به این دارد که آیا مقیاس طول مشخصه ادیها یا  $\delta_1$  را می‌توان در مرز ورودی مشخص نمود (برای Free-Shear Flows)، و یا نمیتوان تعیین نمود (برای Shear-Free Flows).

چنانچه بتوان برای Free-Shear Flows مقدار "طول مقیاس ادی"<sup>۱۹۱</sup> را مشخص نمود،  $\epsilon$  را می‌توان توسط رابطه ذیل به دست آورد:

<sup>۱۹۰</sup> Characteristic Velocity Scale of the Mean Flow  
<sup>۱۹۱</sup> Eddy Length Scale

$$\varepsilon = \frac{k^{\frac{3}{2}}}{\delta_l} \cong \frac{k^{\frac{3}{2}}}{0.1\delta} \quad (36-5)$$

که  $\delta$  عرض مشخصه لایه برشی، Shear Layer، در صفحه ورودی است:



شکل (۲): شماتیک تعریف ضخامت لایه برشی  $\delta$  برای جریانات مختلف

چنانچه طول مقیاس ادی را نتوان تعیین نمود، یعنی طول مشخصه جریان متوسط و یا میدانهای آشفتگی در

دست نباشند، مقدار مشخصه  $\delta$  را می‌توان توسط رابطه ذیل به دست آورد:

$$\varepsilon = \rho C_\mu \frac{k^2}{R_\mu \mu} \quad (37-5)$$

که در آن  $R_\mu = \frac{\mu_t}{\mu}$  نسبت بین ویکوزیته آشفته به آرام است. عموماً مقدار  $R_\mu$  برای یک مساله خاص از یک

نقشه به نقطه دیگر تغییرات بسیار متنوعی خواهد داشت، لیکن برای اغلب مسائل، پس از چند مرتبه سعی و

خطا می‌توان مقدار قابل قبولی را برای  $R_\mu$  بدست آورد. به عنوان مثال:

$$R_\mu \approx \begin{cases} O(1) & \text{For Free-Shear Flows with Very Low Levels of Turbulence} \\ O(10^1) - O(10^2) & \text{For Most Typical Flows} \end{cases}$$

### الف) جریانات داخلی یا نسبتاً محصور:

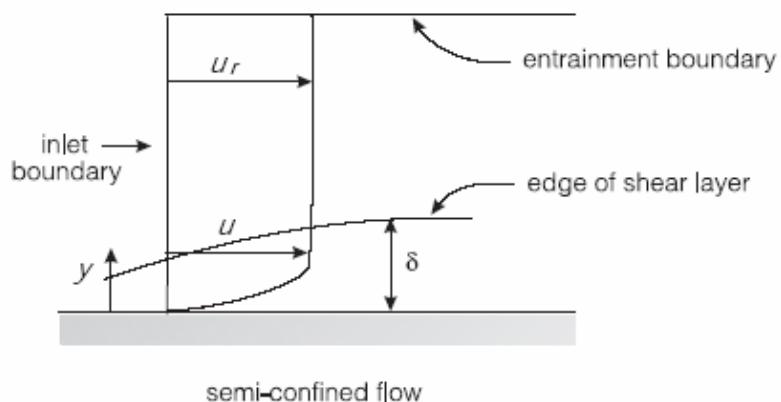
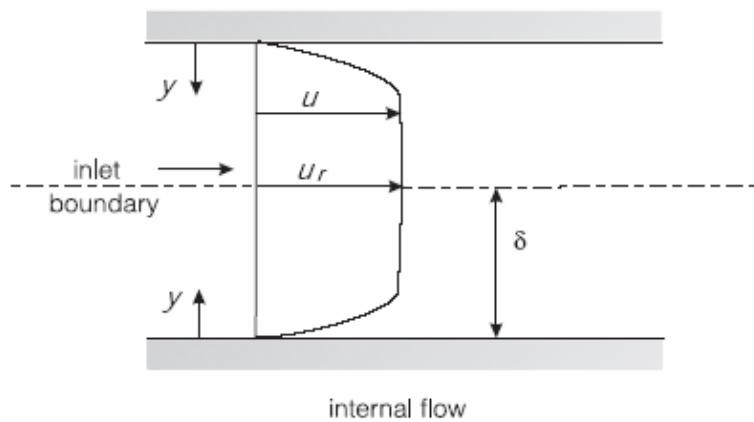
تخمین  $k, \varepsilon$

در موارد جریانات داخلی و یا جریانات تماماً محصور و نیز جریانات نسبتاً محصور نظیر جریانات لایه مرزی، از عبارت ذیل می‌توان برای رسیدن به پروفیل‌های مناسب برای  $k, \varepsilon$  استفاده نمود:

$$k = C_{\mu}^{\frac{1}{2}} \left( l_m \frac{du}{dy} \right)^2 \quad (38-5)$$

$$\varepsilon = C_{\mu} k^2 \left( l_m^2 \left| \frac{du}{dy} \right| \right)^{-1} \quad (39-5)$$

که در آن  $l_m$  همان طول اختلاطی جریان است که پیش از این در مورد تعیین مقدار آن بحث شده است.  $u$  نیز مولفه سرعت در جهت جریان در جهت عمودی و  $y$  محور مختصات عمود بر نزدیکترین دیواره است.



شکل (۳): شکل جریان در مرز ورودی برای جریانات تماماً محصور یا نیمه محصور

چنانچه صفحه ورودی در ناحیه ای قرار گرفته باشد که دور از موانع جریانی<sup>۱۹۲</sup> قرار داشته باشد، در اینصورت پروفیل سرعت در صفحه ورودی را می توان تقریباً با یک پروفیل Power-Law به شکل زیر تقریب زد:

$$\frac{u}{u_r} = \left( \frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{h}} \quad (40-5)$$

که سرعت  $u_r$  در شکل فوق نشان داده شده است. توان  $h$  یک کمیت وابسته به عدد رینولدز بوده و از جدول ذیل تعیین می گردد:

$\frac{\rho u_r \delta}{\mu}$	$h$
$4 \times 10^3$	6.0
$2.3 \times 10^4$	6.6
$1.1 \times 10^5$	7.0
$1.1 \times 10^6$	8.8
$2.0 \times 10^6$	10.0
$3.2 \times 10^6$	10.0

---

<sup>۱۹۲</sup> Flow Obstacles

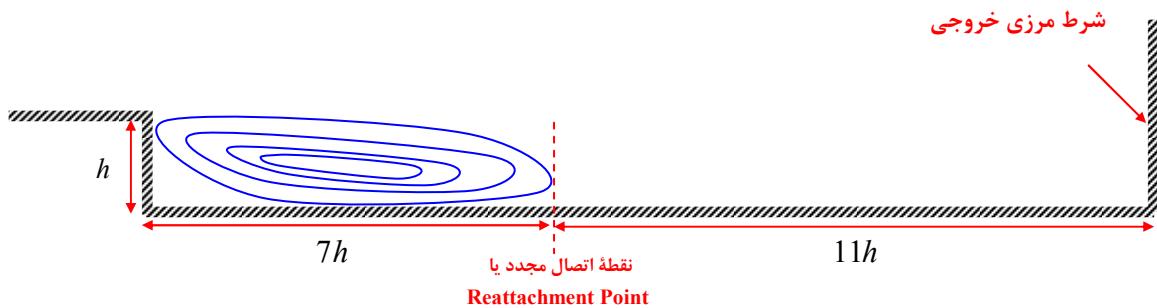
## شرایط مرزی خروجی و تقارن برای مدل‌های دو معادله ای:

مناسبترین شرط مرزی برای  $k, \varepsilon$  در مرزهای خروجی و تقارنی، همان شرط نیومن<sup>۱۹۳</sup> می‌باشد که در آن گرادیان کمیت مورد نظر در جهت عمود بر مرز مساوی صفر قرار داده می‌شود:

$$\frac{\partial k}{\partial n} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial n} = 0 \quad (41-5)$$

پیش از ادامه بحث لازم است نکته‌ای در مورد شرایط مرزی خروجی ذکر گردد. در طراحی شبکه محاسباتی یا Grid باystsی مطمئن بود که شرط مرزی خروجی از نوع نیومن، به اندازه کافی از نواحی دارای "اختلالات بزرگ جریانی"<sup>۱۹۴</sup> دور باشد. به عنوان مثال چنانچه جریان عبوری از یک پله مد نظر مدل‌ساز باشد، صفحه خروجی دامنه انتخاب شده باystsی به حد کافی در پائین دست نقطه Reattachment قرار داشته باشد تا بدین وسیله بتوان از برهمکنشهای مضر بین مرز خروجی نیومن با شکل جریان در ناحیه Recirculation جلوگیری به عمل آورد.

به طور مشخص برای جریان عبوری از روی یک پله، اندازه در راستای جریان Recirculation Bubble یا همان طول اتصال مجدد، Reattachment Length، تقریباً ۷ برابر ارتفاع پله است. صفحه خروجی حداقل باystsی ۱/۵ برابر Recirculating Length یعنی تقریباً ۱۱ برابر ارتفاع پله در پائین دست نقطه Reattachment باشد.



شکل (۴): یک جریان جدایش یافته از روی یک پله و سیرکولاسیون پس از آن

<sup>۱۹۳</sup> Neumann  
<sup>۱۹۴</sup> Large Perturbation

## شرط مرزی نفوذی برای مدل‌های دو معادله ای:

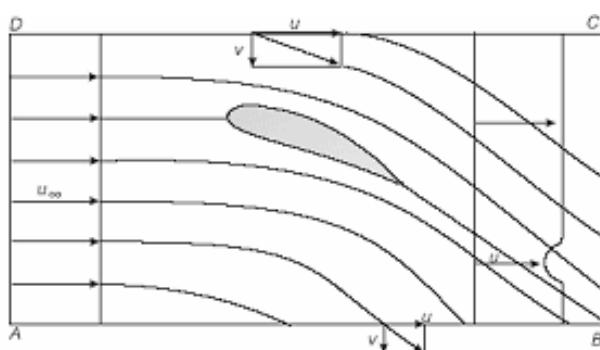
شرط مرزی های نفوذی گاهاً در جریانات خارجی<sup>۱۹۵</sup> و نیز جریانات نیمه محصور<sup>۱۹۶</sup> مشاهده می شود. دو نوع مرز نفوذی داریم که هر یک را می توان به راحتی و به کمک نسبت اندازه سرعت نفوذی<sup>۱۹۷</sup> به سرعت مماسی<sup>۱۹۸</sup> از یکدیگر تمیز داد:

$$\text{الف) نسبتهای کوچک} \frac{\text{Entrainment Velocity}}{\text{Tangential Velocity}}$$

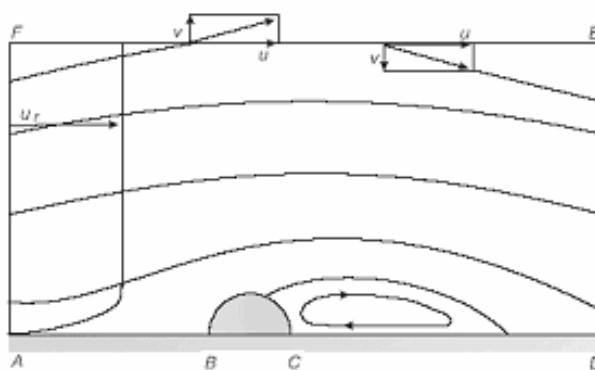
$$\text{ب) نسبتهای بزرگ} \frac{\text{Entrainment Velocity}}{\text{Tangential Velocity}}$$

$$\text{الف) نسبتهای کوچک} : \frac{\text{Entrainment Velocity}}{\text{Tangential Velocity}}$$

در شکل زیر نمونه هایی از مرزهای نفوذی که در آنها سرعت نفوذ جریان (سرعت عمود بر مرز) به نسبت سرعت مماسی کوچک می باشد، نشان داده شده است.



صفحات AB , DC مرزهای نفوذی هستند.



صفحة FE یک مرز نفوذی می باشد.

شکل (۵): مرزهای نفوذی که در آنها سرعت نفوذی در مقایسه با سرعت مماسی کوچک می باشند.

<sup>۱۹۵</sup> External Flows

<sup>۱۹۶</sup> Semi-Confining Flows

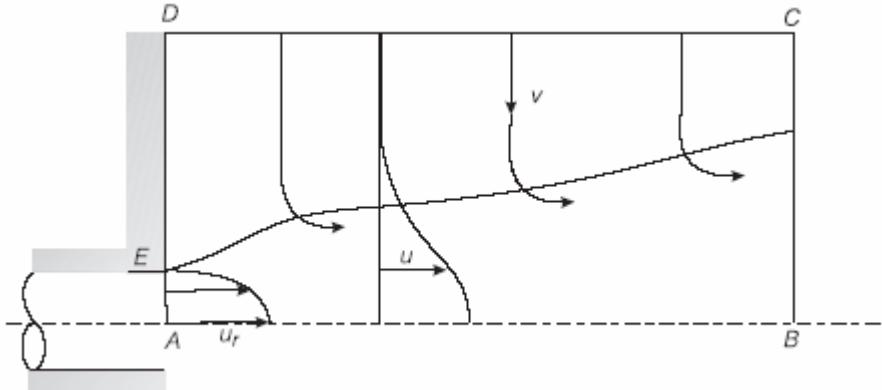
<sup>۱۹۷</sup> Entrainment Velocity

<sup>۱۹۸</sup> Tangential Velocity

شرط مرزی مناسب برای معادله ممتومن، استفاده از Zero-Traction می باشد. شرط مرزی مناسب  $k, \epsilon$  برای این نوع مرزها، شرط مرزی نیومن ( گرادیان صفر ) می باشد. در برخی موارد از شرط مرزیهای سختتر دریچله برای  $k, \epsilon$  در این مرزها استفاده می گردد. در این حالات می توان از روابط ارائه شده برای شرط مرزی ورودی استفاده نمود، لیکن باystsی توجه داشت که همواره شرط مرزیهای نیومن از لحاظ رفتار همگرائی در مقایسه با شرط مرزیهای دریچله بهتر خواهد بود.

## ب) نسبتهای بزرگ : $\frac{\text{Entrainment Velocity}}{\text{Tangential Velocity}}$

در شکل زیر نمونه هایی از مرزهای که در آنها سرعت نفوذ جریان ( سرعت عمود بر مرز ) به نسبت سرعت مماسی بزرگ می باشد، نشان داده شده است.



شکل (۶): مرزهای نفوذی که در آنها سرعت نفوذی در مقایسه با سرعت مماسی بزرگ می باشد.

شرط مرزی مناسب برای مولفه های سرعت این نوع مرزها، استفاده از دو شرط مرزی:

Zero Tangential Velocity Component -۱

Zero Normal Traction Condition for the Normal Velocity Component -۲

است. شرط مرزی مناسب برای  $k, \epsilon$  در این نوع جریانات، استفاده از شرایط مرزی دریچله است که حالت آشفتگی را در نواحی جریان آزاد (Free Stream) دور از دامنه محاسباتی جریان مشخص نماید. بدین منظور می توان از معادلات (۳۳-۵) تا (۳۷-۵) استفاده نمود. چنانچه Free Stream کاملاً عاری از هر گونه آشفتگی باشد ( یعنی جریان کاملاً آرامی داشته باشیم )، در اینصورت مقدار  $k, \epsilon$  بر روی مرزهای نفوذی را می توان برابر صفر قرار داد.

## شرایط اولیه برای مدل‌های دو معادله‌ای:

تجربه نشان داده است که ویژگیهای همگرائی برای مسائل درگیر با مدل‌های دو معادله‌ای، چنانچه از مقادیر غیر صفر به عنوان حدس اولیه برای  $k, \epsilon$ , استفاده می‌شود، به طرز قابل توجهی بهبود می‌یابد. بنابراین روش پیشنهادی آن است که از میدانهای اولیه غیر صفر برای کمیتهای  $k, \epsilon$ , استفاده گردد. این امر مستقل از این است که مدلسازی صورت گرفته در شرایط جریان دائمی است یا جریان گذراء.

مقادیر اولیه برای  $k$ ,  $\epsilon$  را می‌توان برابر مقادیر مشخصه به دست آمده از معادلات (۳۳-۵) تا (۳۷-۵) در نظر گرفت. از سوی دیگر چنانچه از معادلات (۳۸-۵) تا (۳۹-۵) برای مشخص نمودن پروفیلهای  $k, \epsilon$  در مرزهای ورودی استفاده شده باشد، در اینصورت می‌توان از مقادیر متوسط گیری شده این پروفیلها به عنوان حدس اولیه استفاده نمود. مثلاً از مقدار متوسط دو رابطه  $k = \Im U_{\infty}^2$ ,  $k = C_{\mu}^{1/2} \left( l_m \frac{du}{dy} \right)^2$  به عنوان حدس اولیه گرفته شده بر روی تمام میدان استفاده گردد.

## تراکم مش و توزیع فضائی آن:

واضح است که برای مدلسازی جریانات آشفته با استفاده از مدلهای دو معادله‌ای، در مقایسه با جریانات آرام و یا مدلهای صفر معادله‌ای، نیاز به شبکه محاسباتی ریزتری می‌باشد. این امر به این خاطر است که در جریانات معمولی، متغیرهای آشفتگی تحت تغییرات شدیدتر مکانی قرار داشته و لذا این متغیرها و المانهای مربوط به آنها حاوی جزئیات بسیار بیشتری در بطن خود به نسبت متغیرهای جریان متوسط می‌باشند.

بنابراین چنانچه حتی "جواب مستقل از شبکه"<sup>۱۹۹</sup> میدان جریان متوسط به دست آمده باشد، شبکه محاسباتی ایجاد شده بایستی به منظور به دست آوردن جزئیات دقیق میدان  $k, \omega$  و یا  $k, \varepsilon$  به اندازه کافی ریز باشد. یعنی چه بسا با تقسیم یک المان به چند المان کوچکتر، تغییر چندانی در میدان جریان متوسط موضعی مشاهده نشود، لیکن تغییرات قابل توجهی در متغیرهای جریان آشفته موضعی می‌تواند به وجود آید.

از طرفی در طراحی و ساخت شبکه محاسباتی، دقت داشت که توزیع مکانی یکنواختی از نودها در داخل میدان جریان به دست آید. جهش‌های ناگهانی در تراکم شبکه می‌تواند باعث نوسانات مکانی غیر واقعی در متغیرهای میدان جریان گردد، بالاخص چنانچه این تغییرات ناگهانی در راستای جریان و در نواحی با عدد رینولدز بزرگ رخ داده باشد. در موارد خیلی حاد، آنچه که اصطلاحاً Wiggless نامیده می‌شود، باعث واگرا شدن حل خواهد شد.

<sup>۱۹۹</sup> Grid Independent Solution

## استراتژیها و الگوریتمهای حل برای مدلهای دو معادله ای:

نوع روش انتخابی ( استراتژی و یا الگوریتم انتخابی ) که برای هر مساله جریان آشفته مناسب باشد، به فاکتورهای زیر بستگی دارد:

۱- خواص فیزیکی جریان ( مثلاً دائمی یا گذرا بودن جریان، دو بعدی یا سه بعدی بودن جریان و ... )

۲- موجودی امکانات کامپیوتری ( به عنوان محدودیتهای حافظه ای می تواند مانع استفاده از روشهای سریعتر لیکن با حجم بالاتر حافظه مورد نیاز گردد ).

دو الگوریتم مختلف برای حل عددی مجموعه معادلات گسسته شده وجود دارد:

۱- الگوریتم Implicit

۲- الگوریتم Explicit

در مورد مزایا و معایب روشهای عددی Explicit و Implicit در کتب روشهای عددی و کتب CFD مطالب جامع و کامل وجود دارد.

## پایداری حل:

### منابع ناپایداری حل:

سه منبع اصلی ناپایداری وجود دارد که چنانچه مورد توجه قرار نگیرند، باعث خراب شدن اثرات مفید استفاده از مدل‌های دو معادله ای می‌شوند:

۱- ناپایداریهای مربوط به ترمehای اضمحلال ( و یا Sink ) در معادلات  $\epsilon, k$ ,

۲- ناپایداری مربوط به ترمehای Advection در معادلات  $\epsilon, k$ ,

۳- ناپایداریهای جریانات حاوی نواحی آرام و آشفته در کنار یکدیگر

ناپایداریها گاهی خود را به صورت مقادیر غیر فیزیکی و حتی مقادیر منفی  $\epsilon, k, \omega$  نشان می‌دهند. ( کمیتهای  $k, \epsilon, \omega$  کمیتهای هستند که از لحاظ فیزیکی همواره مثبت بوده و هیچگاه نمی‌توانند مقدار منفی اختیار نمایند ). گاهی نیز ناپایداریها خود را به صورت مقادیر بسیار غیر واقعی " طول مقیاس و زمان مقیاس جریان آشفته " ناشی از مقادیر بسیار کوچک  $\epsilon, k$  در میدان جریان و در نواحی از میدان جریان که سطح آشفتگی جریان در عمل ناگهان کاهش چشمگیری می‌یابد، نشان می‌دهند. علت این ناپایداریها در داخل معادلات  $\epsilon, k, \omega$  ( و یا  $\omega$  ) نهفته است.

### الف) ناپایداریهای مرتبط با ترمehای اضمحلال :Dissipation

اولین منبع ناپایداری، ناپایداری مربوط به ترمehای اضمحلال ( Dissipation ) و یا Sink در معادلات  $\epsilon, k$  ( و یا  $\omega$  ) می‌باشد. از لحاظ فیزیکی، این ترمehا به عنوان حافظ و نگهدارنده سطح و اندازه  $\epsilon, k$  ( و یا  $\omega$  ) در یک سطح فیزیکی و معقول عمل می‌نمایند. در غیاب این ترمehا، سطح  $\epsilon, k$  ( و یا  $\omega$  ) به صورت غیر قابل کنترل و به صورت نمائی و به واسطه حضور ترمehای تولید ( Generation ) بالابرندۀ سطح  $\epsilon, k$  ( و یا  $\omega$  ) افزایش خواهد داشت.

در حین فرآیند حل، از آنجا که میدان جواب به دست آمده، به طور قابل توجهی متفاوت از میدان جواب کاملاً همگرا شده است، ترمehای Dissipation می‌توانند به صورتی غیر فیزیکی و دور از واقعیت بر ترمehای Generation ( که وظیفه ایجاد آشفتگی را بر عهده دارند ) غالب شده و در میانه مسیر و فرآیند حل، باعث ایجاد مقادیر غیر فیزیکی منفی برای  $\epsilon, k$  ( و یا  $\omega$  ) در میدان جریان شوند که این امر خود باعث

Destabilize شدن جواب می گردد. این مقادیر منفی از آن جهت Destabilizing محسوب می شوند که می توانند باعث تعویض Polarity مربوط به دو فرآیند مهم در معادلات  $k, \varepsilon$  می شوند. یعنی با عوض شدن علامت ترمها در این معادلات، نقش Sink و Source بودن ترمها عوض خواهد شد، به عبارت دیگر این امر باعث می شود که ترمی که در واقع بایستی نقش Mold و Generator را بر عهده داشته باشد، در حالت غیر واقعی، نقش اضمحلالی و Dissipative را بر عهده بگیرد و بالعکس. به عنوان مثال، چنانچه به واسطه منفی شدن  $\varepsilon$ ، مقدار ویسکوزیتۀ آشفتۀ  $\mu$  منفی گردد، به واسطه منفی شدن دیفیوژن، Destabilizing شدیدی خواهیم داشت.

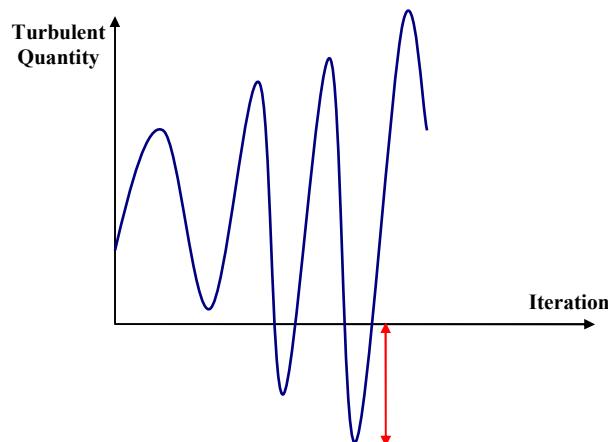
در اینصورت ترمهای Sink و یا Source، باعث عوض شدن Polarity ترمها می شوند. یعنی به عنوان مثال، ترمهای به وجود آورنده آشفتگی، Turbulent Generation، به جای بیرون کشیدن انرژی از درون میدان جریان متوسط و اضمحلال انرژی جذب شده و افزایش آشفتگی جریان، در عوض از میدان جریان آشفتگی انرژی را بیرون کشیده و آنرا در اختیار میدان جریان متوسط قرار می دهد، لذا با این عمل شدت آشفتگی جریان کاهش می یابد که امری کاملاً غیر فیزیکی می باشد. مشابهًا ترمهای Sink به جای اضمحلال انرژی آشفتگی، انرژی جنبشی آشفته تولید میکنند که از لحاظ فیزیکی غیر ممکن است. همه این عوامل دست به دست هم داده تا در مجموع باعث افزایش سطح  $k, \varepsilon$  ( و یا  $\omega$  ) به طور غیر قابل کنترلی شوند.

## ب) ناپایداری ناشی از ترمهای Advection

دومین منبع ناپایداری مربوط به ترمهای Advection در معادلات  $k, \varepsilon$  ( و یا  $\omega$  ) می باشد. در اعداد رینولدز بالا، به خوبی واضح است که چنانچه از اپراتورهای گسسته ساز Non-Diffusive دقیق و مرتبه بالا استفاده شده باشد، این ترمها می توانند باعث "نوسان در راستای جریان"<sup>۲۰۰</sup> در متغیرهای مربوطه جریان میشوند. چنانچه اندازه این نوسانات در مقایسه با مقادیر موضعی  $\varepsilon$  ( و یا  $\omega$  ) بزرگ باشند، این امر میتواند باعث مقادیر Nodal منفی برای  $k, \varepsilon$  ( و یا  $\omega$  ) گردد که در نهایت باعث Destabilizing و ناپایداری جواب گردد:

---

<sup>۲۰۰</sup> Stream Wise Oscillation



شکل (۷): با بالا رفتن دامنه نوسانات، منفی شدن مقادیر  $k, \varepsilon$  (و یا  $\mathcal{O}$ ) جوابهای غیر فیزیکی را باعث خواهد شد.

### ج) ناپایداریهای جریانات حاوی آرام و آشفته در کنار یکدیگر:

سومین منبع ناپایداری هنگامی رخ می دهد که از یک مدل دو معادله ای برای پیش بینی جریاناتی استفاده شود که هم دارای نواحی آرام و هم دارای نواحی آشفته همزمان در کنار یکدیگر در یک مسأله فیزیکی باشند.

مثال رایج این حالت، مسائل جریانات خارجی آیرودینامیکی است که جریان آزاد در آن مسائل، عاری از هر گونه آشفتگی بوده، در حالیکه جریان احاطه کننده جسم تماماً آشفته می باشد.

در مدلهای استاندارد رینولدز بالای  $k, \varepsilon$ ، از آنجا که به کرات با نسبتها مختلف بین  $k$  و  $\varepsilon$  مواجه میگردیم،

مثلًا با ترمehائی مانند  $\frac{\varepsilon^2}{k}, \frac{\varepsilon}{k}, \frac{k}{\varepsilon}, \frac{k^2}{\varepsilon}$  مواجه می گردیم، و اندازه ترمehاهای  $k, \varepsilon$  در نواحی عاری از آشفتگی

هر یک برابر صفر می باشند، لذا نسبتها مذکور معنای ریاضی خود را از دست می دهند و یا به عبارت دیگر دارای مقدار مبهم و نامشخصی خواهند شد. از سوی دیگر در این نواحی، از آنجا که مقادیر  $k, \varepsilon$  بسیار

نزدیک به صفر می باشند، لذا این نسبتها نسبت به هر گونه تغییرات اغتشاشی در اندازه  $k, \varepsilon$  بسیار حساس بوده و شروع به نوسانات شدید و غیر عادی از یک نود به نود بعدی می کنند. این امر می تواند بر روی

پایداری عددی محاسبات تاثیر تخریبی داشته و این رفتار Unstable به سرعت به داخل نواحی تمامآ آشفته انتشار یافته و ظرف چند Iteration به سرعت حل عددی را آلوده سازد.

## روشهای پایدارسازی ۲۰۱:

در اینجا از دو روش برای پایدارسازی و کاهش ناپایداریها استفاده می شود:

Upwinding -۱

Clipping -۲

### :Upwinding -۱

هدف Upwinding پایدارسازی ترمهای Advection در نواحی با Advection بالا می باشد. در اینجا سه نوع روش Upwinding معرفی می گردد:

(الف) Streamline

(ب) First Order

(ج) Hybrid

در افزودن Streamline Upwinding، اپراتورهای High Order Symmetric Advection، دیفیوژن عددی در راستای جهت جریان پایدار می گردد. این امر باعث تقلیل "نوسانات در راستای جریان" در متغیرهای مختلف جریانی، بالاخص  $\epsilon, k$  در نواحی دارای Advection غالب می شود.

در راستای Convection، اپراتور First Order Upwinding در جهات اصلی تجزیه شده و آنگاه در همین جهات اصلی از Full Upwind Differencing استفاده می شود.

Hybrid Upwinding نسخه ای از First Order Upwinding است که در آن از یک پارامتر آمیختگی  $\alpha$  استفاده می شود. این پارامتر به صورت دینامیکی در طی فرآیند حل مورد محاسبه قرار می گیرد.

### :Clipping -۲

Clipping فرآیندی است که مانع ناپایداریهای دسته اول و سوم توصیف شده در بالا می شود. در این روش با تعیین یک حد پائین مثبت برای مقادیر  $\epsilon, k$ ، مانع از سقوط این مقادیر به پائینتر از این حد مثبت و بالتبع آن اطمینان از منفی نشدن این مقادیر می شود. معمولاً این حد پائین، ۱۰ میلیون برابر کوچکتر از ماکریمم مقادیر نodal برای  $\epsilon, k$  انتخاب می گردد. اما در مسائلی که شامل ترکیبی از اعداد رینولدز جریان

متوسط بالا ( یعنی  $Re > 10^7$  ) و دیواره های جامد می باشد، و یا در مسائلی که شامل طیف وسیعی از مقیاسهای فیزیکی می باشند ( نظیر جریان جت پاشیده شده به داخل یک محفظه بزرگ ) استفاده از حد پائین باز هم کاهش یافته ( حد پائین کوچکتر از مقادیر پیشین ) توصیه می گردد.

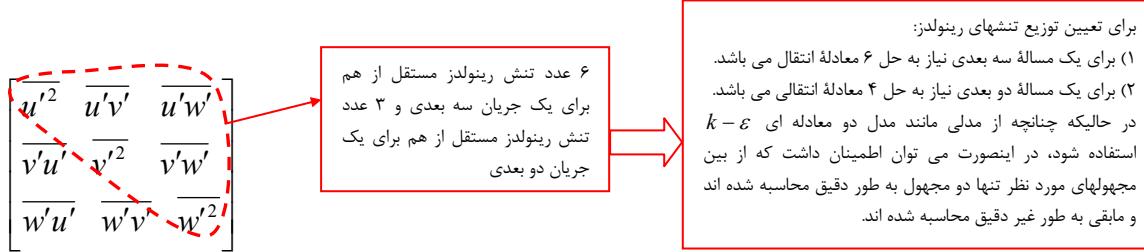
توجه شود که روشهای Clipping و Streamline Upwinding روشهای استفاده کننده از "ابزارهای پایدار ساز مصنوعی"<sup>۲۰۲</sup> می نامند. این امر بیشتر برای Streamline Upwinding صادق است. چنانچه از این روش به درستی استفاده شود، مقدار Upwinding مورد نیاز بایستی فقط برای تقلیل ناپایداریهای غیر عادی در راستای جریان کافی باشد و هر نوع Upwinding اضافی می تواند باعث دیفیوژن عددی اشتباه در راستای جریان گردد که خود میتواند میدان جریان در این راستا نسبت به میدان جریان فیزیکی و واقعی را برابر ننماید.

---

<sup>۲۰۲</sup> Artificial Stability-Enhancing Measure

## مدل انتقال تنشهای رینولدز<sup>۲۰۳</sup> یا مدل RSM:

پیش از این در مدل‌های آشفتگی دیده شد که با استفاده از رابطه اساسی Eddy-Viscosity می‌توان مولفه‌های تنش رینولدز را به گرادیانهای سرعت میدان جریان متوسط مرتبط نمود. اما در مدل RSM برای محاسبه هر یک از ترموهای تنش رینولدز از یک معادله انتقالی کمک گرفته می‌شود. چنانچه به تانسور تنش رینولدز برای یک مساله سه بعدی توجه شود، تعداد تنشهای رینولدز مستقلی که بایستی برای یک مساله سه بعدی حل شود، ۶ عدد می‌باشد، بنابراین برای تعیین دقیق توزیع تنشهای رینولدز در یک مساله سه بعدی به ۶ معادله انتقالی نیاز می‌باشد. در حالیکه در یک مساله سه بعدی، چنانچه بخواهیم از مدلی مانند مدل دو معادله ای  $\epsilon - k$  استفاده نمائیم، در اینصورت از بین ۶ تنش رینولدز مجهول مورد نظر تنها می‌توان مطمئن بود که تنها دو تنش به طور دقیق محاسبه و مابقی به صورت غیر دقیق محاسبه شده‌اند:



## دلایل استفاده از مدل RSM:

مدلهای Eddy Viscosity در جریانات لایه مرزی متصله<sup>۲۰۴</sup>، تا جائیکه تنها یک مولفه از تانسور تنش رینولدز از اهمیت برخوردار است، خوب جواب می‌دهند. در چنین جریاناتی، مدل Eddy Viscosity معیار و بیانی از مولفه غالب تنش رینولدز (در این نوع جریانات اغلب  $\overline{u'^2}$ ) می‌باشد. اما چنانچه جریان از این حالت بسیار ساده فرضی کمی انحراف پیدا نماید و یا به اصطلاح اندکی پیچیده تر گردد، دیگر فرض استفاده شده در مدل Eddy Viscosity (که تنشهای رینولدز تنها به گرادیانهای سرعت میدان جریان متوسط مربوط است) صادق نمی‌باشد و لذا دیگر نمی‌توان به اعتبار مدل‌های Eddy-Viscosity دل بست.

<sup>۲۰۳</sup> Reynolds Stress Transport Model or RSTM  
<sup>۲۰۴</sup> Attached Boundary Layer Flows

توسعه مدل‌های دیفرانسیلی RSM ابتدا از سال ۱۹۶۸<sup>۲۰۵</sup> و با سخنرانی دونالدسون<sup>۲۰۵</sup> در دانشگاه استنفورد و تاکید وی مبنی بر اهمیت مدل‌سازی تنش‌های رینولدز آغاز شد. این مدل تحت عنوانین دیگری همچون Second Order Modeling و Second Moment Closure و یا Second Order Closure نیز شناخته می‌شوند. از آن زمان به بعد بود که اندک اندک مدل‌های Eddy Viscosity به کنار گذاشته شده و در عوض مولفه‌های مجھول تنش رینولدز مستقیماً از حل معادلات انتقال دیفرانسیلی (که در آنها تنش‌های رینولدز متغیرهای وابسته می‌باشند) به دست آمدند. همانطور که در بالا نشان داده شد، تانسور تنش رینولدز یک تانسور متقارن<sup>۲۰۶</sup> می‌باشد و این بدان معناست که در حالت دو بعدی تنها به حل ۳ معادله انتقال و در حالت سه بعدی تنها به حل ۶ معادله انتقال برای تعیین توزی، تنش رینولدز درون میدان جریان نیاز می‌باشد:

$$\begin{bmatrix} \overline{u'^2} & \overline{u'v'} & \overline{u'w'} \\ \overline{v'u'} & \overline{v'^2} & \overline{v'w'} \\ \overline{w'u'} & \overline{w'v'} & \overline{w'^2} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \overline{u'^2} & \overline{u'v'} \\ \overline{v'u'} & \overline{v'^2} \end{bmatrix}$$

تانسور تنش رینولدز برای یک جریان سه بعدی

تانسور تنش رینولدز برای یک جریان دو بعدی

البته هنوز هم برای تعیین طول مقیاس<sup>۲۰۷</sup>، هم در حالت دو بعدی و هم در حالت سه بعدی، علاوه بر معادلات مذکور نیاز به حل یک معادله اضافی دیگر نیز می‌باشد. لذا مدل RSM از مدل‌های رایج Eddy-Viscosity پیچیده‌تر می‌باشد، لیکن با وجود پیچیدگی این مدل، این مدل هنوز جالب توجه می‌باشند چرا که توصیف به مراتب دقیق‌تری از آشفتگی را ارائه داده و بر روی طیف بسیار وسیع و متنوعی از جریانات مهندسی معتبر می‌باشند. این مدل می‌تواند بسیاری از اثرات پیچیده جریانات در طبیعت و مهندسی را در بر گیرند، از آن جمله می‌توان به جریاناتی نظری "جریانات دارای خطوط جریانی منحنی"<sup>۲۰۸</sup> و یا جریانات دارای "چرخش<sup>۲۰۹</sup> و دوران<sup>۲۱۰</sup>" و یا "جریانات جابجایی آزاد<sup>۲۱۱</sup> یا جریانات بویانت<sup>۲۱۲</sup>" اشاره نمود که این مدل در مدل‌سازی آنها از قابلیت خوبی برخوردار است.

<sup>۲۰۵</sup> C.Donaldson

<sup>۲۰۶</sup> Symmetric

<sup>۲۰۷</sup> Length Scale

<sup>۲۰۸</sup> Streamline Curvature Flows

<sup>۲۰۹</sup> Swirl Flows

<sup>۲۱۰</sup> Rotational Flows

<sup>۲۱۱</sup> Free Convection Flows

<sup>۲۱۲</sup> Buoyant Flows

نکته ای که در اینجا بایستی بدان اشاره نمود آن است که اغلب جریانات آشفته به شدت بد شکل<sup>۲۱۳</sup> و غیر ایزوتروب<sup>۲۱۴</sup> می باشند، یعنی علاوه بر آنکه مقادیر تنشهای اصلی  $\overline{u'^2}, \overline{v'^2}, \overline{w'^2}$  مخالف صفر می باشند، مقادیر تک تک عناصر این تنشهای اصلی آشفته با یکدیگر تفاوت قابل ملاحظه ای دارند. به عنوان نمونه نشان داده می شود که در ناحیه لگاریتمی جریان آشفته دو بعدی بر روی یک صفحه تخت ( به عنوان ساده ترین جریان آشفته قابل تصور ) مقادیر تنشهای اصلی آشفته به صورت ذیل می باشند:

$$\overline{u'^2} = 1, \overline{v'^2} = 0.4, \overline{w'^2} = 0.6$$

این اختلاف شدید بین اندازه تنشهای رینولدز نشان می دهد که حتی در یک جریان آشفته کلاسیک بسیار ساده ( یعنی جریان لایه مرزی آشفته بر روی یک دیواره تخت )، استفاده از مدلهای Eddy-Viscosity و مدلهای دو معادله ای مربوطه مانند  $\omega - k - \epsilon$  و غیره، عملأ هیچ گونه دقیق توجهی را ( بالاخص در جریانات سه بعدی ) به دنبال نخواهد داشت. بنابراین استفاده از مدلهای EddyVisco sity در جاهاییکه با جریانات به شدت غیر ایزوتروبیک سروکار داریم، مانند "جریانات به شدت چرخشی"<sup>۲۱۵</sup> و "جریانات ثانویه ناشی از تنش"<sup>۲۱۶</sup> اصلاً توصیه نمی شود.

<sup>۲۱۳</sup> Highly Skewed

<sup>۲۱۴</sup> Anisotropic

<sup>۲۱۵</sup> Highly Swirling Flows

<sup>۲۱۶</sup> Stress Driven Secondary Flows

## به دست آوردن معادله انتقالی صریح برای تانسور تنش رینولدز:

معادله انتقالی صریح برای تانسور تنش رینولدز با کمی محاسبات حجیم و در عین حال ساده ریاضی به دست می‌آید. بدین منظور فرض کنید که با سیالاتی با چگالی ثابت سر و کار داریم. ( همانطور که پیش از این ذکر شده بود، در جریانات دارای سرعتهای زیر محدوده هایپرسونیک، اثر پذیری آشفتگی و معادلات مربوط به آن از تراکم پذیری جریان بسیار کم می‌باشد).  $f_i$  بیانگر نیروهای حجمی ( بولانسی و یا کوریولیس ) می‌باشد. مجدداً از نمادهای Overbar و Prime برای نمایش مولفه نوسانی و متوسط کمیتهای آشفته استفاده می‌نماییم:

$$u = \bar{u} + u'$$

### معادله پیوستگی:

$$\text{معادله لحظه‌ای} \quad \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0 \quad (\text{A1})$$

$$\text{معادله متوسط} \quad \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k} = 0 \quad (\text{A2})$$

$$\text{تفريق دو معادله فوق} \quad \frac{\partial u'_k}{\partial x_k} = 0 \quad (\text{A3})$$

از یکدیگر

**نتیجه (۱):** هر دو کمیت متوسط و نوسانی شرایط تراکم ناپذیری را ارضاء می‌نمایند.

### معادله ممنتوم:

$$\text{معادله لحظه‌ای} \quad \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} + f_i \quad (\text{A4})$$

$$\text{معادله متوسط} \quad \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \bar{u}'_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_k \partial x_k} + \bar{f}_i \quad (\text{A5})$$

$$\text{مرتب سازی شده} \quad \frac{D \bar{u}_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} - \bar{u}'_i \bar{u}'_k \right) + \bar{f}_i \quad (\text{A6})$$

معادله ممنتوم

که در رابطه (A6)، اپراتور  $\frac{D}{Dt}$  بیانگر مشتق مادی می‌باشد.

## نتیجه (۲):

معادلات جریان متوسط، همان معادلات جریان لحظه‌ای ( Instantaneous ) می‌باشد، با این تفاوت که

در اینجا تنشهای اضافی ظاهری تحت عنوان تنشهای رینولدز  $\overline{u'_i u'_j}$  نیز داریم. توجه شود که در اینجا این

ممنتوم است که توسط نوسانات جریان آشفته منتقل می‌گردد و نه نیرو.

تفریق دو معادله فوق از یکدیگر

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t} + \overline{u_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} + u'_k \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} + u'_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} - \overline{u'_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \overline{u_i}}{\partial x_k \partial x_k} + \overline{f_i} \quad (\text{A}\gamma-i)$$

متشابهاً

$$\frac{\partial u'_j}{\partial t} + \overline{u_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} + u'_k \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k} + u'_k \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} - \overline{u'_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{P}}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial^2 \overline{u_j}}{\partial x_k \partial x_k} + \overline{f_j} \quad (\text{A}\gamma-j)$$

حال چنانچه عبارت  $\overline{u'_i(A7)_j + u'_j(A7)_i}$  را تشکیل دهیم، معادله انتقالی برای تنشهای رینولدز در مدل

RSM به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\overline{u'_i u'_j})}{\partial t} + \overline{u_k} \frac{\partial(\overline{u'_i u'_j})}{\partial x_k} + \left[ (\overline{u'_i u'_k}) \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k} + (\overline{u'_j u'_k}) \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} \right] + \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u'_i u'_j u'_k}) = \\ -\frac{1}{\rho} \left( \overline{u'_i} \frac{\partial P'}{\partial x_j} + \overline{u'_j} \frac{\partial P'}{\partial x_i} \right) + \nu \left( \overline{u'_i} \frac{\partial^2 u'_j}{\partial x_k \partial x_k} + \overline{u'_j} \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_k \partial x_k} \right) + (\overline{u'_i f'_j + u'_j f'_i}) = \\ \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ -\frac{P'}{\rho} (\overline{u'_i \delta_{jk} + u'_j \delta_{ik}}) + \nu \frac{\partial(\overline{u'_i u'_j})}{\partial x_k} \right] + \frac{P'}{\rho} \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) - \nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} + (\overline{u'_i f'_j + u'_j f'_i}) \end{aligned}$$

## نتیجه (۳): معادلات انتقال تنش رینولدز RSM

$$\frac{D}{Dt} (\overline{u'_i u'_j}) = \frac{\partial(d_{ijk})}{\partial x_k} + P_{ij} + G_{ij} + \Phi_{ij} - \varepsilon_{ij} \quad (\text{A}\lambda)$$

که در آن:

$$\frac{D}{Dt} (\overline{u'_i u'_j}) = \frac{\partial(\overline{u'_i u'_j})}{\partial t} + \overline{u_k} \frac{\partial(\overline{u'_i u'_j})}{\partial x_k}$$

*Advection ( By Mean Flow )*  
جابجاتی آشفتگی به واسطه جریان متوسط

$$P_{ij} = - \left[ (\overline{u'_i u'_k}) \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k} + (\overline{u'_j u'_k}) \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} \right]$$

*Production ( By Mean Strain )*  
تولید آشفتگی به واسطه کرنش متوسط

$$G_{ij} = (\overline{u'_i f'_j + u'_j f'_i})$$

*Production ( By Body Force )*  
تولید آشفتگی به واسطه نیروی حجمی

$$\Phi_{ij} = \overline{\frac{P'}{\rho} \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)} = \overline{\frac{2P'}{\rho} S'_{ij}}$$

*Pressure-Strain Correlation*  
همبستگی بین فشار و کرنش آشتفته

$$\varepsilon_{ij} = 2\nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k}}$$

*Dissipation*  
اضمحلال آشتفتگی

$$d_{ijk} = \nu \frac{\partial (\overline{u'_i u'_j})}{\partial x_k} - \overline{\frac{P'}{\rho} (u'_i \delta_{jk} + u'_j \delta_{ik})} - \overline{u'_i u'_j u'_k}$$

*Diffusion*  
دیفیوژن یا پخش آشتفتگی

#### نتیجه (۴): معادله انتقال انرژی جنبشی آشتفتگی

از آنجا که رابطه نظیر انرژی جنبشی آشتفتگی به صورت  $(A-8)$  می باشد، با نگاهی به رابطه

میتوان مشاهده نمود که تنها با عوض نمودن اندیس  $j,k$  به اندیس  $i$  و در نهایت با تقسیم نمودن معادلات به دست آمده بر عدد ۲ می توان به معادله انتقالی انرژی جنبشی آشتفتگی دست یافت:

$$\frac{Dk}{Dt} = \frac{\partial d_i^{(k)}}{\partial x_i} + P^{(k)} + G^{(k)} - \varepsilon \quad (A9)$$

که در آن:

$$P^{(k)} = -\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \quad \text{Production (By Mean Strain)}$$

تولید انرژی جنبشی آشتفتگی به واسطه کرنش متوسط

$$G^{(k)} = \overline{u'_i f'_i} \quad \text{Production (By Body Force)}$$

تولید انرژی جنبشی آشتفتگی به واسطه نیروی حجمی

$$\varepsilon = \nu \overline{\left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right)^2} \quad \text{Dissipation}$$

اضمحلال انرژی جنبشی آشتفتگی

$$d_i^{(k)} = \nu \frac{\partial k}{\partial x_i} - \overline{\frac{P' u'_i}{\rho}} - \frac{1}{2} \overline{u'_j u'_j u'_i} \quad \text{Diffusion}$$

دیفیوژن یا پخش انرژی جنبشی آشتفتگی

## توضیح جامعتر راجع به هر یک از ترم‌های موجود در معادله انتقال تنش رینولدز RSM:

توضیح	ترم
<p>جابجائي ( يا Convection ) تنش رینولدز را نشان مي دهد. به عبارت ديگر اين ترم بيانگر نرخ تغيير <math>\overline{u'_i u'_j}</math> در طول خط جريان ( Streamline ) مي باشد. در جريانات دائمي، اين ترم بيانگر نرخی است که تحت آن، تنشهای رینولدز توسط ميدان جريان متواتر جابجا مي گردد.</p>	$\frac{D}{Dt} \left( \overline{u'_i u'_j} \right) = \frac{\partial \left( \overline{u'_i u'_j} \right)}{\partial t} + \overline{u_k} \frac{\partial \left( \overline{u'_i u'_j} \right)}{\partial x_k}$
<p>بيانگر توليد آشفتگي مي باشد، به عبارت ديگر اين ترم بيانگر نرخ توليد <math>\overline{u'_i u'_j}</math> توسط گراديان سرعت متواتر و يا تنش برشی ( Mean Shear Stress ) است ( پيش از اين هم بارها خاطر نشان نموديم که گراديان سرعت متواتر، به واسطه بر هم كنش با تنشهای رینولدز، يكی از مهمترین عوامل به وجود آورنده آشفتگی در ميدان جريان مibاشد ).</p> <p>تنش برشی به واسطه بر هم كنش ميان Shear و Transverse Normal Stress به وجود مي آيد. با توجه به اهميت و نقش برجسته گراديان سرعت متواتر در به وجود آمدن آشفتگي در ميدان جريان، هر چه گراديانهای موجود در ميدان جريان متواتر بهتر و دقیقتر مدل شوند، آشفتگی ایجاد شده و ميدان جريان آشفته مربوطه دقیقتر مدل می شوند. از همینرو است که مدلسازی اثرات دیواره و میدان جريان آشفته مربوطه دقیقتر مدل دیواره، مدلسازی گراديانهای شدید موجود در هسته جريان لایه های اختلاطی<sup>۲۱۰</sup>، مدلسازی گراديانهای شدید موجود در هسته Wake و يا جريان جت بسيار اهميت داشته و می تواند بر روی صحت و سقم نتایج آشفتگی تاثير قابل توجهی بگذارد. Trace تانسور</p> $Trace[P_{ij}] = -2P^{(k)}_{ij}$ <p>بر خلاف ترم اسکالار <math>P^{(k)}</math>، هر کدام از ترم‌های <math>P_{ij}</math>، هم توسط Mean Strain Rate، هم توسط Mean Rotation Rate و هم توسط <math>S_{ij}</math> با همان Tensor یا همان <math>\omega_{ij}</math> متأثر می گرددند. اين امر انعکاسي از اين حقیقت است که آشفتگی در سه بعد نمی تواند شرط Material Frame Indifference را ارضاء نماید و این مطلب مهمی است که بایستی در فرمولاسیون مدلها در نظر گرفته شود. در فرمولاسیون مدلها، بایستی به این نکته توجه داشت که مدلها</p>	$P_{ij} = - \left[ \left( \overline{u'_i u'_k} \right) \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} + \left( \overline{u'_j u'_k} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \right]$

<sup>۲۱۰</sup> Mixing Layer

<p>بایستی قادر باشند که به دقت اثرات چرخش سیستم و انحنای موجود در خطوط جریان متوجه <b>Capture</b> نمایند.</p> <p>ترم تولید آشفتگی، ترمی قابل توجه و در عین حال ترمی صریح<sup>۲۱۸</sup> می باشد و لذا نیازی به مدلسازی ندارد. یکی از دلایل موفقیت و قدرتمندی مدل <b>RSM</b> وجود این ترم در داخل معادله انتقال تانسور تنشهای رینولدز می باشد.</p>	
<p>ترم دیفیوژن است. این ترم بیان کننده نرخ انتقال فضائی <math>\overline{u'_i u'_j}</math> به واسطه فعالیت نوسانات آشفتگی<sup>۲۱۹</sup>، نوسانات میدان فشار<sup>۲۲۰</sup> و دیفیوژن مولکولی<sup>۲۲۱</sup> است.</p> <p>چنانچه اندکی به ترم <math>\overline{u'_i u'_j u'_k}</math> دقت شود، می توان این ترم را به صورت اندرکنش شکلی از تنش رینولدز <math>\overline{u'_i u'_j u'_k}</math> با مولفه نوسانی سرعت <math>u'_k</math> در نظر گرفت. به عبارت دیگر، ترم <math>\overline{u'_i u'_j u'_k}</math> بیانگر نوعی جابجائی و <b>Advection</b> تنشهای رینولدز با استفاده از اغتشاشات موجود در میدان سرعت آشفته می باشد، لیکن از آنجا که <b>Advection</b> صورت گرفته در مقیاس نوسانات آشفتگی است، این امر باعث شده است که فرآیند رخ داده را به صورت نوعی دیفیوژن تفسیر نماییم.</p> <p>با نگاهی به ترم <math>\nu \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k}</math> می توان اینطور برداشت نمود که به واسطه گرادیان موجود در توزیع تنش رینولدز، به کمک ویسکوزیتۀ مولکولی، نوعی دیفیوژن به وجود می آید. همواره به یاد داشته باشید که هر نوع گرادیان در توزیع یک کمیت فیزیکی درون میدان جریان می تواند به عنوان پتانسیل و عامل حرکت برای آن کمیت فیزیکی ( چه در مقیاس کوچک به عنوان دیفیوژن و چه در مقیاس بزرگ به عنوان <b>Advection</b> ) گردد.</p>	$d_{ijk} = \nu \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k} - \frac{P'}{\rho} (\overline{u'_i \delta_{jk} + u'_j \delta_{ik}}) - \overline{u'_i u'_j u'_k}$
<p>وظیفۀ این ترم که همبستگی بین فشار و کرنش آشفته نیز خوانده می شود، توزیع مجدد<sup>۲۲۲</sup> مقدار انرژی جنبشی آشفتگی موجود در میان مولفه های نوسانی سرعت با استفاده از نوسانات میدان فشار می باشد. به واسطه توزیع انرژی به وجود آمده در هر یک از مولفه های تنش رینولدز در میان سایر مولفه ها، وظیفۀ دیگر این ترم، انتقال آشفتگی از یک جریان <b>An-Isotropic</b> به سمت جریانی <b>Isotropic</b> می باشد. به عبارت دیگر این ترم، انرژی ترمهای بزرگ <math>\overline{u'_i u'_j}</math> را در اختیار ترمهای کوچک <math>\overline{u'_i u'_j}</math> قرار می دهد.</p> <p>جریانی را در نظر بگیرید که دارای میدان جریانی تنها در راستای <math>x</math> می باشد ( یعنی از</p>	$\Phi_{ij} = \frac{P'}{\rho} \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) = \frac{2P'}{\rho} S'_{ij}$

<sup>۲۱۸</sup> Exact

<sup>۲۱۹</sup> Turbulent Fluctuation

<sup>۲۲۰</sup> Pressure Fluctuation

<sup>۲۲۱</sup> Molecular Diffusion

<sup>۲۲۲</sup> Redistribution

جريان در جهات دیگر صرفنظر می گردد). در اینصورت در داخل لایه برشی به وجود آمده

$$\text{بر روی دیوار، از آنجا که } \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \text{ تولید می شود، این}$$

بدان معناست که این مولفه نسبت به سایر مولفه های تنش رینولدز بزرگتر می باشد. ترم

$$\text{توزیع مجدد بخشی از انرژی تنش } \overline{u'^2} \text{ را در اختیار } \overline{v'^2} \text{ و } \overline{w'^2} \text{ قرار می دهد. این امر بر}$$

روی سطح کلی انرژی جنبشی آشفتگی تاثیری ندارد، چرا که این ترم دارای **Zero Trace** می باشد.

در اینجا ذکر سه نکته لازم به نظر می رسد:

(۱) در جریان نمونه فوق که دارای میدان جریانی تنها در راستای  $x$  بود، مشاهده

$$\text{شد که } \overline{u'^2} > \overline{v'^2}, \overline{w'^2} \text{ می باشد. این امر یکی از دلایل به وجود آمدن}$$

**Anisotropy** در جریانات آشفته محسوب می شود. دلایل متعدد دیگری وجود

دارند که باعث **Anisotropy** جریانات آشفته می شود، از جمله این دلایل

میتوان به وجود گرادیانهای سرعت متوسط با اندازه های بسیار مختلف در

جهات مختلف به واسطه وجود نیروهای شناوری و بیانسی، لایه های اختلاطی،

جریانات جت و گردابه، وجود دیواره های صلب، جریانات دمشی و مکشی از

طریق دیواره، احتراق، جریانات ثانویه، جریانات دو فاز، کاویتاسیون و جدا شدن

حبابها از دیواره و اثرات متقابل بر روی جریان حول حباب و غیره اشاره نمود.

همین عوامل باعث می شوند که  $\overline{u'^2} \neq \overline{v'^2} \neq \overline{w'^2}$ . یعنی **Anisotropy**

جریان آشفته.

(۲) نقش اضمحلال ویسکوز ( Viscous Dissipation ) ( اضمحلال انرژی جنبشی

آشفتگی و کاهش مقدار آن به سمت صفر می باشد. بر طبق تعریف انرژی

$$\text{جنسبی آشفتگی، از آنجا که } k = (u'^2 + v'^2 + w'^2) \text{ می باشد، وقتی}$$

$$k \rightarrow 0 \text{ می رود که هر یک از مولفه های عمودی تنش آشفتگی به سمت صفر}$$

بروند، یعنی آنکه:

$$u'^2 \rightarrow 0, v'^2 \rightarrow 0, w'^2 \rightarrow 0$$

این امر باعث حذف تدریجی **Anisotropy** جریان می گردد.

(۳) فشار همواره می تواند به عنوان **Source** و یا **Sink** برای ممنتوم عمل نماید.

وجود فشار نوسانی می تواند همانند یک قلب تپنده درون میدان جریان آشفته،

<p>باعث القاء ممتنوم و یا حرکت دادن یک کمیت فیزیکی نظیر غلظت یا آنتالپی درون میدان جریان گردد.</p> <p>(۴) این ترم هیچ ترم مشابهی در معادله انرژی جنبشی آشفتگی <math>T.K.E</math> ندارد.</p> <p>(۵) از آنجا که در داخل این ترم، سهم نوسانات فشاری داخل شده است و به واسطه طبیعت میدان فشار و تأثیر تغییرات آن در میدان جریان، این ترم را می توان به عنوان ترمی معرفی نمود که در آن "اندرکنشهای غیر موضعی" سهم قابل توجهی را به خود اختصاص می دهد و این امر مدلسازی این ترم را بسیار سخت و پیچیده می سازد. مدلسازی این ترم، یک عامل حیاتی در مدلسازی جریانات پیچیده بالاخص جریانات دارای اثرات <b>Rotation</b> می باشد.</p>	
<p>ابن ترم، بیانگر اضمحلال لزج (ویسکوز) می باشد. به عبارت دیگر این ترم بیانگر نرخ اضمحلال <math>\overline{u'_i u'_j}</math> به واسطه اثر ویسکوزیته ملکولی می باشد. دقت کنید که در اینجا صحبتی از ویسکوزیته آشفته نمی شود، بلکه تمام نقش اضمحلال بر عهده ویسکوزیته ملکولی می باشد. به طور خلاصه می توان اینطور بیان نمود که اضمحلال لزج در مقیاسهای کوچک (نواحی ای که گرادیان سرعت بزرگ بوده و ادی ها ایزوتروپ و جهندار می باشند) رخ می دهد.</p>	$\varepsilon_{ij} = 2\nu \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k \partial x_k}$

## مدلسازی تansور تنش رینولدز:

به غیر از دو ترم Production و Convection در معادله انتقال تنش رینولدز، تمام ترمهای دیگر باعث معرفی یک سری Correlation جدید شده اند که باستی بر حسب کمیتهای معلوم و مجھول تعیین گردند تا دستگاه معادلات بسته گردد.

### - ترم دیفیوژن ( Diffusion ) :

جمع سه ترم مختلف است که اصطلاحاً دیفیوژن ویسکوز، دیفیوژن فشار و دیفیوژن آشفتگی نامیده می شوند. در اعداد رینولدز آشفته بالا، سهم دیفیوژن ویسکوز در انتقال  $\overline{u'_i u'_j}$  کوچک می باشد. عدد رینولدز آشفته را به صورت زیر تعریف می نمائیم:

$$Re_T \equiv \frac{u_T l_T}{\nu} , \quad u_T \sim k^{1/2} , \quad l_T \sim k^{3/2} \quad (42-5)$$

لذا در اعداد رینولدز بالا و کاربردهایی از این دست، می توان از ترم دیفیوژن ویسکوز چشم پوشی نمود. اگرچه وارد کردن آن در مدلسازی های عددی مشکلی را به وجود نمی آورد.

اطلاعات کمی راجع به دیفیوژن فشاری وجود دارد، چرا که اندازه گیری مستقیم این کمیت تقریباً غیر ممکن است. تخمین اندازه دیفیوژن فشاری تنها با استفاده از روش‌های غیر مستقیم امکانپذیر است، یعنی با اندازه گیری دیگر ترمهای دیگر ترمهای دیگر ترمهای بروی اندازه ترم دیفیوژن فشاری. اما در این بین باستی به توجه داشت که خطای اندازه گیری دیگر ترمهای بروی اندازه نهائی دیفیوژن فشاری می تواند تاثیر قابل ملاحظه ای داشته باشد. اما آنچه که آزمایشات مختلف نشان داده اند این است که در اغلب جریانات مهندسی، این ترم نسبتاً غیر مهم بوده و لذا گاهاً می توان از آن چشم پوشی نمود.

"هارلو و دالی"<sup>۲۲۴</sup> اولین نفراتی بودند که ترم دیفیوژن آشفته را با استفاده از نظریه "انتقال گرادیان"<sup>۲۲۵</sup> مدل نمودند. نظریه انتقال گرادیان اظهار می دارد که دیفیوژن یک کمیت فیزیکی متناسب با گرادیان فضایی<sup>۲۲۶</sup> همان کمیت است:

<sup>۲۲۴</sup> Harlow, Daly  
<sup>۲۲۵</sup> Gradient Transport Hypothesis  
<sup>۲۲۶</sup> Spatial Gradient

$$-\overline{u'_i u'_j u'_k} = C_s \frac{k}{\varepsilon} \overline{u'_k u'_l} \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_l} \quad (43-5)$$

در رابطه فوق،  $C_s$  یک ضریب تجربی بوده و مقدار آن معمولاً برابر  $0/22$  است، این مقدار با استفاده

از بهینه سازی کامپیوترا بهینه شده است. نسبت  $\frac{k}{\varepsilon}$  بیانگر زمان مقیاس مشخصه ادی های حامل انرژی می باشد. مدلها دیگری برای دیفیوژن آشفته نیز وجود دارند اما همگی در مقایسه با مدل "هارلو و دالی" پیچیده تر بوده و لزوماً کارائی بهتری در مقایسه با این مدل ندارند. به عنوان مثالهای از این دست مدلها می توان به مدل " هنجالیک و لاندر"<sup>۲۲۷</sup> و " لوملی و خواجه نوری "<sup>۲۲۸</sup> اشاره نمود.

### - ترم توزیع مجدد ( Redistribution ) :

مدلی که برای مدلسازی ترم توزیع مجدد در دانشگاه UMIST برای جریانات با عدد رینولدز ارائه شده است، بر مبنای کارهای لاندر و همکاران<sup>۲۲۹</sup> و نیز کارهای گیبسون-لاندر<sup>۲۳۰</sup> قرار داشته و دارای شکلی به صورت ذیل می باشد:

$$\Phi_{ij} = \Phi_{ij}^{(1)} + \Phi_{ij}^{(2)} + \Phi_{ij}^{(w)} \quad (44-5)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} \Phi_{ij}^{(1)} &= -C_1 \frac{\varepsilon}{k} \left( \overline{u'_i u'_j} - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \right) \\ \Phi_{ij}^{(2)} &= -C_2 \left( P_{ij} - \frac{1}{3} P_{kk} \delta_{ij} \right) \\ \Phi_{ij}^{(w)} &= \left( \tilde{\Phi}_{kl} n_k n_l \delta_{ij} - \frac{3}{2} \tilde{\Phi}_{ik} n_j n_k - \frac{3}{2} \tilde{\Phi}_{jk} n_i n_k \right) \Psi \\ \tilde{\Phi}_{ij} &= C_1^{(w)} \frac{\varepsilon}{k} \overline{u'_i u'_j} + C_2^{(w)} \Phi_{ij}^{(2)} \\ \Psi &= \frac{k^{\frac{3}{2}} / \varepsilon}{C_3 y_n} \end{aligned}$$

مقدار استاندارد ضرائب عبارتند از:

$$C_1 = 1.8, C_2 = 0.6, C_1^{(w)} = 0.5, C_2^{(w)} = 0.3, C_3 = 2.5$$

<sup>۲۲۷</sup> Hanjalic and Launder

<sup>۲۲۸</sup> Lumley and Khajeh-Nouri

<sup>۲۲۹</sup> Launder et. al. ۱۹۷۵

<sup>۲۳۰</sup> Gibson-Launder ۱۹۷۸

$y_n$  فاصله از دیواره می باشد. نقش ترمهای  $\Phi_{ij}^{(1)}, \Phi_{ij}^{(2)}$  بازگرداندن Isotropy ( و یا حذف

جريان با توزيع انرژی جنبشی تنشهای بزرگ رینولذ در میان تنشهای با اندازه Anisotropic کوچکتر ) می باشد.

به ترم  $\Phi_{ij}^{(1)}$  اصطلاحاً " بازگشت به ایزوتربی<sup>۲۳۱</sup>" و به ترم  $\Phi_{ij}^{(2)}$  نیز اصطلاحاً " ایزوترب سازی تولید<sup>۲۳۲</sup>" گفته می شود. در نزدیکی دیواره، به واسطه نزدیک شدن به فیزیک جريان، تمایل به بايستی تشديد<sup>۲۳۳</sup> گردد و از همینرو ترم کمکی  $\Phi_{ij}^{(w)}$  به عنوان "تصحیح دیواره Isotropising به این ترمهای اضافه می گردد. ترم  $\Phi_{ij}^{(w)}$  را اصطلاحاً ترم " انعکاس دیواره<sup>۲۳۵</sup>" مینامند. ترم انعکاس دیواره برای اطمینان یافتن از سطوح صحیح Anisotropy و حفظ آن در سطوح جامد جريان است.

روش دیگر در مدلسازی ترم توزيع مجدد، استفاده از معادله پواسیون<sup>۲۳۶</sup> برای فشارهای آنی<sup>۲۳۷</sup> میباشد. این معادله با دیفرانسیل گیری از معادلات ناویر استوکس به دست می آید که در اینجا بدان اشاره ای نشده است. با کم نمودن معادلات Mean، معادله ذیل برای " فشار نوسانی<sup>۲۳۸</sup>" به دست می آید که بايستی درون میدان جريان حل گردد:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 P}{\partial x_i^2} = - \left[ \frac{\partial^2 (u'_i u'_j - \bar{u}'_i \bar{u}'_j)}{\partial x_j \partial x_i} + 2 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right] \quad (45-5)$$

که در داخل کروشه دو ترم کاملاً مجزا و متمایز از هم قابل تشخیص می باشد. اولین ترم، فقط ترمهای آشفتگی را شامل می شود و ترم دوم، ۲  $\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}$ ، شامل گرادیان سرعت متوسط است. وقتی معادله (45-5) را برای یک آشفتگی هموزن حل می نمائیم، معادله انتگرالی Chou برای Pressure-Strain Correlation به دست می آید:

$$\frac{\overline{P \frac{\partial u_i}{\partial x_j}}}{\rho} = \frac{1}{4\mu} \int \left\{ \frac{\partial^3 u_l^* u_m^* u_i}{\partial r_i \partial r_m \partial r_j} + 2 \frac{\partial u_l}{\partial x_m} \frac{\partial^2 \bar{u}_m^* u_i}{\partial r_l \partial r_j} \right\} \frac{d_{vol}}{r} + \phi_{ij,\omega} \quad (46-5)$$

<sup>۲۳۱</sup> Return to Isotropy

<sup>۲۳۲</sup> Isotropisation of Production

<sup>۲۳۳</sup> Over-ridden

<sup>۲۳۴</sup> Wall Correction

<sup>۲۳۵</sup> Wall Reflection Term

<sup>۲۳۶</sup> Poisson Equation

<sup>۲۳۷</sup> Instantaneous Pressure

<sup>۲۳۸</sup> Fluctuating Pressure

که در رابطه فوق \* بیانگر کمیتهای است که مقدارشان در  $r = x^* - x$ ,  $x^*$  محاسبه می شود.

$\phi_{ij,\omega}$  یک انتگرال سطحی<sup>۲۳۹</sup> بوده و فقط هنگامی اهمیت دارد که اندازه ادی های حامل انرژی هم

مرتبه با فاصله از دیواره باشد.

پیشنهاد کردند که ترم اول و دوم در داخل گیومه معادله Launder, Reece, Rodi (LRR)

(۴۶-۵) به صورت جداگانه مدل گردد. این روشی مرسوم و رایج برای مدلسازی انتگرال Chou بوده

و عمده به وجود آوردنگان مدل RSM از این روش استفاده می نمایند.

پیشنهاد دادند که انتگرال Chou Speciale, Sarker, Gatski (SSG)

بدون مدلسازی تک تک اجزای آن مدل نمود. از آنجا که این مدل نیاز به مدل خاصی برای انتگرال

سطحی ندارد، این روش به سرعت توانست جایگاه خود را یافته و از لحاظ عمومیت کاربرد بیشتری

نسبت به روش LLR بباید.

## - ترم اضمحلال ( Dissipation ) :

این ترم بر مبنای این حقیقت بنا نهاده شده است که ویسکوزیتۀ مولکولی ( و نه ویسکوزیتۀ آشفته )

انرژی جنبشی آشفته یا T.K.E. را با اعمال بر روی " حرکات فرکانس بالا و مقیاس کوچک" <sup>۲۴۰</sup> به

گرما تبدیل می نماید. معمولاً این حرکات را می توان ایزوتrop فرض نمود. این بدان معناست که

نرخ اضمحلال مولفه های تنفس رینولدز را می توان به نرخ کل اضمحلال <sup>۲۴۱</sup> یعنی  $\epsilon$  مرتبط ساخت:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3} \delta_{ij} \varepsilon \quad (47-5)$$

ابتدا نرخ کل اضمحلال را با استفاده از یک معادله انتقال حل می نمائیم. این معادله شبیه به معادله

دوم مدل  $\varepsilon - k$  میباشد. قطعاً جایگزینهای دیگری برای  $\varepsilon$  وجود دارند ( نظیر  $\omega$ ,  $\tau$  ).

معادله انتقالی برای  $\epsilon$  را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ C_\varepsilon \frac{k}{\varepsilon} \overline{u'_k u'_l} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_l} \right] + \frac{\varepsilon}{k} (C_{\varepsilon 1} P_{kl} S_{lk} - C_{\varepsilon 2} \varepsilon) \quad (48-5)$$

<sup>۲۳۹</sup> Surface Integral

<sup>۲۴۰</sup> High Frequency & Small Scale Motions

<sup>۲۴۱</sup> Total Dissipation Rate

که در آن Production مولفه  $S_{kl}$  ضرائب مدل بوده و  $P_{kl}$  بیانگر دیفیوژن نرخ اضمحلال را می‌توان با استفاده از نظریه انتقال گرادیان مدل نمود.

آخرین گام در مدلسازی ترمهای مدل RSM، تعیین ضرائب به کار رفته در این مدل است. چرا که تقریبهای مدلسازی شامل تعدادی ضرائب تجربی بوده که مقادیر آنها بایستی برای نزدیک شدن به معادلات RSM تعیین گردند. معمولاً شش شرط پایه برای تعیین این ضرائب به کار برد می‌شوند:

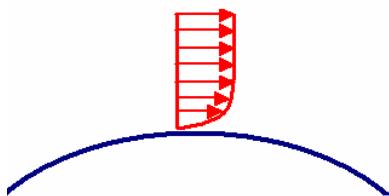
(۱) اولاً "آشفتگی حاصل از شبکه"<sup>۲۴۲</sup> در غیاب برش (Shear) بایستی با یک نرخ منطبق بر نتایج آزمایشگاهی Decay گردد.

(۲) ثانیاً هنگامی که یک نرخ کرنش شدید و کاملاً ناگهانی بر روی یک میدان آشفتگی ایزوتروپ اعمال شود، بایستی سطح آشفتگی خود به خود تنظیم گردد و مقادیر غیر منطقی برای سطح آشفتگی به وجود نیاید.

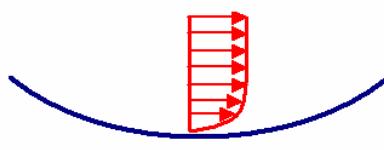
(۳) ثالثاً برای تطبیق نمودن ترم تولید (Production) بر ترم (Dissipation) می‌توان از اطلاعات مربوط به جریانات Homogeneous Free Shear استفاده نمود.

(۴) مدل همچنین بایستی قادر باشد که لایه مرزی نزدیک دیواره جامد را پیش بینی نماید و آشفتگی بایستی در انحنای پایدار کننده آشفتگی (کاهش دهنده آشفتگی) بشکند.

یک سطح منحنی را هنگامی پایدار یا کاهنده آشفتگی مینامند که اندازه سرعت جریان در راستای دور شدن از مرکز انحنا، افزایش یابد  $\frac{\partial U_s}{\partial R} > 0$ ، و آنرا هنگامی ناپایدار یا افزایش دهنده آشفتگی می‌نامند چنانچه اندازه سرعت جریان در راستای دور شدن از مرکز انحنا کاهش یابد  $\frac{\partial U_s}{\partial R} < 0$ .



شکل (۲-۸): سطح منحنی پایدار، کاهش دهنده آشفتگی  
Stable Curvature, Reducing Turbulence



شکل (۱-۸): سطح منحنی ناپایدار، کاهش دهنده آشفتگی  
Unstable Curvature, Increasing Turbulence

<sup>۲۴۲</sup> Grid Generated Turbulence

۵) در نهایت با استفاده از نتایج متعدد جریانات Simple Shear Layer و با استفاده از یک کامپیوتر قوی ضرائب را بهینه می نمائیم.

## مزایا و معایب مدل انتقال تنش رینولدز RSM:

مزایای این مدل عبارتند از:

- ۱) در مقایسه با مدل‌های صفر، یک و دو معادله‌ای، به فیزیک آشفتگی بسیار نزدیکتر می‌باشد.
- ۲) ترمehای Production و Advection ( و یا به عبارت دیگر ترمehای in Energy ) ترمehای صریح بوده و نیاز به مدلسازی ندارند.

معایب این مدل عبارتند از:

- ۱) این مدل بسیار پیچیده بوده و ترمehای بسیار مهم آن ( یعنی ترمehای توزیع مجدد و اضمحلال لزج ) نیازمند مدلسازی می‌باشند.
- ۲) مدلها از لحاظ هزینه محاسباتی بسیار هزینه بر می‌باشند ( یعنی در سه بعد،  $6$  معادله انتقال تنsh داریم ) و به واسطه آنکه دیگر ترمی تحت عنوان ویسکوزیتة آشفته  $\mu_T$  در معادلات ظاهر نشده اند، از لحاظ عددی تمایل زیادی به ناپایداری دارند. همانطور که پیش از این نیز ذکر شد، در مدل‌های RANS، وجود کمیت ویسکوزیتة آشفته  $\mu_T$  همانند یک عامل میرا کننده اغتشاشات جریانی، باعث میرائی و در نهایت حذف اغتشاشات و ناپایداریهای عددی مربوطه می‌گردد. بنابراین با حذف نقش این کمیت در مدل RSM، می‌توان انتظار داشت که ناپایداریهای عددی به طور ناخواسته رشد نموده و همگرائی مساله را با مشکل جدی مواجه سازند.

## **فصل ششم**

### **ذکر چند نکته در مورد**

### **مدل‌سازی جریانات آشفته**

## جدیدترین دستاوردها در بسط و توسعه توابع دیواره بالاخص در مسائل درگیر با انتقال حرارت:

در این قسمت، آخرین پیشرفتها در بیان تحلیلی متغیرهای دینامیکی و نیز تغییرات دما در داخل زیرلایه نزدیک دیواره از یک جریان آشفته ارائه شده اند. اگرچه ایده های ارائه شده مربوط به توابع دیواره، خیلی جدید نمی باشند، لیکن استراتژی مفصلی که در اینجا بدان پرداخته شده است، حاوی خصوصیات جدیدی می باشد که با استفاده از آنها میتوان اثرات بیوانسی، گرادیان فشار ( مثلاً در جریانات محصور یا جریانات بر روی سطوح منحنی )، اثرات مکش یا دمش از طریق سطوح دیواره و حتی تغییرات در خواص مولکولی سیال را بر روی توابع دیواره به دست آمده پیشین وارد نمود.

تقریباً تمام محاسبات CFD مسائل درگیر با انتقال حرارت، استفاده از توابع جبری ساده شده برای دخیل نمودن اثرات زیرلایه لزج بالاخص در فرآیندهای انتقال حرارت را پذیرفته اند. همانطور که پیش از این اشاره شد، با استفاده از این توابع می توان از حجم محاسباتی بسیار سنگین ( به واسطه نیاز به استفاده از گرید فوق العاده متراکم در نزدیکی دیواره ) اجتناب نمود. در اکثر نرم افزارهای تجاری موجود، استفاده از توابع دیواره تنها محدود به " جریانات آشفته نزدیک دیواره آن هم در حال تعادل موضعی <sup>۲۴۳</sup>" می باشد.

اسپالدینگ <sup>۲۴۴</sup> در یک مطالعه جامع ( که به صورت یک کتاب مجتمع شده است ) مجموعه ای از توابع اصلاح شده ناحیه لگاریتمی را جمع آوری نموده است تا با استفاده از آنها بتوان اثراتی همچون گرادیان فشار و یا انتقال جرم از طریق دیواره را نیز در این توابع داخل نمود. چشم پوشی از این اثرات باعث می شوند که توابع دیواره پیشین تنها برای بخشی از جریان ( یعنی ناحیه زیرلایه ) معتبر باشند. همچنین در کتابی که توسط اسپالدینگ و پاتانکار <sup>۲۴۵</sup> نوشته شده است، نتایج خلاصه ای از توابع دیواره اصلاح شده ( برای در نظر گرفتن اثرات گرادیان فشار یا انتقال حرارت جابجایی آزاد یا انتقال جرم ) ارائه شده است. کار مشابهی نیز توسط ولف اشتین <sup>۲۴۶</sup> انجام شده است که در آن تحقیقات وی توانست اثرات " سطوح بالای انرژی جنبشی آشفتگی <sup>۲۴۷</sup>" را که به سمت دیواره Convect و یا Diffuse می شوند را نشان دهد. تنها بهبود قابل ملاحظه ای که پس از دهه ۱۹۶۰ بر روی توابع دیواره اعمال شد، آن بود که پرانتل به جای استفاده از سرعت

<sup>۲۴۳</sup> Near Wall Turbulence in Local Equilibrium

<sup>۲۴۴</sup> Spalding (۱۹۶۷)

<sup>۲۴۵</sup> Patankar, Spalding (۱۹۶۷)

<sup>۲۴۶</sup> Wolfstein (۱۹۶۹)

<sup>۲۴۷</sup> High External Levels of Turbulence Energy

$$u^* = u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_{Wall}}{\rho}} \text{ برشی،} \quad \text{در قانون لگاریتمی اصلی، از ریشه دوم انرژی جنبشی آشفتگی T.K.E. در " نود}$$

مجاور دیواره <sup>۲۴۸</sup> "  $k_p^{1/2}$  " یا استفاده نمود.

به دلایل مختلف، استفاده از توابع دیواره در مسائل صنعتی با خطر مواجه شده اند:

در سطح تحقیقات پایه، استفاده از توابع دیواره روشنی ناکافی و غیر دقیق برای سنجیدن فرآیندهای انتقال میباشد. برای فرار از این مشکل، شخص می بایست انتگرال گیری عددی خود را درست تا لب دیواره و با استفاده از شبکه بسیار متراکم مجاور دیواره انجام دهد. از طرف دیگر تجربه نشان داده است که در بسیاری از مسائل صنعتی، استفاده از توابع دیواره مدرن و اصلاح شده، هیچ مزیت عمده ای در مقایسه با توابع دیواره لگاریتمی کلاسیک پیشین نداشته اند، جز اینکه مجبور به تحمل روابط و فرمولهای پیچیده تر شده ایم. از سوی دیگر برخی اثرات فیزیکی مهمی نیز وجود دارند که حتی اشکال پیچیده توابع دیواره نیز نمی توانستند اثر آنها را مد نظر قرار دهند. یکی از این اثرات مهم فیزیکی، اثرات بویانسی ( ناشی از جابجائی آزاد در مسائل درگیر با انتقال حرارت ) می باشد. اگرچه تحقیقات زیادی توسط " چنگ و لاندر " <sup>۲۴۹</sup> و نیز " جانسون و لاندر " <sup>۲۵۰</sup> برای بهبود عملکرد توابع دیواره صورت گرفت، لیکن کماکان ضعف اساسی توابع دیواره در تعیین تغییرات سرعت و دما در ناحیه لگاریتمی باقی مانده است.

برای مقابله با این مشکلات، در سال ۱۹۹۹ در دانشگاه UMIST تلاش تازه ای جهت ایجاد یک پروفیل تابع دیواره بهبود یافته آغاز شد. در این تحقیقات، دو روش مجزا و کاملاً متفاوت از یکدیگر ارائه شدند:

۱) در روش اول که توسط کرافت و همکاران <sup>۲۵۱</sup> در سال ۲۰۰۱ ارائه شده است، از یک روش انتگرال

گیری عددی یک بعدی و از یک مدل آشفتگی رینولدز پائین معتبر در نزدیک دیواره استفاده شده است.

۲) در روش دوم که در این بحث به تفصیل به آن پرداخته می شود، از یک روش تحلیلی ساده استفاده شده است. اگرچه این روش در نهایت از عمومیت کمتری نسبت به انتگرال گیری عددی برخوردار است، لیکن این روش در مقایسه با انتگرال گیری عددی دارای زمان محاسباتی کمتری به میزان <sup>۵۰</sup> درصد بوده و از طرفی ما را قادر خواهد ساخت تا سهم هر یک از فرآیندهای فیزیکی رخ داده را بهتر

<sup>۲۴۸</sup> Near Wall Node

<sup>۲۴۹</sup> Chieng , Launder (۱۹۸۰)

<sup>۲۵۰</sup> Johnson, Launder (۱۹۸۲)

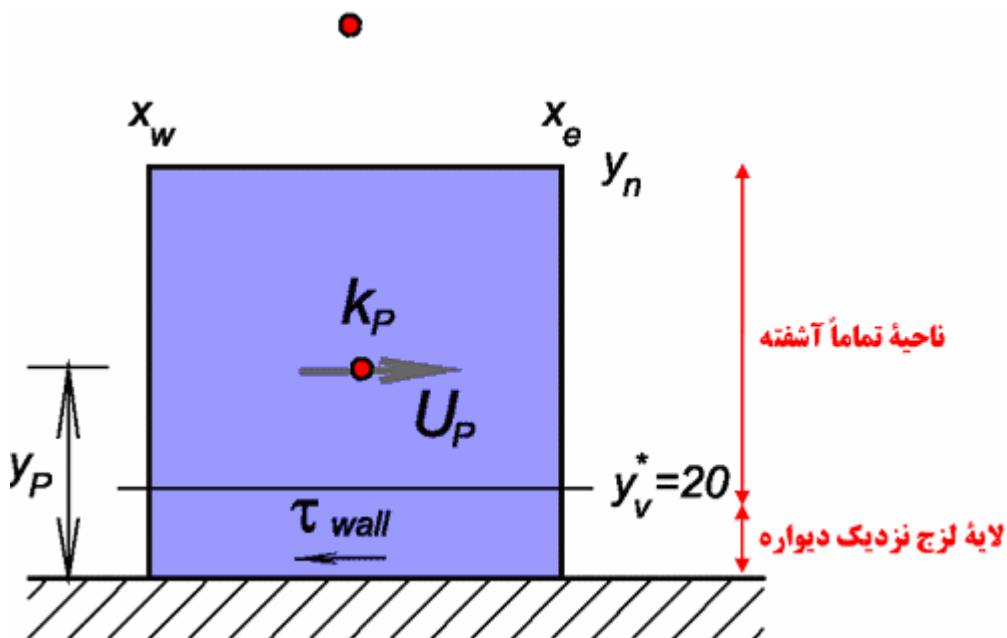
<sup>۲۵۱</sup> Craft and et. al.

تشخیص دهیم. از آنجا که روش ارائه شده ساده می باشد، لذا معادلات به دست آمده از تحلیل دارای پیچیدگی چندانی نمی باشند. فرمولهای به دست آمده در این مبحث از عمومیت بالائی در مسائل مهندسی برخوردار می باشند.

## ۲) روش مرسوم در توابع دیواره پیشین:

برای قضاوت در مورد کارائی توابع دیواره ارائه شده، مجدداً فرمولاسیون توابع دیواره رایج به طور خلاصه مورد توجه قرار می گیرد. در روش مرسوم در توابع دیواره:

- ۱) اولین نود (نود مجاور به دیواره) به اندازه کافی دور از دیواره قرار داده می شود به طوریکه  $y_p$  درون ناحیه تمام‌آشفته قرار داشته باشد. ( $y_p$  فاصله اولین نود مجاور به دیواره می باشد). برای بیان پروفیل متغیرهای فیزیکی در نواحی باقی مانده از توابع دیواره استفاده می شود.
- ۲) جریان در ناحیه تمام‌آشفته از قانون داخلی دیواره تبعیت می نماید.
- ۳) آنگاه از شرایط تعادل موضعی برای تخمین تنش برشی دیواره و همچنین محاسبه ترمehای منبع درون معادلات انتقال آشفتگی (برای  $K$  و دیگر متغیرهای آشفتگی دیگر بسته به مدل به کار رفته) استفاده می شود.



شکل (۱): شاکله یک حجم کنترل مجاور دیواره برای استفاده از توابع دیواره

در داخل حجم کنترل مجاور دیواره، برای مولفه سرعت موازی دیواره، مقدار تنش برشی دیواره با استفاده

از معکوس قانون لگاریتمی و تعمیم دهی قانون لگاریتمی، لاندر و اسپالدینگ<sup>۲۵۲</sup>، به دست می آید:

$$\tau_{Wall} = \frac{k^{\circ} C_{\mu}^{1/4} \rho k_p^{1/2} u_p}{\ln(E C_{\mu}^{1/4} y_p^*)} \quad k^{\circ} = Von Karman Cons. = 0.41 \quad (1-6)$$

از عبارت فوق می توان برای محاسبه نیروهای وارد بر حجم کنترل مجاور دیواره و مولفه ممنتوم موازی دیواره

استفاده نمود. در هنگام انتگرال گیری از معادله انتقال  $k$  برای حجم کنترل مجاور دیواره بایستی به نکات ذیل

توجه نمود:

۱) از انتقال لزج  $k$  به دیواره صرفنظر شده است.

۲) به واسطه تغییرات شدید متغیرهای فیزیکی در نزدیک دیواره، ترمehای منبع موجود در معادله  $k$

یعنی  $P_k, \epsilon$  نمی تواند بر روی حجم کنترل ثابت فرض شود. در حالیکه در روش حجم محدود، برای

سلولهای داخل میدان از این فرض ثابت ماندن  $P_k$  درون حجم کنترل استفاده می شود. به جای

آن، این دو ترم با استفاده از انتگرال گیری تحلیلی استفاده می شود. در ادامه استراتژی مورد استفاده

را مختصرآ توضیح می دهیم.

### محاسبه $P_k$ در ناحیه نزدیک دیواره:

نقاطه شروع این محاسبات بر این مبنای قرار دارد که ایجاد انرژی آشستگی در سلول نزدیک دیواره توسط "برش

ساده"<sup>۲۵۳</sup> صورت می گیرد:

$$P_k = -\rho \overline{u'v'} \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2-6)$$

با استفاده از فرض شرایط تعادل موضعی:

$$\begin{aligned} -\rho \overline{u'v'} &= \tau_{wall} \quad and \quad u = \frac{\tau_{wall}}{k^{\circ} C_{\mu}^{1/4} \rho k_p^{1/4}} \ln \left( E \frac{y k_p^{1/4}}{v} \right) \\ \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\tau_{wall}}{k^{\circ} C_{\mu}^{1/4} \rho k_p^{1/4} y} \end{aligned}$$

بنابراین:

<sup>۲۵۲</sup> Launder & Spalding (۱۹۷۴)  
<sup>۲۵۳</sup> Simple Shear

$$P_k = \frac{\tau_{Wall}^2}{k^\circ C_\mu^{1/4} \rho k_p^{1/2} y} \quad (3-6)$$

عبارت فوق با این فرض به دست آمده است که تنش برشی آشفته بر روی حجم کنترل، ثابت و برابر تنش برشی روی دیواره  $\tau_{Wall}$  می باشد. همچنین با این فرض که انرژی جنبشی  $k$  بر روی این سلول ثابت است،  $k = k_p$ ، آنگاه می توان از  $P_k$  بر روی حجم کنترل مجاور دیوار انتگرال گرفت. اما انتگرال گیری بر روی تمام حجم کنترل صورت نمی گیرد. حجم کنترل (یا سلول) نزدیک دیواره، به دو لایه مجزا تقسیم می شود:

الف) ناحیه تمام‌آشفته که از دیوار دور است.

ب) لایه لزج، درست تا لب دیواره. درون لایه لزج مجاور به دیواره، فرض می شود که  $P_k = 0$  می باشد. علت نیز واضح است: از آنجا که در لایه لزج فرض بر آن است که جریان تماماً آرام می باشد، لذا اندازه تنشهای رینولدز که مختص جریانات آشفته می باشند، برابر صفر می باشند، لذا:

$$\bar{uv} = 0 \Rightarrow P_k = -\rho \bar{uv} \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

مرز مشترک این دو لایه در فاصله  $y_v$  از دیواره قرار گرفته است، نقطه ای که  $y_v = \frac{y_n k_p^{1/2}}{v} = 20$  می باشد.

در اینجا بایستی توجه داشت که ناحیه نزدیک دیواره به دو ناحیه با جریانات حدی تقسیم شده است (یکی تماماً آرام و دیگری تماماً آشفته)، یعنی از وجود ناحیه گذراء یا همان Buffer Layer صرفنظر شده است. این صرفنظر کردن، دقت محاسبات را چندان تحت تاثیر قرار نمی دهد.

مقدار متوسط  $P_k$  بر روی سلول مجاور دیواره با استفاده از انتگرال گیری ذیل به دست می آید:

$$\bar{P}_k = \frac{1}{y_n} \int_{y_v}^{y_n} \frac{\tau_{Wall}^2}{k^\circ C_\mu^{1/4} \rho k_p^{1/2} y} dy = \frac{\tau_{Wall}^2}{k^\circ C_\mu^{1/4} \rho k_p^{1/2} y_n} \ln\left(\frac{y_n}{y_v}\right) \quad (4-6)$$

### محاسبه نرخ اضمحلال در نزدیکی دیواره

بر روی ناحیه تماماً آشفته، مقدار نرخ اضمحلال برابر است با:

$$\varepsilon = \frac{k_p^{3/2}}{C_l y} \quad \text{Where} \quad (C_l = 2.55)$$

در داخل زیرلایه لزج، مقدار  $\varepsilon$  ثابت فرض شده و مقدار آن برابر مقدار  $\varepsilon$  در مرز ناحیه زیرلایه یعنی

$$\varepsilon_v = \frac{k_p^{3/2}}{C_l y} \quad \text{فرض می شود. در اینصورت حاصل انتگرال گیری به صورت ذیل در می آید:}$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{y_n} \left[ y_v \frac{k_p^{3/2}}{C_l y_v} + \int_{y_v}^{y_n} \frac{k_p^{3/2}}{C_l y} dy \right] = \frac{1}{y_n} \left[ y_v \frac{k_p^{3/2}}{C_l y_v} + \frac{k_p^{3/2}}{C_l} \ln\left(\frac{y_n}{y_v}\right) \right] \quad (5-6)$$

معادله انتقال برای  $\varepsilon$  بر روی حجم کنترل مجاور دیواره حل نمی گردد. در عوض، مقدار  $\varepsilon$  در نود مجاور

دیواره از رابطه زیر قرار داده می شود:

$$\varepsilon_p = \frac{k_p^{3/2}}{C_l y_p} \quad (6-6)$$

### ۳) مدل فیزیکی ارائه شده برای ناحیه مجاور دیواره:

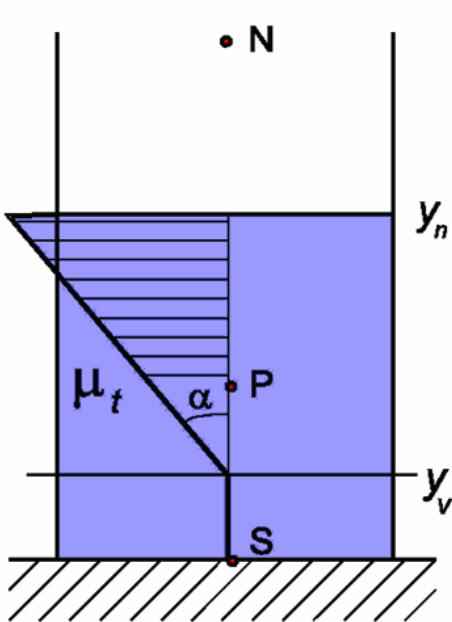
فرض بر این نهاده شده است که در داخل لایه لزج، مقدار  $\mu_t = 0$  است و برای  $y_v > y^*$  مقدار ویسکوزیتۀ

آشفته به صورت خطی و بر حسب فاصله از لبۀ زیرلایه افزایش می یابد:

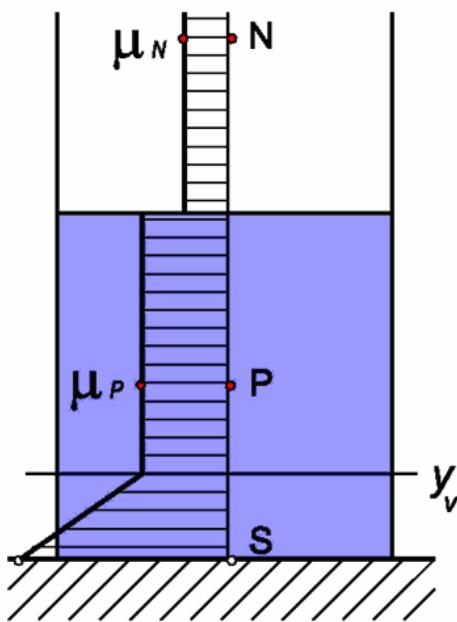
$$\frac{\mu_t}{\mu_v} = \alpha(y^* - y_v) = C_\mu C_l (y^* - y_v) \quad (7-6)$$

که در آن ضرائب  $C_l, C_\mu$  ضرائب رایج بوده که با استفاده از مدل‌های یک معادله ای به دست می‌آیند و دارای مقدارهایی به ترتیب برابر ۰.۰۹, ۲.۵۵ می‌باشند.  $y^*$  یک فاصله بی بعد از دیواره بوده و به صورت

$$y^* = \frac{\rho_v y k_p^{1/2}}{\mu_v} \quad \text{تعريف می‌گردد که اندیس } \nu \text{ بیانگر خواص محاسبه شده در لبۀ زیرلایه لزج می‌باشد.}$$



شکل (۲-۲): تغییرات ویسکوزیتۀ آشفته



شکل (۱-۲): تغییرات ویسکوزیتۀ مولکولی

اگرچه چنگ و لاندر اظهار داشته اند که مقدار  $k$  موجود در تعریف  $y^*$  بایستی در فاصله  $y_v$  محاسبه گردد، لیکن تجربه نشان داده است که این امر باعث بالا رفتن حساسیت به ضخامت حجم کنترل مجاور دیواره می‌گردد و لذا به واسطۀ بالا رفتن پیوند<sup>۲۵۴</sup> بین معادلات، همگرائی دستگاه معادلات آسیب جدی خواهد دید. در توابع دیوارۀ پیشین، از توابع میرائی رایج<sup>۲۵۵</sup> به منظور به صفر رساندن  $\mu$  در داخل زیرلایه لزج استفاده می‌شود، لیکن نکته جالب در این روش این است که معادله (۷-۶) ناحیه جریان آشفته را مستقیماً از دیوار به سمت لبۀ زیرلایه لزج منتقل می‌نماید. این انتخاب باعث ساده شدن انتگرال گیری می‌گردد. از آنجا که

<sup>۲۵۴</sup> Coupling  
<sup>۲۵۵</sup> Conventional Damping Function

می باشد، لذا مقدار  $\mu_{molecular}$  بالاخص در ناحیه زیرلایه لزج مهم می باشد.

تغییرات قابل توجهی که در شکل برای  $\mu_{molecular}$  نشان داده شده است، برای مسائلی می باشد که با جریانات مایعات و گازها در تغییرات دمای قابل توجه و شدید سروکار دارد.

## توابع دیواره توسعه یافته برای میدان دما:

تحلیلی که در اینجا با آن سر و کار داریم، ابتدا با میدان حرارتی و توزیع دما آغاز می شود. در مسائل جابجایی آزاد از آنجا که دما به صورت یک ترم منبع در داخل معادله ممنوط ظاهر می شود، لذا بایستی ابتدائاً توزیع دما درون میدان جریان را به دست بیاوریم. با صرفنظر نمودن از دیفیوژن به موازات دیواره، معادله انتقال آنتالپی (یا معادله انرژی) به صورت زیر در می آید:

$$\rho u \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial T}{\partial y} \right] \quad (8-6)$$

و یا در دستگاه  $y^*$ :

$$\frac{\partial}{\partial y^*} \left[ \left( \frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial T}{\partial y^*} \right] = \frac{\mu_v^2}{\rho_v^2 k_p} \left( \rho u \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = C_{th} \quad (9-6)$$

در منطق توابع دیواره، فرض بر آن است که در نواحی نزدیک دیواره، به واسطه غالب بودن اثرات دیفیوژن در مقایسه با اثرات جابجایی، از اثرات جابجایی می توان در مقابل اثرات دیفیوژن صرفنظر نمود. اما در استراتژی ارائه شده فعلی سعی بر آن شده است که به نوعی اثرات عناصر اصلی ترمهای جابجایی نزدیک دیواره در داخل توابع دیواره وارد شوند و از این بابت توابع دیواره ارائه شده نسبت به توابع دیواره پیشین دارای مزیتهای عمدۀ و قابل توجهی میباشند. در این بین تنها روش پایدار، حفظ اولین ترم معادله انتقال حرارت آن هم به شکل

نایپیستار<sup>۲۵۶</sup> است، یعنی:

$$C_{th} = \frac{\mu_v^2}{\rho_v^2 k_p} \left( \rho u \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (10-6)$$

به  $C_{th}$  اصطلاحاً "انتقال جابجایی حرارتی"<sup>۲۵۷</sup> گفته می شود. چنانچه فرض نمائیم که  $C_{th}$  در عرض زیرلايه ثابت باشد، در اینصورت می توان از معادله (۹-۶) به صورت مجزا بر روی نواحی لزج و تماماً آشفته انتگرال گیری نموده و در این میان بایستی پیوستگی کمیتهای  $y^*$  بر روی فصل مشترک  $\frac{\partial T}{\partial y^*}$  اعمال گردد. نتایج حاصله به صورت ذیل در می آیند:

---

<sup>۲۵۶</sup> Non-Conservative  
<sup>۲۵۷</sup> Thermal Convective Transport

$$T = \begin{cases} T_{Wall} + \frac{\Pr}{\mu_\nu} \left[ \frac{C_{th} y^*^2}{2} + A_{th} y^* \right] & y^* < y_\nu^* \\ T_{Wall} + \frac{\Pr}{\mu_\nu \alpha_t} C_{th} (y^* - y_\nu^*) + \frac{\Pr}{\mu_\nu \alpha_t} \left[ A_{th} + C_{th} \left( y_\nu^* - \frac{1}{\alpha_t} \right) \right] \ln(Y_T) + \frac{\Pr y_\nu^*}{\mu_\nu} \left[ \frac{C_{th}}{2} y_\nu^* + A_{th} \right] & y^* > y_\nu^* \end{cases} \quad (11-8)$$

که در آن،  $A_{th} = -\frac{q_{Wall} \mu_\nu}{C_P \rho_\nu \sqrt{k_P}}$ ,  $Y_T = [1 + \alpha_t (y^* - y_\nu^*)]$ ,  $\alpha_t = \frac{\Pr \cdot \alpha}{\Pr_t}$  می باشد.

## توابع دیواره توسعه یافته برای میدان سرعت:

با استفاده از روش مشابه برای توابع دیواره دمائی، می‌توان تغییرات سرعت در حجم کنترل مجاور دیواره را به صورت ذیل بیان نمود:

$$\frac{\partial}{\partial y^*} \left[ (\mu + \mu_t) \frac{\partial u}{\partial y^*} \right] = c + b(T - T_{ref.}) \quad (12-6)$$

که در آن:

$$c = \frac{\mu_v^2}{\rho_v^2 k_p} \left[ \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x} \right] \quad (13-6)$$

$$b = -\frac{\mu_v^2}{(\rho_v^2 k_p) \rho_{ref.} g \beta}$$

انبساط حرارتی می‌باشد. با انتگرال گیری از معادله مجبور به طور مجزا بر روی نواحی لزج و تماماً آشفته، فرمولی تحلیلی برای  $u$  به دست آمده که از آن می‌توان برای محاسبه تنش برشی دیواره (با معلوم بودن مقدار سرعت بر روی سطح شمالی حجم کنترل و یا  $u_n$ ) استفاده نمود. در ابتدای امر، در حین انتگرال گیری از معادله ممنتو (12-6)، تغییرات دمای  $T$  در عرض حجم کنترل و در لایه‌های لزج و تماماً آشفته با استفاده از جواب تحلیلی ارائه شده در معادله (11-6) تعیین می‌گردد. از آنجا که نتایج حاصله تا حدی پیچیده می‌باشند،

لذا تغییرات پیچیده  $T$  را می‌توان با تغییرات خطی در دو ناحیه لزج و تماماً آشفته تقریب زد:

ابتدا در ناحیه متأثر از ویسکوزیته فرض می‌شود که دما به صورت خطی بین مقدار دمای دیواره،  $T_{Wall}$ ، و مقدار  $T_v$  به دست آمده از جواب تحلیلی،  $T_v$ ، تغییر می‌نماید. آنگاه در ناحیه جریان تمام آشفته فرض می‌شود که مجدداً دما به صورت خطی بین مقدار  $T_v$  و دمای سطح شمالی  $T_n$  تغییر می‌نماید. این تقریب منجر به ساده سازی قابل توجهی در جواب تحلیلی معادله ممنتو (بدون آسیب رساندن به دقت جوابها) می‌شود. جزئیات فرآیند طی شده در ویرایش بعدی این جزو ذکر خواهد شد.

در حالت جریان متأثر از بویانسی (جریانات جابجایی آزاد)، جواب معادله ممنتو گستته شده در حجم کنترل مجاور دیواره نیازمند یک ترم منبع می‌باشد که بیانگر سهم متوسط ترم بویانسی در عرض سلول می‌باشد:

$$\overline{F_B} = \frac{1}{y_n} \int_0^{y_n} \rho g \beta (T - T_{ref.}) dy \quad (14-6)$$

در روش ارائه شده، این انتگرال را می‌توان با انتگرال گیری از پروفیلهای تحلیلی دمای ارائه شده پیشین محاسبه نمود. مجدداً نتایج در پیوست (الف) و (ب) آورده شده‌اند.

## نرخ اضمحلال متوسط و تعیین مقدار $y_v^*$ در توابع دیواره توسعه یافته:

حل معادله  $k$  بر روی سلول مجاور دیواره نیازمند آن است که شخص مقادیر متوسط نرخ تولید و اضمحلال را بر روی سلول مورد نظر محاسبه نماید. مقدار متوسط نرخ تولید را می‌توان با استفاده از تغییرات ویسکوزیتۀ آشفته فرضی و محاسبه  $\frac{\partial u}{\partial y}$  با استفاده از روابط تحلیلی میدان سرعت در بخش تمام آشفته سلول محاسبه نمود.

برای محاسبه مقدار متوسط نرخ اضمحلال، چنگ و لاندر پروفیل  $\epsilon$  را به صورت یک پروفیل دو قسمتی و به شکل ذیل فرض نمودند:

الف) بر روی ناحیه تمام آشفته فرض می‌شود که  $\epsilon$  با عکس  $y$  نسبت دارد:

$$\epsilon = \frac{k_p^{3/2}}{C_l y} \quad (15-6)$$

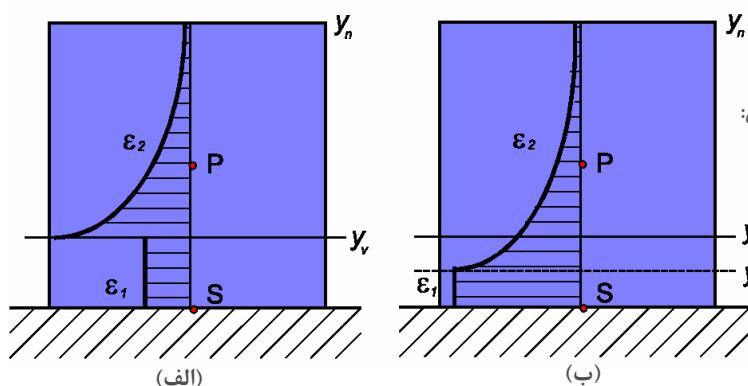
ب) بر روی ناحیه لزج، از مقدار یکنواخت حدی ذیل استفاده می‌شود:

$$\epsilon = \frac{2\nu k_p}{y_v^2} \quad (16-6)$$

که این رابطه با استفاده از نتایج تحلیلی صریح به دست آمده است، یعنی:

$$\epsilon = \nu \left( \frac{\partial k^{1/2}}{\partial y} \right)^2 \cong \frac{2\nu k}{y^2} \quad (\text{Jones, Launder (1972)}) \quad (17-6)$$

این نوع رفتار، که در شکل (الف-۳) نشان داده شده است، تمام نتایج DNS به دست آمده از ۱۵ سال تحقیقات عددی اخیر را که در آن، ماکریزم مقدار  $\epsilon$  بر روی دیواره وجود دارد را نقض می‌کند. بنابراین برای هماهنگ نمودن مدل خود با تحقیقات ۱۵ سال اخیر، تغییرات معکوس  $\epsilon$  با  $y$  تا فواصل نزدیکتر به دیواره امتداد می‌یابد که این امر در شکل (ب-۳) نشان داده شده است:



شکل (۳): توزیع نرخ اضمحلال برای:  
الف) توابع دیواره استاندارد  
ب) توابع دیواره ارائه شده جدید

فاصله  $y_d$  به نحوی انتخاب می گردد که در نقطه اتصال دو ناحیه لزج و تماماً آشفته، هیچ نوع ناپیوستگی در توزیع  $\varepsilon$  مشاهده نشود، یعنی:

$$\frac{k_p^{3/2}}{C_l y_d} = \frac{2\nu k_p}{y_d^2} \quad \text{or} \quad y_d^* = 2C_l = 5.1 \quad (18-6)$$

آنگاه می توان نرخ اضمحلال متوسط بر روی سلول مجاور دیواره را با انتگرال گیری از این تغییرات دو قسمتی به دست آورد:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{y_n} \left[ \frac{2k_p^{3/2}}{y_d^*} + \frac{k_p^{3/2}}{2.55} \ln \left( \frac{y_n}{y_d} \right) \right] \quad (19-6)$$

اکنون تنها یک ثابت وجود دارد که بایستی تعیین مقدار گردد و آن  $y_v^*$  می باشد. با استفاده از تحلیلهای عددی برای جریانات توسعه یافته درون لوله ها می توان نشان داد که  $y_v^* = 10.8$  می باشد. اتخاذ دو ضخامت متفاوت برای زیرلایه لزج  $(y_v^* = 10.8)$  و زیرلایه اضمحلال  $(y_d^* = 5.1)$ <sup>۲۵۸</sup> نه فقط پروفیل اضمحلال را به توزیعهای به دست آمده از مطالعات DNS نزدیک می سازد، بلکه همچنین می تواند پیش بینی های قانون لگاریتمی در جابجایی اجباری را بهبود ببخشد. از لحاظ مقایسه، به دست آمدن  $y_d^* < y_v^*$  در تطبیق کامل با ادعای وُل夫 اشتین (۱۹۶۹) در مدل یک معادله ای وی می باشد.

---

<sup>۲۵۸</sup> Dissipation Sublayer

## وابستگی دمائی ویسکوزیته و اعمال اثر این تغییرات در توابع دیواره توسعه یافته:

تغییرات ویسکوزیته ملکولی بر حسب دما بدان معناست که در جریاناتی که با نرخهای گرمایش و یا سرمایش شدید مواجه هستیم، وابستگی دمائی ویسکوزیته ملکولی بایستی در عرض زیرلایه لرج مد نظر قرار گیرد. این امر در شکل (۲-ب) نشان داده شده است. استراتژی اولیه ما، در نظر گرفتن تغییرات خطی ویسکوزیته ملکولی بر روی این زیرناحیه میباشد.

اگرچه انتگرال گیری تحلیلی از معادلات ممنتوں و آنتالپی هنوز هم می‌تواند انجام پذیرد، لیکن هنوز نتوانسته ایم به یک جواب عددی پایدار برای این مساله دست بیابیم. تحلیلهای عددی بعدی نشان داده اند که در نظر گرفتن تغییرات خطی برای ویسکوزیته ملکولی حتی می‌تواند به نقطه تکین<sup>۲۵۹</sup> در فرآیند عددی منجر گردد. از اینرو تغییرات خطی ویسکوزیته ملکولی را با یک فرمول Hyperbolic جایگزین می‌کیم:

$$\mu = \frac{\mu_\nu}{1 + b_\mu (y^* - y_\nu^*)} \quad 0 < y^* < y_\nu^* \quad (20-6)$$

که در آن  $b_\mu = \frac{\mu_{Wall} - \mu_\nu}{\mu_{Wall} \cdot y_\nu^*}$  می‌باشد.

این نوع انتخاب برای تغییرات ویسکوزیته ملکولی ( $\mu(T)$ ) شباهت زیادی به تغییرات خطی ویسکوزیته ملکولی دارد، با این تفاوت که با این انتخاب جدید، دیگر با مسأله ناپایداری عددی مواجه نمی‌باشیم.

## وارد نمودن اثرات آرام سازی جریان<sup>۲۶۰</sup> در توابع دیواره توسعه یافته:

از اواسط دهه ۱۹۶۰ نشان داده شد که چنانچه تنفس برشی بر حسب فاصله عمود بر دیواره خیلی سریع کاهش یابد، به نحوی که تنفس بر روی لب لایه لزج به میزان ۱۰٪ مقدار تنفس برشی روی دیواره و یا کمتر از آن برسد، در اینصورت ضخامت زیرلایه لزج ( $y^*$ ) افزایش یافته که می‌تواند منجر به کاهش قابل توجهی در عدد ناسلت گردد. بسیاری از مدل‌های ساده طول اختلاطی و مدل‌های یک معادله‌ای از ضرائب تصحیح تجربی استفاده می‌نمایند تا ضخامت لایه لزج وابسته به فاکتورهای همچون گرادیان فشار در راستای جریان آزاد و یا نرخ مکش و یا دمش از طریق دیواره گردد. به عنوان مثال توابع دیواره ارائه شده توسط جانسون و لاندر، اثرات مکش از طریق دیواره را بر روی پروفیلهای توابع دیواره نشان داده‌اند. در اینجا نیز ابتداً از عمل مشابهی استفاده می‌شود. اما "اصل تطبیق"<sup>۲۶۱</sup> نیازمند آن است که انرژی آشفتگی، که در تعریف  $y^*$  وارد شده است، در نقطه  $y$  محاسبه شده باشد. از طرفی برای محاسبه  $k$  در نقطه  $y$  نیازمند برونویابی از مقادیر مربوطه در نقاط  $y_{n,P}$  می‌باشیم که این فرآیند همانطور که پیش از این هم بدان اشاره شد باعث ناپایدار شدن مساله می‌گردد.

فرآیندی که در نهایت اتخاذ شد آن است که سطح متوسط اضمحلال انرژی جنبشی آشفتگی را بر روی المان مجاور دیواره تنظیم نمائیم. ضریبی که با استفاده از آن می‌توان مقدار  $\bar{e}$  را اصلاح نمود (که آنرا با  $F_e$  مورد نمایش می‌دهیم) لازم است تابعی از یک پارامتر مناسب جریانی باشد. چندین گزینه مختلف برای  $F_e$  مورد آزمایش قرار گرفته‌اند و در نهایت حداقل یکی از آنها حداقل وابستگی به گردید و کمترین حساسیت به تغییرات عدد رینولدز را از خود نشان داد، این انتخاب در حقیقت نسبت تنفس برشی در لب ناحیه لزج به تنفس برشی بر روی دیواره می‌باشد. این نسبت در نهایت به فرم عمومی بدون بعد  $\lambda$  اصلاح شد:

$$\lambda = \left\{ \frac{\mu_w \sqrt{\left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)_w \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)_w}}{\mu_v \sqrt{\left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)_v \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)_v}} \right\} \quad (21-6)$$

"تغییرات ضخامت بدون بعد" ناحیه داخلی لزج  $y^*$  را می‌توان با "تنظیم نرخ اضمحلال متوسط آشفتگی" بر روی حجم کنترل نزدیک دیواره با استفاده از رابطه ذیل مدل نمود:

<sup>۲۶۰</sup> Laminarization Effects  
<sup>۲۶۱</sup> Consistency

$$\bar{\mathcal{E}}_{new} = F_{\varepsilon} \bar{\mathcal{E}}_{Original} \quad (22-6)$$

که در آن:

$$F_{\varepsilon} = \begin{cases} 1 + 1.5 \{1 - \exp[-6.9(\lambda - 0.98)]\} \times \{1 - \exp[-193(\max(\alpha, 0))^2]\} & \lambda \geq 1.0 \\ 1 - (1 - F_{\varepsilon_0}) \left[ 1 - \exp\left(-\frac{1-\lambda}{\lambda}\right) \right] \times \{1 - \exp[-11.1(\max(\gamma, 0))^2]\} & \lambda < 1.0 \end{cases} \quad (23-6)$$

که در آن  $\alpha = \frac{\lambda}{1.02} - 1$ ,  $\gamma = \frac{0.98}{\lambda} - 1$ ,  $F_{\varepsilon_0} = 0.75$  می باشد. برای به دست آوردن رابطه فوق، مقدار

به نحوی تعیین شده است که تطابق خوبی با پیش بینی های مدل رینولدز پائین  $\varepsilon - k$  برای جابجایی اجباری و جابجایی ترکیبی (آزاد + اجباری) درون یک لوله داشته باشد.

## مزایای توابع دیواره اصلاح شده:

توابع دیواره اصلاح شده ای که تا اینجای مطلب ارائه شده اند، بر خلاف نسخه های قبلی توابع دیواره، از بابت وابستگی به شبکه و المان بندی دامنه چندان آزاری نمی بینند، یعنی بر خلاف توابع دیواره پیشین که وابستگی شدیدی به شبکه داشتند، در اینجا چندان وابستگی خاصی به شبکه مشاهده نشده است. با این وجود وقتی که زیرلایه لرج  $\nu$  اغلب یا تمام المان مجاور دیواره را اشغال نموده باشد، استفاده از دو گام ذیل برای رسیدن به جوابهای دقیقتر مطلوب به نظر می رسد:

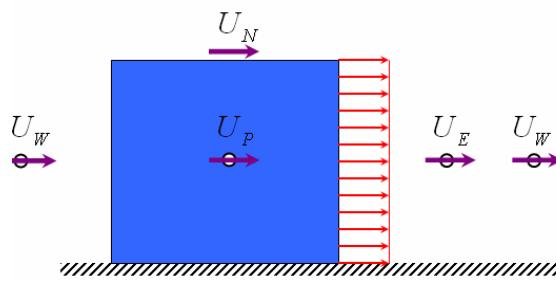
الف) ترمهای رینولدز پائین به شکل و فرم معادله  $\epsilon - k$  ( به کار رفته در دامنه خارجی جریان – به کار گرفته شده در بالای سلولهای نزدیک دیواره ) در معادلات داخل گردند.

ب) وقتی  $\nu$  برابر یا بزرگتر از  $\nu$  باشد، توابع دیواره بایستی بر این مبنای اعمال شوند که در آن ناحیه لرج تمام حجم کنترل مورد نظر را اشغال نموده باشد. جزئیات در مقاله Gerasimov ( به سال ۲۰۰۱ ) آمده است. بهینه سازی دیگری که در توسعه توابع دیواره مطرح شده است، و انحراف از توابع دیواره رایج را نشان

میدهد، مربوط به محاسبه شارهای جابجایی موازی دیواره <sup>۲۶۲</sup> یعنی  $C_w, C_e$  بر روی صفحات حجم کنترل مجاور دیواره می باشد. در توابع دیواره معمول و رایج، در داخل حجم کنترل مجاور دیواره، این شارها با فرض متغیرهای جریانی ثابت ( نه به صورت توزیع غیر ثابت متغیرهای جریانی ) بر روی صفحات سلولی عمود بر دیواره محاسبه می شوند. ( شکل ۱-۴ ) لیکن در اینجا و در روشهای داده شده است، شارهای جابجایی با انتگرال گیری از توزیع متغیر جریانی ( به دست آمده از جواب تحلیلی ) محاسبه شده است. با توجه به شکل (۴) در روش توابع دیواره رایج، شار موازی دیواره  $C_e$  برای U-Momentum از رابطه

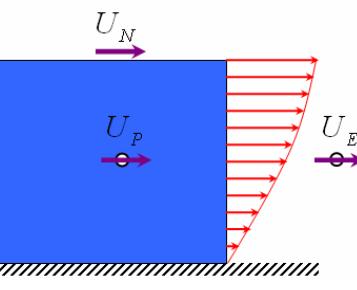
$$C_e = \rho U_e \quad \text{Where} \quad U_e = \frac{1}{2} (U_p + U_e) \quad \text{ذیل به دست می آید:}$$

$$C_e = \frac{\rho}{U_e} \int_{y=0}^{y_n} U_{an_e}^2 dy \quad \text{در حالیکه در روش توابع دیواره اصلاح شده،}$$



شکل (۱-۴): توزیع سرعت غیر یکنواخت

<sup>۲۶۲</sup> Wall Parallel Convective Fluxes



شکل (۲-۴): توزیع سرعت غیر یکنواخت

که در آن  $U_e$  همانند قبل و  $U_{an_e}$  پروفیل سرعت تحلیلی در سطح شرقی حجم کنترل می باشد. این مزیت بالاخص در Opposed Wall Jet ( که باعث جدایش جریان می شود ) مشاهده شده است. همچنین بهبود مشابهی در جریانات شامل Separation و Impingment مشاهده می شود.

## مدلسازی ناحیه زیر لایه لزج نزدیک دیواره:

جريانات آشفته به شدت متاثر از حضور دیواره های جامد می باشند. واضح است که سرعت متوسط جريان به واسطه شرط عدم لغزش متاثر از حضور دیواره خواهد شد. آشفتگی در نزدیکی دیواره به طرق مختلفی متاثر می گردد. در فاصله بسیار نزدیک به دیواره، اثرات میرائي لزجت سیال باعث کاهش Fluctuation سرعت در راستای مماسی می گردد. در حالیکه انسداد دیواره باعث کاهش Fluctuation در راستای عمود بر دیواره می گردد. کمی بالاتر از دیواره، در حوالی ناحیه ای که اثرات میرائي لزجت کاهش یافته است، آشفتگی به سرعت و به واسطه تولید انرژی جنبشی آشفتگی ناشی از گرادیانهای شدید سرعت متوسط، افزایش می یابد. مدلسازی نواحی نزدیک دیواره به شدت صحت و سقم مسائل عددی را متاثر از خود می سازد، تا آنجائیکه میتوان دیوارها را منبع اصلی ایجاد Mean Vorticity و آشفتگی جريان نام برد، از طرفی این ناحیه نزدیک دیوار است که متغیرهای جريانی در آن نواحی با گرادیانهای بالا تغییر می نمایند. انتقال ممنتوم و سایر کمیتهای اسکالر از طریق این ناحیه صورت می پذیرد. لذا هر چه حضور فیزیکی دیوارها و جريان سیال مجاور آنها در مسائل عددی بهتر و دقیقتر مورد توجه قرار گیرند، مدلسازی عددی انجام شده به نتایج فیزیکی و تجربی نزدیکتر خواهد بود.

از طرفی می دانیم که معادلات حاکم بر مدلهاي همچون مدلهاي دو معادله اي استاندارد  $\epsilon - k$ ، بر اساس فرض جريان کاملاً آشفته نوشته شده اند، لذا اين قبيل مدلها اغلب برای هسته مرکزي آشفته جريان مناسب هستند و استفاده از مدلهاي مزبور برای نواحی نزدیک دیواره، که جريان آرام می باشد، مناسب نبوده و اغلب با مشکل عدم دقت و خطای بالاي محاسباتي مواجه می شوند. بنابراین برای به دست آوردن پروفیل خواص در نزدیک دیواره از دو روش استفاده می گردد:

الف) استفاده از توابع دیواره

ب) استفاده از مدلهاي دو معادله اي رینولدز پائين

استفاده از توابع دیواره نياز به اصلاح مدلهاي آشفتگی را برطرف می سازد، ليكن مشکل اصلی اين توابع محدوديت استفاده از آنها در جريانات مختلف می باشد.

استفاده از مدلهاي دو معادله اي رینولدز پائين، اگر چه حجم محاسباتي بيشتری را می طلبد، ليكن به واسطه حل معادله به جای استفاده از معادلات پروفيلی ثابت، دقیقتر خواهد بود.

همانطور که پیش از این نیز اشاره شد، توابع دیواره، توابعی هستند که تغییرات خواصی

نظیر  $U_i, T, \overline{u_i u_j}, k, \varepsilon$  را در ناحیه نزدیک دیواره بیان می کنند. در استفاده از توابع دیواره بایستی دقت

داشت که روابطی همچون توابع دیواره (۴-۱۸) یا تابع دیواره ریچارد، رابطه (۴-۱۹)، اگرچه برای تمام نواحی

زیرلایه لرج، ناحیه گذرا و ناحیه تماماً آشفته صادق می باشد، لیکن توصیه می شود که توابع دیواره، به

واسطه محدود بودن دقت آنها و همچنین حساسیت جواب نهایی به خطاهای عددی، تنها برای دو ناحیه

زیرلایه لرج و ناحیه گذرا مورد استفاده قرار گیرند. یعنی حل معادلات جریان آشفته از ابتدای ناحیه جریان

تماماً آشفته، مثلاً  $y^+ > 50$  or  $y^+ < 30$  آغاز شوند. به عبارت دیگر، اولین المان بهتر است

در  $y^+ = 30$  or  $y^+ = 50$  قرار داشته باشد. ( متغیر بودن محدوده ۳۰ تا ۵۰، به واسطه متغیر بودن نقطه

شروع جریان تماماً آشفته در مسائل مختلف می باشد ).

استفاده از روش توابع دیواره تنها در جریانات غیر جدایشی دو بعدی اعتبار دارد و برای جریانات جدایشی،

لایه مرزی آشفته در اعداد رینولدز گذرا و پائینتر از گذرا، جریانات جدایشی، جریانات غیر دائمی و وابسته به

زمان، جریان روی سطوح دور، جریان روی سطوح با انتقال حرارت و یا جریان بر روی سطوح با انتقال جرم

(ناشی از دمش یا مکش یا غیره) استفاده از توابع دیواره خطای قابل توجهی را باعث می شود. لذا از مدلها

جدیدی که اثر دیواره و یا اثر لزجت مولکولی یا هر دو را ( به عنوان مبدلها آشفتگی جریان به جریانی آرام )

در محاسبات داخل نموده اند، استفاده میگردد تا از پروفیلهای تقریبی ارائه شده در مفاهیم توابع دیواره دور

گردید.

بدین منظور سعی شده است که نسخه های رینولدز پائین معادله  $\varepsilon - k$  به عنوان مدل اصلاح شده  $k - \varepsilon$  به

دست آیند. Rodi با بررسی جریان دیواره با استفاده از روش‌های همچون DNS، به این نتیجه رسید که مدل

اصلاح شده  $\varepsilon - k$  ( به عنوان مدل آشفتگی رینولدز پائین ) مقدار حداقل  $\varepsilon$  را بر روی دیواره پیش بینی

می نماید که یک نتیجه کاملاً فیزیکی است. اما در مدلها قبلی، همانند توابع دیواره، مقدار حداقل  $\varepsilon$  بر

روی دیوار واقع نمی شد که نا کارآمدی این مدلها در نزدیک دیواره را نشان می دهد.

یکی دیگر از این مدلها، مدل  $K - \omega$  SST میباشد. این مدل در نواحی دور از دیواره از معادلات رینولدز

بالای  $\varepsilon - k$  و در نواحی نزدیک دیواره از معادلات رینولدز پائین  $\omega - k$  استفاده می نماید.

مدل یک معادله ای Spalart-Allmaras به نوعی طراحی شده است که می توان از شکل فعلی آن در داخل لایه مرزی و نواحی نزدیک دیواره استفاده نمود. بدین صورت که برای در نظر گرفتن اثرات نزدیکی به دیواره تنها کافیست که از تعداد المانهای زیاد در داخل لایه مرزی، بالاخص نواحی گرادیان بالای نزدیک دیواره، استفاده نمود. معمولاً کاربران حرفه ای CFD در داخل لایه مرزی به تعداد ۱۲ تا ۱۵ عدد المان یا نود قرار می دهند و سعی می کنند که تراکم این المانها بیشتر در نواحی نزدیک دیواره متتمرکز شده باشند. از سوی دیگر، برخی اینطور اظهار نموده اند که برای رسیدن به جوابهای دقیق، بایستی در ناحیه لزج نزدیک دیوار، یا در محدوده  $Re_y < 200$  حداقل بایستی به تعداد ۱۰ عدد المان یا نود در اختیار داشت تا بتوان جریان متوسط سیال و کمیتهای آشفته را در این ناحیه را به خوبی مدل نمود.

چنانچه بخواهیم برای مدلسازی جریان در نزدیکی دیواره از توابع دیواره استفاده نمائیم، اولین المان یا اولین گرهه به کار رفته در گسسته سازی میدان بایستی در خارج ناحیه زیرلایه لزج و ناحیه گذر، یعنی در محدوده  $y^+ < 50$  ( یا خارج از محدوده مجاز برای استفاده از توابع دیواره ) قرار داشته باشد. استفاده از المانی که نود مرکزی آن در فواصل نزدیکتر به دیواره قرار دارد،  $y^+ < 50$ ، می تواند باعث حل معادلات مدلهای آشفته رینولدز بالا نظیر مدل استاندارد  $\epsilon - k$  در نواحی نزدیک دیواره با جریانات با رینولدز موضعی و آشفتگی کم گردد که این امر می تواند باعث به وجود آمدن خطای محاسباتی گردد. یعنی معادلاتی را که برای هسته آشفته جریان ارائه شده اند را در ناحیه نزدیک دیواره ( با جریان آرام ) حل نموده ایم که باعث خطای مدلسازی خواهد شد.

چنانچه هدف استفاده از مدلهای اصلاح شده رینولدز پائین ( مانند مدل  $SST k - \omega$  ) باشد، شبکه بنده میدان بایستی درست تا لب دیواره امتداد یابد، یعنی شبکه عددی ایجاد شده بایستی ناحیه زیرلایه لزج و ناحیه گذر را تواماً بپوشاند.

به طور کلی استفاده از توابع دیواره در جریانات ذیل خطای قابل توجهی را در مدلسازی ها باعث می شود:

- جریاناتی که بخش عمده آن جریان رینولدز پائین می باشد و یا دارای اثرات نزدیک دیواره شدیدی میباشد. مانند جریان درون یک شکاف کوچک و یا جریان سیال با ویسکوزیتّه خیلی بالا و یا سرعت پائین و یا فواصل اولیه جریان برخورده به یک دیواره.

۲- وقتی انحراف زیادی از " یک بعدی بودن جریان در ناحیه نزدیک دیواره <sup>۲۶۳</sup>" وجود داشته باشد. این نواحی در نزدیکی نقاط جدایش جریان، اتصال مجدد جریان، نقطه سکون جریان <sup>۲۶۴</sup> و نیز در مواردی که شتابدهی سریع جریان یا توقف سریع جریان <sup>۲۶۵</sup> و نیز در مورد نیروهای حجمی رخ میدهد، مشاهده می گردد.

۳- Transpiration شدید از طریق دیواره (نظیر دمش <sup>۲۶۶</sup> یا مکش <sup>۲۶۷</sup>). و یا آنکه انتقال حرارت و یا انتقال جرم با مقادیر بسیار بزرگ یا بسیار کوچک اعداد پرانتل یا اشمیت <sup>۲۶۸</sup> داشته باشیم.

۴- انتقال حرارت و انتقال جرم به طور همزمان.

۵- گرادیان شدید فشار که منجر به جدایش جریان گردد.

۶- نیروهای حجمی قوی (نظیر جریان در نزدیکی صفحات دور و یا جریانات ناشی از نیروهای بویانسی)

۷- سه بعدی شدن بیش از حد جریان در نواحی نزدیک دیواره (مانند Ekman Spiral Flow و یا (Strongly Skewed لایه های مرزی

گاهًا مشاهده شده است که در برخی از نرم افزارهای تجاری (نظیر Fluent, StarCD, Ansys)، در مدلسازی نواحی نزدیک دیواره از مدلی با نام مدل منطقه ای دو لایه <sup>۲۶۹</sup> استفاده می شود. در این مدل تمام دامنه مساله به دو قسمت کلی "ناحیه متاثر از لزجت <sup>۲۷۰</sup>" و "ناحیه تمام آشفته <sup>۲۷۱</sup>" تقسیم می گردد. این دو

ناحیه را می توان با استفاده از تعریف عدد رینولدز در راستای عمود بر صفحه، یا  $Re_y^* = \frac{\rho \sqrt{k} y}{\mu}$ ، از یکدیگر تمیز داد. بر مبنای معیارهای به کار رفته در این مدل، ناحیه متاثر از لزجت ناحیه ای است که  $Re_y^* < 200$  باشد، از سوی دیگر ناحیه تمام آشفته ناحیه ای است که  $Re_y^* > 200$  باشد. در ناحیه متاثر از لزجت برای به دست آوردن تغییرات کمیتهای آشفتگی، نظیر مقادیر Diffusivity ممنتوم، حرارت و جرم، یا از مدل طول اختلاطی ون دریست استفاده می شود و یا آنکه از مدل یک معادله ای ۷۱ اشتبان <sup>۲۷۲</sup> استفاده می گردد. در ناحیه تمام آشفته نیز از مدلهای  $RSM, k - \varepsilon$  استفاده می شود. در مدل تک معادله ای ۷۲ اشتبان،

<sup>۲۶۳</sup> Local One-Dimensionality in the Near Wall Region

<sup>۲۶۴</sup> Stagnation Point

<sup>۲۶۵</sup> Strong Acceleration or Strong Retardation

<sup>۲۶۶</sup> Blowing

<sup>۲۶۷</sup> Suction

<sup>۲۶۸</sup> Schmidt No. ( $Sc$ )

<sup>۲۶۹</sup> Two Layer Zonal Model

<sup>۲۷۰</sup> Viscosity Affected Region

<sup>۲۷۱</sup> Fully Turbulent Region

<sup>۲۷۲</sup> Wolfstein One Equation Model

معادلات ممنتوم و معادله  $k - \varepsilon$ , RSM همان معادلات به کار رفته در مدلهای  $k - \varepsilon$  می باشد، لیکن در این

مدل، ویسکوزیتۀ آشفته  $\mu_t$  که پیش از این به صورت  $\mu_t = C_\mu \rho \frac{k^2}{\varepsilon}$  تعریف شده بود، در اینجا از رابطه ذیل

به دست می آید:

$$\mu_t = C_\mu \rho \sqrt{k} l_\mu \quad (24-6)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{k^{3/2}}{l_\varepsilon} \\ l_\mu &= C_l \left[ 1 - \text{Exp} \left( -\frac{\text{Re}_y}{A_\mu} \right) \right], \quad l_\varepsilon = C_l \left[ 1 - \text{Exp} \left( -\frac{\text{Re}_y}{A_\varepsilon} \right) \right], \quad C_l = k C_\mu^{-3/4}, \quad A_\mu = 70, \quad A_\varepsilon = 2C_l \end{aligned} \quad (25-6)$$

در مدل منطقه ای دولایه، توصیه می شود که اولین المان درست در  $y^+ = 1$  قرار داشته باشد. مشکل مدل

منطقه ای دولایه، عدم تطبیق و همخوانی کمیتهای آشفتگی درست در  $\text{Re}_y^* = 200$  می باشد.

## کنترل ضخامت المانها (سلولها) در نزدیکی دیواره:

برای مدل‌های رینولدز بالا، نظیر مدل  $k, \varepsilon$ ، برای اطمینان یافتن از اینکه لایه اول المانها به قدر کافی ضخیم می‌باشد تا بتوان با اطمینان از قرار گرفتن زیرلایه لژ و ناحیه گذراء در داخل آن، از توابع دیواره استفاده نمود، بهتر است نمودار  $y^+$  بر روی دیواره‌ها ترسیم گردد. چنانچه مقدار  $y^+$  برای تمام یا بخش عمدۀ ای از المانها (یا سلولهای) نزدیک دیواره بزرگتر از  $30$  باشد، در اینصورت می‌توان گفت که این المانها (یا سلولها) به قدر کافی ضخیم می‌باشند. چنانچه برای برخی از المانها (یا سلولها) مقدار  $y^+$  کوچکتر از  $30$  درآمده باشد، در صورتیکه این اتفاق در نواحی بحرانی و مهم جریان رخ نداده باشد، در اینصورت می‌توان با دیده اغراض از کنار این مساله گذشت. (البته همچنانکه بارها گفته شد حد بالای محدوده گذراء، یعنی  $y^+ = 30$  تنها یک عدد تقریبی است و این حد می‌تواند در مسائل مختلف تغییر قابل توجهی داشته باشد). در مسائلی که شامل پدیده‌های جدایش آرام و ملایم می‌باشند، (نظیر آنچه در روی سطوح با شبیه ملایم، مثلاً در دیفیوزرها، رخ می‌دهد و یا بر روی سطوح منحنی وار، مثلاً جریان درون کانالهای پیچیده شده و یا اتصالات U شکل) میدان جریان پیش‌بینی شده به مقادیر  $y^+$  بالا دست نقطۀ جدایش حساس می‌باشد. در این موارد دقیقترین جوابها هنگامی به دست می‌آیند که مقادیر  $y^+$  در بالا دست نقطۀ جدایش جریان پتانسیل در محدوده  $100 < y^+ < 30$  حفظ شده باشد. چنانچه پس از حل، مشاهده شد که مقادیر  $y^+$  در این نواحی خارج از بازۀ مذبور هستند، Run بیشتر همراه با اصلاح شبکه در نواحی نزدیک دیوار صورت گیرد. چنانچه مقادیر  $y^+$  خیلی بزرگ باشند، لازم است که از سلولهای ریزتری در نواحی نزدیک دیوار استفاده نمود. در مقابل چنانچه مقادیر  $y^+$  کوچکتر از  $30$  باشند، بایستی از المانهای ضخیمتر در نزدیکی دیواره استفاده نمود.

برای جریانات همدم، میدان سرعت پیش‌بینی شده معمولاً به مقادیر  $y^+ < 10$  و  $y^+ < 1000$  در محدوده  $10 < y^+ < 30$  برای اغلب مرزهای جامد که جریان در آن نواحی به صورت متصل و چسبیده به دیوار باقی می‌ماند، حساس نمی‌باشد. به عبارت دیگر، این محدوده، محدوده مجاز برای جریانات همدم می‌باشد. این طیف از  $y^+$  حتی برای جدایش جریان رخ داده ناشی از گوشۀ های تیز، که رفتار جریان بسیار پیچیده و ناشی از مکانیزم‌های غیرلزجی است، نیز معتبر می‌باشد.

در جریانات غیرهمدما، که شامل پدیده های انتقال حرارت و جرم از طریق دیواره هستند، محدوده مجاز  $y^+$

در مقایسه با محدوده جریانات همدمبا باریکتر می باشد. در این موارد پیشنهاد می شود که مقادیر  $y^+$  در

محدوده  $300 < y^+ < 30$  نگه داشته شود.

چنانچه درون جریان جداش هم وجود داشته باشد، برای رسیدن به بهترین پیش بینیها، باز هم محدوده

باریکتری یعنی  $100 < y^+ < 30$  پیشنهاد می شود.

برای مدل های رینولدز پائین، نظیر مدل  $K - \omega$ ، بهترین راه برای چک کردن اینکه " آیا المانهای نزدیک

دیواره به حد کافی ریز هستند یا نه؟ " آن است که مقدار ویسکوزیتۀ مولکولی  $\mu$  را با مقدار ویسکوزیتۀ

آشفتۀ  $\mu$  بر روی نودهای مجاور دیواره مقایسه نمائیم. به صورت تئوریک نبایستی مقدار ویسکوزیتۀ آشفتۀ

$\mu$  فراتر از مقدار ویسکوزیتۀ مولکولی  $\mu$  برود. چنانچه این اتفاق بیافتاد، بایستی از المانهای ریزتر در

نزدیکی دیواره استفاده نمود.

### یک سوال مهم:

سوال مهم اینجاست که " اگر توابع دیواره ای نظیر تابع ریچارد، برای مقادیر بزرگ  $y^+$  نیز صادق است، چرا

غلب در مدل سازی ها، از توابع دیواره فقط برای محدوده  $30 < y^+ < 30$  استفاده می شود؟

### جواب:

اگرچه می توان از توابع دیواره برای طیف وسیعی از مقادیر  $y^+$  استفاده نمود، لیکن به واسطه فرضیات ساده

کننده استفاده شده در توابع دیواره، برای جلوگیری از خطای مدل سازی، بهتر آن است که استفاده از این توابع

را تنها به نواحی نزدیک دیواره محدود نمائیم و از گسترش خطای مدل سازی این توابع به نواحی مرکزی و

هسته اصلی آشفتگی جریان جلوگیری به عمل آید.

## لزوم استفاده از توابع دیواره برای جریانات رینولدز بالا:

در جریاناتی که غالب میدان جریان دارای عدد رینولدز بالا می باشد، استفاده از توابع دیواره صرفه جوئی قابل توجهی را در منابع محاسباتی ( زمان، حجم محاسبات، حافظه و ...) باعث می گردد. چرا که برای نواحی نزدیک دیواره ( که متغیرهای فیزیکی با تغییرات شدیدی مواجه هستند ) نیازی به Resolve نمودن متغیرهای فیزیکی و حل CFD ندارند. روش استفاده از توابع دیواره، انتخابی معمول و رایج در عمدۀ مدلسازی های صنعتی می باشد. اما این روش در مواردی که غالب میدان جریان دارای عدد رینولدز موضعی یا کلی پائین می باشند، مناسب نمی باشد. اولاً چنانچه به معادله<sup>(۶-۴)</sup> به عنوان پایه توابع توجه شود، در معادله ممنتوم به کار رفته، معادله ای است که برای جریانات دارای عدد رینولدز بالا صادق است، در حالیکه در اعداد رینولدز پائین معادله معتبر باقی می باشد. این معادله معتبر بایستی حداقل به فرم کامل خود نوشته شود:

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} + (\nu + \nu_t) \left[ \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right] \quad (۲۶-۶)$$

در اینصورت شکل معادلاتی توابع دیواره دیگر به صورت توابع معرفی شده نخواهد بود و بایستی حتماً اصلاحاتی بر روی آن صورت گیرد. تجربه نشان داده است که به دست آوردن توابع دیواره به صورت تحلیلی و با استفاده از شکل کامل معادله ممنتوم بسیار پیچیده و تقریباً غیر ممکن می باشد. در این موقع مناسبتر آن است که از مدلهای آشفتگی معتبر در نواحی نزدیک دیواره استفاده شود. در ثانی چنانچه از المانهای خاص، به عنوان پلی میان دیوار و ناحیه آشفته استفاده گردد، استفاده از این روش اگرچه برای جریانات با عدد رینولدز بالا بسیار موثر و دقیق است، ( چرا که در این نوع جریانات نواحی زیرلایه لزج و گذراء بسیار باریک میباشد )، لیکن این روش برای مسائل با عدد رینولدز پائین خیلی موثر نمی باشد. چرا که در اعداد رینولدز پائین، ضخامت زیرلایه لزج و ناحیه گذراء بیشتر بوده و این امر باعث می شود که المانهای خاص به کار رفته در گسسته سازی ناحیه مجاور دیوار خیلی ضخیم گردند تا بتوان مطمئن بود که حداقل ناحیه زیرلایه لزج در داخل این المانهای خاص محبوس شده اند. این مساله وقتی مشکل ساز می شود که هندسه مساله، دارای پیچیدگیها و ظرافتهاي خاص ( و حتی زبری ) باشد که باقی تمامًا مدل گردند. واضح است که وقتی از المانهای درشت استفاده می گردد، دیگر نمی توان با استفاده از المانهای درشت، ظرافتهاي هندسي را به خوبی Capture نمود. مثال رایج این نوع جریانات، خنک کاری قطعات الکترونیکی است که در آنها، ارتفاع قطعات الکترونیکی در مرتبه و اندازه ارتفاع زیرلایه لزج است. در این موارد می توان از مدلهای همچون

$K - \omega$  استفاده نمود، در این مدلها می توان با استفاده از المانهای ریز در نزدیک دیواره، علاوه بر مدلسازی همزمان متغیرهای میدان جریان متوسط و متغیرهای آشفتگی در نزدیکی دیواره، اشکال پیچیده و ظرفی هندسی را نیز در داخل مدلسازی داخل نمود. در این موارد بهتر است اولین المان درست در  $y^+ = 1$  قرار گیرد. مدل  $\omega - Wilcox K - \omega$  اصولاً به منظور شبیه سازی جریانات داخلی رینولدز پائین، که در آنها  $Re < 10000$  می باشد، ارائه شده است و اصولاً برای پیش بینی جریانات خارجی مناسب نمی باشد. چرا که پیش بینی های این مدل به شدت حساس و وابسته به مقدار  $\omega$  در جریان آزاد می باشد. البته از مدل  $Wilcox K - \omega$  می توان برای پیش بینی جریانات داخلی با عدد رینولدز بالا نیز استفاده نمود، لیکن این عمل نیازمند استفاده از تعداد بسیار زیادی المان و استفاده از المانهای خاص زیاد در نزدیکی دیواره میباشد که این امر می تواند تعداد المانها و نیز حجم محاسبات را در مقایسه با مدل  $\epsilon - K$  افزایش قابل توجهی دهد.

## اسکالارهای غیر فعال<sup>۲۷۳</sup> در جریانات آشفته:

یک اسکالار غیر فعال به کمیتی گفته می شود که توسط جریان آشفته حمل می گردد، از نوسانات موجود در جریان آشفته تاثیر می پذیرد، لیکن میدان سرعت را به صورت تغییر نیافته ترک میکند. این کمیت می تواند غلظت یک Tracer (در غلظتهاهی پائین) و یا آنکه دما باشد.

رشد و تکامل یک اسکالار غیر فعال متأثر از Advection یک جریان آشفته و دیفیوژن مولکولی می باشد. در اینجا دیفیوژن مولکولی را با  $\alpha$  نمایش می دهیم. ما می توانیم مقدار اسکالار غیر فعال  $\theta$  را به دو قسمت "مقدار متوسط  $\Theta$ " و "مقدار نوسانی  $\theta'$ " تقسیم نمائیم.

معادله اسکالار متوسط گیری شده رینولدز را می توان به صورت ذیل نوشت:

$$\frac{D\Theta}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \alpha \frac{\partial \Theta}{\partial x_j} - \overline{u'_j \theta'} \right) \quad (27-6)$$

همانطور که در معادله ممنتوں جریانات آشفته، تنش رینولدز باعث افزایش انتقال ممنتوں شد، در اینجا نیز

شار اسکالار  $\overline{u'_j \theta'}$  نیز باعث افزایش انتقال کمیت اسکالار  $\theta$  می شود.

معادله انتقال برای بردار شار اسکالار را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{D\overline{u'_j \theta'}}{Dt} = P_{\theta i} + \Pi_{\theta i} - \varepsilon_{\theta i} + D_{\theta i} \quad (27-6)$$

که در آن  $P_{\theta i}$  بیانگر همبستگی گرادیانی بین کمیت اسکالار و فشار می باشد. در اینجا نیز  $\Pi_{\theta i}$  بیانگر توزیع مجدد کمیت اسکالار  $\theta$  در بین مولفه ها (با حفظ مقدار کمیت اسکالار  $\theta$ ) می باشد.  $\varepsilon_{\theta i}$  بیانگر بردار نرخ تخریب و اضمحلال کمیت اسکالار،  $D_{\theta i}$  بیانگر دیفیوژن کمیت اسکالار و ترم تولید  $P_{\theta i}$  نیز به صورت ذیل تعریف می شود:

$$P_{\theta i} = -\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \Theta}{\partial x_j} - \overline{u'_j \theta'} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (28-6)$$

ترم تولید در اینجا بیانگر برهم کنش مستقیم بین آشفتگی و جریان متوسط می باشد. در مدلسازی شار اسکalar گاهی می توان از معادلات انتقال برای واریانس اسکالار و نرخ اضمحلال آن استفاده نمود. برای توضیح بیشتر به تحقیقی که توسط Johansson و Wikstrom در سال ۲۰۰۰ در این زمینه انجام شده است، رجوع شود.

<sup>۲۷۳</sup> Passive Scalar

## نگاهی مجدد به مدل‌های آشفتگی دو معادله‌ای:

روش به کار گرفته شده در مدل طول اختلاطی (پیشنهاد شده توسط پرانتل)، روشی وابسته به هندسه بوده و در جریانات پیچیده جواب نمی‌دهد، لذا مطلوب‌تر آن است که ویسکوزیتۀ آشفته<sup>t</sup>  $\nu_t$  را بر مبنای مقیاس‌های حرکت آشفته قرار دهنده طوریکه مستقل از قیود هندسی باشند. از نقطه نظر ابعادی می‌توان نشان داد که:

$$[\nu_t] = [Velocity] \times [Length] \quad \text{or} \quad [\nu_t] = [Velocity]^2 \times [Time]$$

کاندیدای واضح برای سرعت مقیاس، ترم  $\sqrt{k}$  می‌باشد که در آن  $k = \frac{1}{2}(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})$  می‌باشد.

کمیت  $\frac{k}{\varepsilon}$  معیاری از زمان بازگشت سرمایه ادی یا معیاری از این امر است که آشفتگی با چه سرعتی توسط

ویسکوزیتۀ Dissipate می‌گردد. به این کمیت اصطلاحاً زمان مقیاس آشفتگی<sup>۲۷۴</sup> گفته می‌شود. از آنجا

که  $\left[\frac{k}{\varepsilon}\right] = [Time]$  و  $[k] = [Velocity]^2$  می‌باشد، لذا هر شکلی از ویسکوزیتۀ آشفته که با استفاده از  $\varepsilon$

ساخته می‌شود، می‌بایست دارای شکل ذیل باشند:

$$\nu_t = Cons. \times \frac{k^2}{\varepsilon} = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (29-6)$$

ثابت مزبور با استفاده از خواص لایه مرزی تعادلی به دست خواهد آمد. مقادیر  $\varepsilon$  نیز با استفاده از حل معادلات انتقالی تعیین می‌شوند.

## تعیین مقدار ثابت: $C_\mu$

در ناحیه لگاریتمی (یا ناحیه Overlap) مربوط به یک جریان آشفته:

الف) با استفاده از رابطه لگاریتمی نشان داده شد که:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u^*}{ky} \quad (30-6)$$

ب) با فرض ثابت بودن تنش در این ناحیه (که فرض چندان موافقی با فیزیک نمی‌باشد):

$$\frac{\tau_w}{\rho} = -\overline{u'v'} = u^{*2} \quad (31-6)$$

<sup>۲۷۴</sup> Turbulent Time Scale

ج) با فرض تعادل موضعی<sup>۲۷۵</sup>، می توان گفت که:

$$P^{(k)} = \varepsilon \quad (32-6)$$

که در آن نرخ تولید انرژی جنبشی آشفتگی (در واحد جرم) برای یک لایه مرزی (و یا هر جریان برشی ساده دیگر) از رابطه ذیل به دست می آید:

$$P^{(k)} = -\overline{u'v'} \frac{\partial u}{\partial y} \quad (33-6)$$

اگر چه به طور کلی  $P_{ij} = -\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \overline{u'_j u'_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}$  می باشد، لیکن در بین گرادیانهای برشی موجود در یک

جریان برشی ساده، تنها  $\frac{\partial u}{\partial y}$  دارای مرتبه قابل توجه و در بین گرادیانهای قائم موجود نیز تنها  $\overline{u'v'}$  دارای

مرتبه قابل توجه میباشد.

با توجه به اینکه  $\rho \overline{u'v'} = \mu_t \frac{\partial u}{\partial y}$  می باشد، با توجه به فرض (الف) بالا، می توان نشان داد که:

$$\nu_t = k u^* y \quad (I)$$

از طرفی:

$$P^{(k)} = -\overline{u'v'} \frac{\partial u}{\partial y} = u^{*2} \frac{u^*}{ky} = \frac{u^{*3}}{ky} \quad (II)$$

با استفاده از فرض (ج) در بالا و نیز پس از تشکیل  $(I) \times (II)$  می توان اینطور استنتاج نمود که:

$$\varepsilon \times \nu_t = \frac{u^{*4} ky}{ky} = u^{*4} \Rightarrow \nu_t = \frac{u^{*4}}{\varepsilon} = \frac{(-\overline{u'v'})^2}{\varepsilon} \quad (III)$$

در داخل لایه لگاریتمی فرض می شود که پارامتر ساختاری  $\frac{\overline{u'v'}}{k}$  ثابت می باشد که این فرض با فرض

تنش ثابت همخوانی دارد:

$$-\frac{\overline{u'v'}}{k} = Cons. \quad (34-6)$$

با توجه به اینکه  $C_\mu = \frac{k^2}{\varepsilon} = v_t$  می باشد، و با نیز با توجه به رابطه (III) به دست آمده در بالا، می توان

اینطور استنتاج نمود که:

$$C_\mu = \left( \frac{\overline{u'v'}}{k} \right)^2 \Rightarrow -\frac{\left( \overline{u'v'} \right)}{k} = \sqrt{C_\mu} \quad (35-6)$$

حال می توان با استفاده از نتایج تجربی در ناحیه لگاریتمی، مشاهده نمود که  $\frac{\left( \overline{u'v'} \right)}{k} = 0.3$  می باشد. به

عبارت دیگر، مقدار به دست آمده  $C_\mu = 0.09$  می باشد. از این مقدار ( که به صورت نیمه تحلیلی، نیمه تجربی به دست آمده است ) در مدل استاندارد  $\varepsilon - k$  استفاده می شود. با توجه به فرآیند طی شده برای تعیین مقدار  $C_\mu$  میتوان به علت عدم اعتبار مدل استاندارد  $\varepsilon - k$  در جریانات سه بعدی، جریانات دارای مکش یا دمش از طریق دیواره و جریانات دارای عدد رینولدز پائین پی برد.

### با توجه به توصیفات فوق، ضعف مدل استاندارد $\varepsilon - k$ از کجا ناشی می شود؟

چندین عامل متنوع دست به دست یکدیگر داده و کارائی مدلی همچون مدل استاندارد  $\varepsilon - k$  را به مسائل ساده محدود نموده اند:

۱) در فرآیند طی شده برای تعیین مقدار ضریب  $C_\mu$  که در بالا به تفصیل بیان شد، از آنجا که مبنای محاسبات بر مبنای قانون لگاریتمی قرار داشته است، لذا در خارج از ناحیه قانون لگاریتمی بایستی

مجدداً این فرآیند از ابتدا طی شده و مقدار جدید ضریب  $C_\mu$  تعیین گردد.

۲) قانون لگاریتمی به کار رفته در تعیین مقدار  $C_\mu = 0.09$ ، از پروفیل سرعت تعادلی ( توابع دیواره )

برای صفحه تخت استفاده شده است. بنابراین اندازه به دست آمده ( یعنی  $C_\mu = 0.09$  )، تنها برای

این شرایط معتبر است و برای شرایط دور از نقطه تعادل، مثلاً در نزدیکی نقاط جدایش جریان و یا

نقاط اتصال مجدد جریان، و یا در نقاطی که انحراف زیادی از جریان بر روی صفحات تخت وجود

دارد، مثلاً در تیزی پله های موجود در جریان، دیگر مقدار به دست آمده برای  $C_\mu$  معتبر نبوده و

بایستی از پروفیلهای سرعت غیر تعادلی ( توابع دیواره اصلاح شده برای چنین جریاناتی ) استفاده

نمود.

۳) از آنجا که قانون لگاریتمی برای محدوده جریان تمام آشفته ارائه شده است، لذا مبنای استفاده شده در به دست آوردن ضرائب نظیر معادله استاندارد  $\varepsilon - k$ ، مبنای جریان آشفته است و لذا مدل استاندارد  $\varepsilon - k$  در نزدیک دیواره، که جریان آرام می باشد، با ضرائب فعلی خود با مشکلات جدی روبرو است، مگر آنکه از فرمهای اصلاح شده مدل  $\varepsilon - k$ ، که اثرات آرام بودن جریان در نزدیک دیواره در آن مدل نظر قرار گرفته است، استفاده شود.

۴) راه حلی که می توان برای رفع چنین مشکلی پیشنهاد نمود، استفاده از یک معادله جدید برای تعیین  $C_\mu$  علاوه بر دیگر معادلات می باشد، به طوریکه مقدار  $C_\mu$  در هر نقطه در داخل میدان بر حسب متغیرهای محلی جریان تعیین گردد. یعنی علاوه بر دو معادله انتقالی برای  $\varepsilon, k$ ، می توان از یک معادله انتقالی کمکی برای تعیین توزیع  $C_\mu$  درون میدان جریان استفاده نمود، یعنی یک مدل سه معادله ای جدید!

## تفسیر جریانات ساده برشی از نقطه نظر ترمهای تنش آشفته:

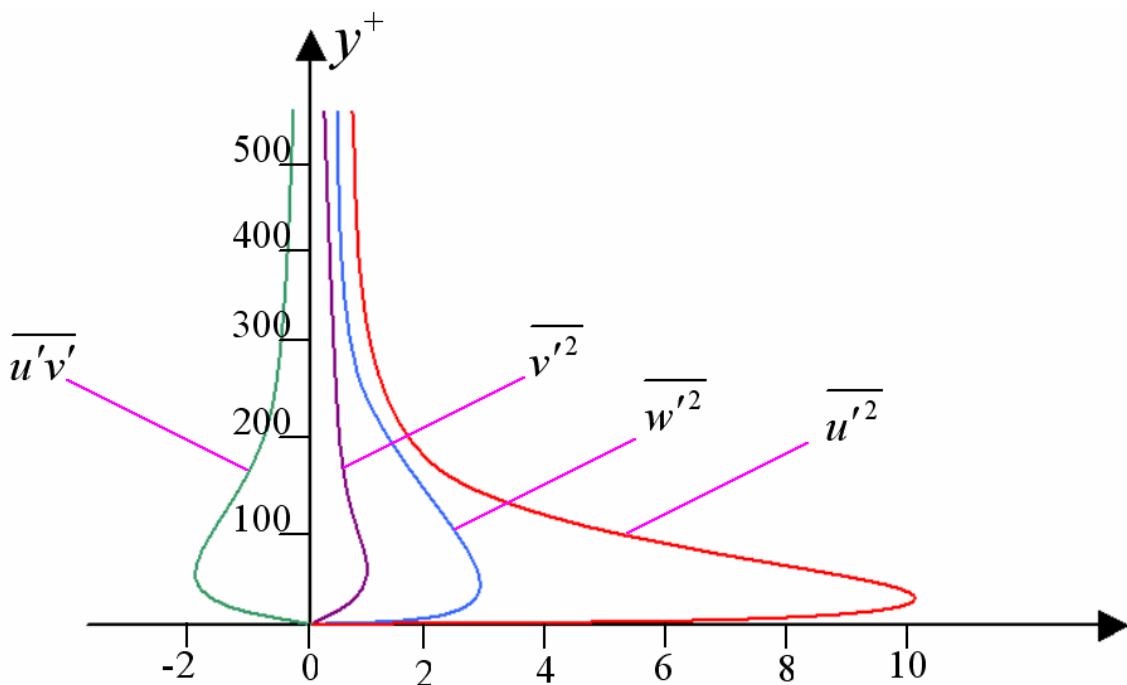
در جریانات ساده برشی، کمیت  $\frac{\partial u}{\partial y}$  تنها گرادیان سرعت مخالف صفر است. در اینصورت ترم تولید تنشهای

نرمال (یعنی  $\overline{u'^2}, \overline{v'^2}, \overline{w'^2}$ )، به صورت زیر در خواهد آمد:

$$P_{11} = -2\overline{u'v'} \frac{\partial u}{\partial y}, P_{22} = P_{33} = 0 \quad (36-6)$$

از آنجا که در این جریانات،  $\overline{u'} - \overline{v'}$  معمولاً مثبت می باشد، لذا به واسطه مثبت شدن  $P_{11}$  ( که متعلق به تنش  $\overline{u'^2}$  می باشد )، مولفه تنش  $\overline{u'^2}$  دائماً در حال کسب انرژی می باشد. در عوض مولفه تنش  $\overline{v'^2}$  مولفه عمود بر دیواره محاسبه می گردد، به واسطه حضور دیواره جامد میرا می گردد.

از آنجا که ترم تولید وظیفه تولید انرژی آشفتگی را بر عهده دارد، لذا مثبت شدن ترم  $P_{11}$  و یا صفر شدن ترمهای  $P_{22}, P_{33}$  می تواند کمک خوبی به تفسیر نتایج آزمایشگاهی بنماید. حال می توان علت تنشهای Anisotropy (بالاخص در نزدیکی دیواره که  $\overline{u'^2} > \overline{w'^2} > \overline{v'^2}$  می باشد)، را برای یک جریان لایه مرزی توضیح داد:



برای یک جریان برشی ساده تشکیل شده بر روی یک صفحه تخت، با استفاده از نتایج نشان داده شده در شکل فوق می توان اینپطور استنتاج نمود که:

(۱) به واسطه مثبت بودن  $P_{11}$  و صفر بودن مقادیر  $P_{22}, P_{33}$ ، اندازه  $\overline{u'^2}$  بزرگترین مقدار در بین تنشهای

رینولدز نرمال می باشد.

(۲) به واسطه آنکه  $P_{22} = 0$  می باشد و نیز به واسطه اثرات میرائی دیواره، اندازه  $\overline{v'^2}$  مینیمم مقدار را

در بین تنشهای رینولدز نرمال را دارا می باشد. اثرات میرائی دیواره در اصل ممانعت دیواره از حرکت

نوسانی در راستای عمود بر دیواره و به سمت داخل دیواره میباشد.

(۳) اگر چه  $P_{33} = 0$  می باشد، لیکن از آنجا که میدان جریان برای نوسان در بعد سوم ( در راستای

عمود بر صفحه ) با مانعی مواجه نمی باشد، لذا مقدار  $\overline{w'^2}$  چیزی بین مقدار ماقزیم  $\overline{u'^2}$  و مقدار

مینیمم  $\overline{w'^2}$  میباشد.

(۴) با توجه به شکل نشان داده شده و تغییرات شدید  $\overline{u'^2}$  در نزدیکی دیواره، معادله مربوط به تنش

رینولدز  $\overline{u'^2}$  در نزدیکی دیواره بایستی به دقت حل گردد.

(۵) با استفاده از روشهای عددی و برای "نود مجاور دیواره"<sup>۲۷۶</sup> می توان نشان داد که:

$$\frac{\overline{u'^2}}{k} = 1.098, \frac{\overline{v'^2}}{k} = 0.248, \frac{\overline{w'^2}}{k} = 0.654, -\frac{\overline{u'v'}}{k} = 0.255,$$

همین امر اختلاف بین تنشهای رینولدز برای یک جریان ساده برشی تشکیل شده بر روی یک صفحه

تحت را نشان می دهد.

## استفاده از جوابهای وابسته به زمان حتی برای مسائل جریان دائمی:

تجربه نشان داده است که حتی برای مسائل جریانات دائمی (Steady State)، استفاده از روش وابسته به زمان (Transient) در مقایسه با معادلات Steady State RANS، جوابهای دقیقتر و نزدیکتر به فیزیک را باعث خواهند شد. بالاخص در بسیاری از مدلسازی های دائمی، امکان زیادی وجود دارد که گردابه ها و ورتیسیته های موجود در جریانات آشفته در یک مدلسازی دائمی از جریان اصلاً مشاهده نشوند، لیکن همین گردابه ها و ورتیسیته ها در یک مدلسازی Transient و وابسته به زمان از مساله، در جواب دائمی شده آن مشاهده گردد.

چنانچه از بابت بالا رفتن هزینه و زمان محاسباتی نگرانی وجود داشته باشد می توان با استفاده از روش های Fully Implicit و استفاده از گامهای زمانی بزرگ، به سرعت و در طی کمترین تعداد حل دستگاه معادلات، به جواب نهائی دائمی یا Steady دست یافت. اگرچه جواب به دست آمده، جواب دائمی و Steady مساله به صورت Steady حل شده باشد، بسیار دقیقتر و نزدیکتر به فیزیک خواهد بود.

به عنوان نمونه، در محاسبه طول هسته جدایش جریان، که فاصله بین نقطه شروع جدایش<sup>۲۷۷</sup> و نقطه اتصال مجدد<sup>۲۷۸</sup> میباشد و کمیتی مهم در محاسبات جریان و بالاخص توزیع جریان حول اجسام و پسای وارد بر آنها می باشد، روش LES بهترین جوابها و نزدیکترین آنها به نتایج تجربی را ارائه نمود. روش وابسته به زمان Steady RANS دارای دقتی ضعیفتر ولی قابل قبول بود، لیکن روش های دائمی Unsteady RANS بدترین جوابها را ارائه نموده اند.

<sup>۲۷۷</sup> Separation Point  
<sup>۲۷۸</sup> Reattachment Point

## **فصل هفتم**

# **چند نمونه از جریانات آشفته و**

## **مدل‌سازی آنها**

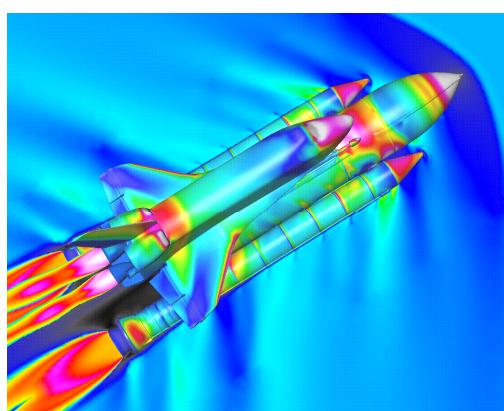
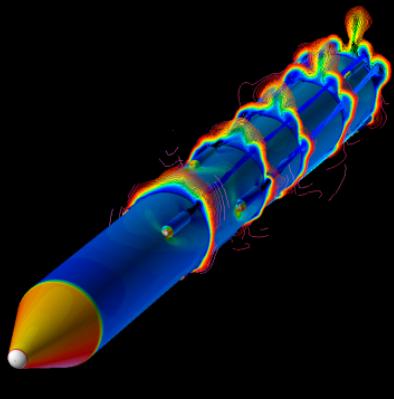
### چند نمونه از جریانات آشفته و مدلسازی آنها در کاربردهای هوافضا



ایجاد شده در پشت هواپیماها به واسطه Tip Vortex نوک بالها

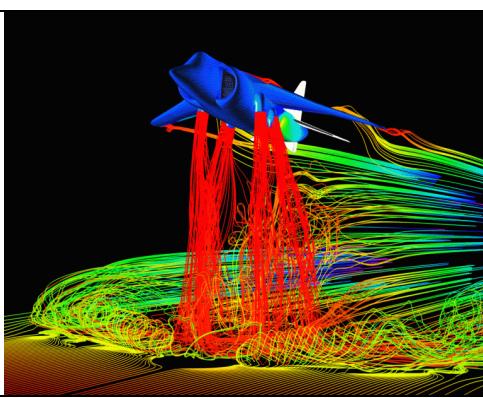


ایجاد شده در نوک بالها و نیز در پشت Tip Vortex

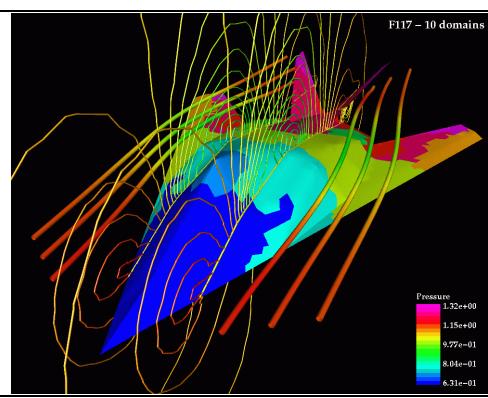


مدلسازی جریان آشفته حول بدنه یک موشک

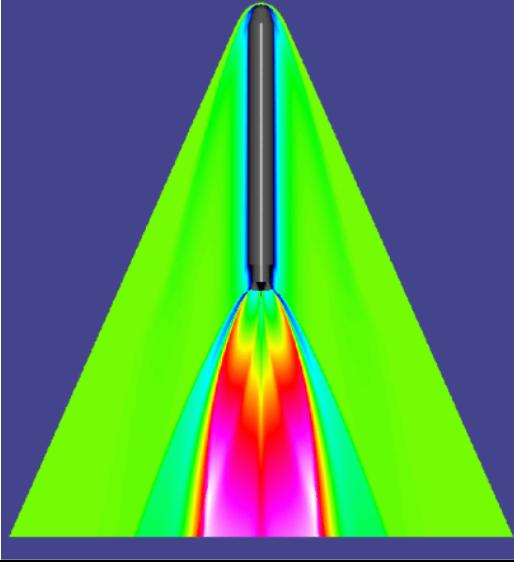
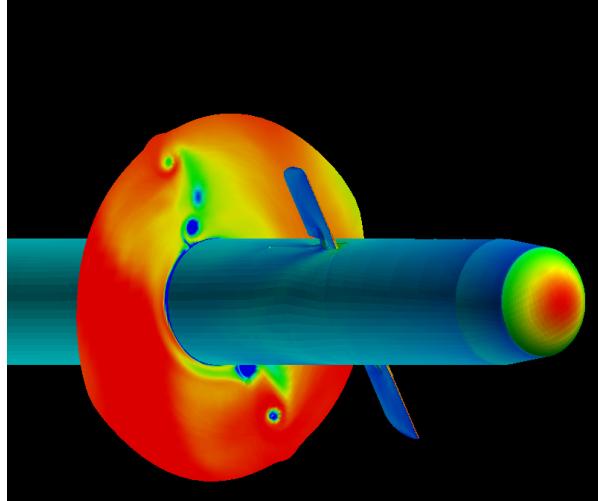
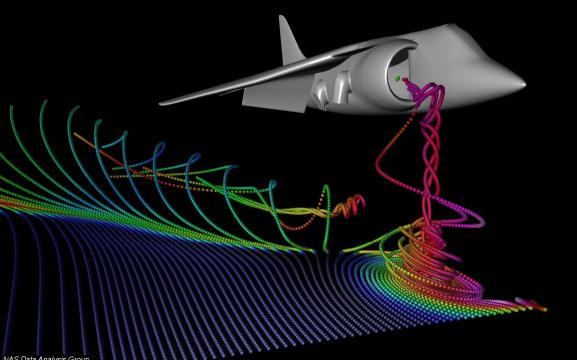
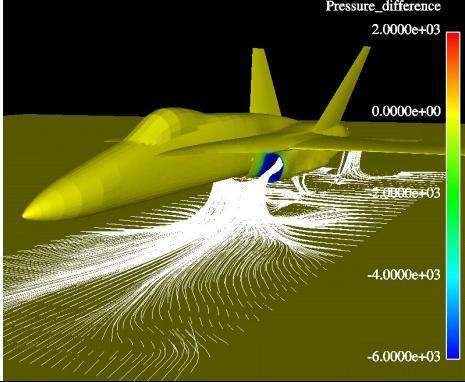
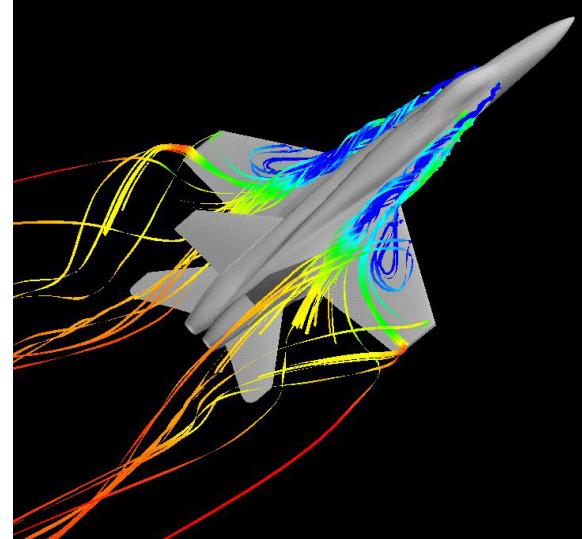
مدلسازی جریان آشفته حول یک فضاییمای شاتل



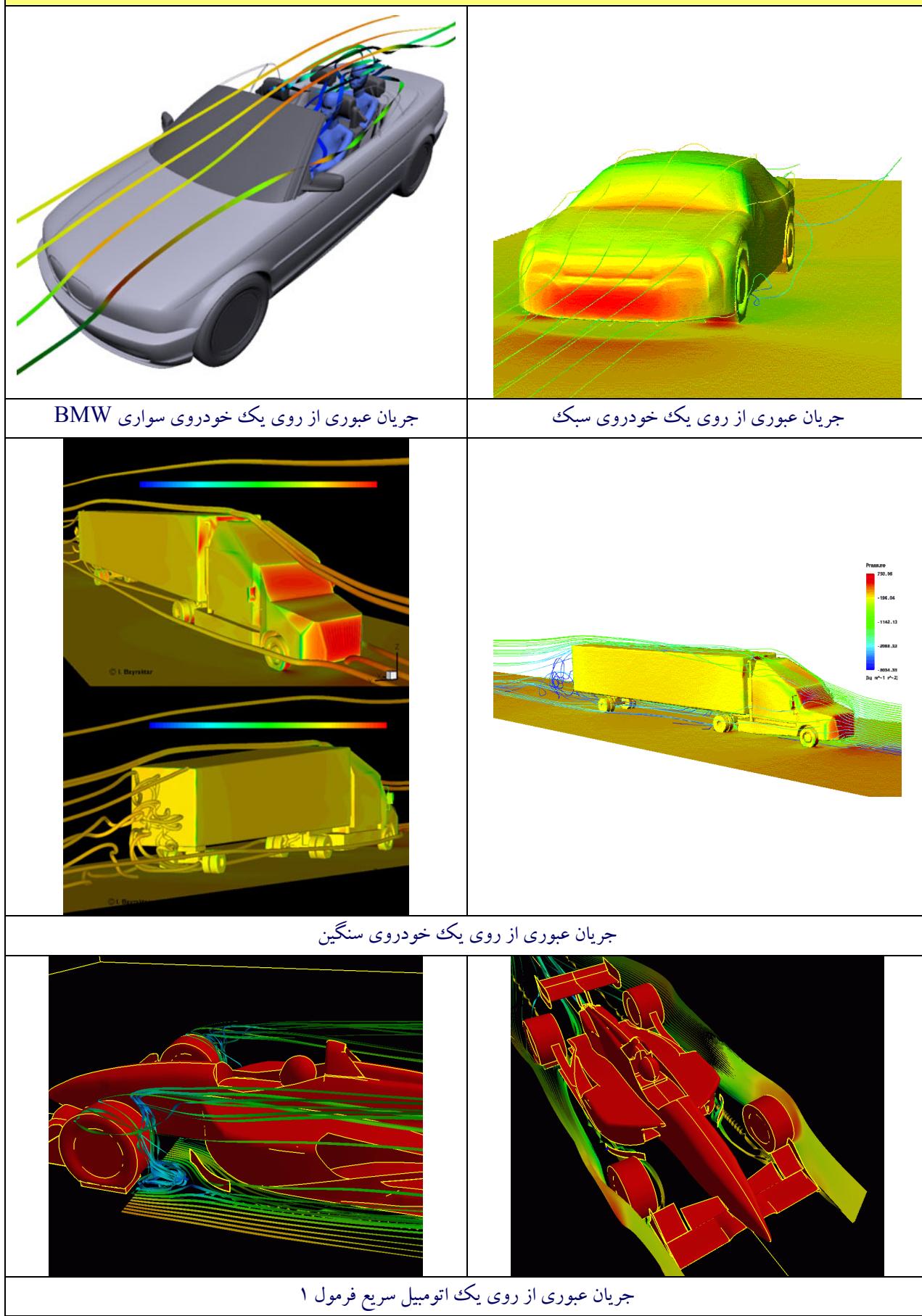
مدلسازی جریان حول هواپیمای عمود پرواز هاربر



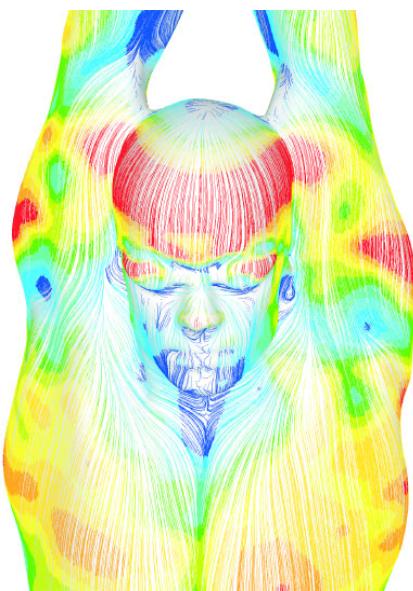
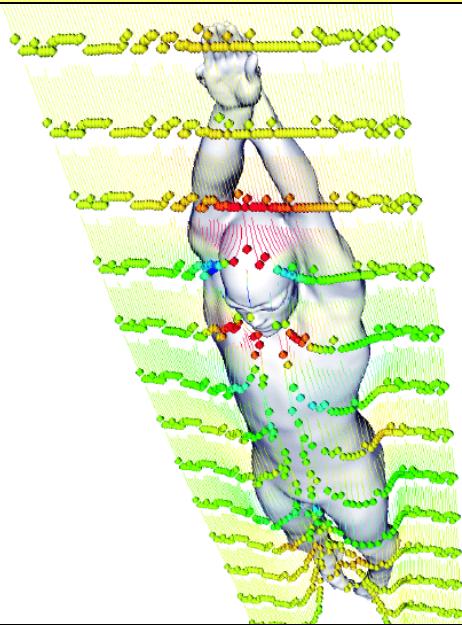
مدلسازی جریان حول بدنه هواپیمای F-117

	
<p>مدلسازی جریان مافوق صوت و نزدیک صوت حول یک موشک</p>	<p>مدلسازی جریان حول بدنه یک موشک و مشاهده Vortex تشکیل شده حول بدنه</p>
	
<p>مدلسازی جریان هوای ورودی به داخل Air-Intake یک هواپیمای عمود پرواز هاریر</p>	<p>مدلسازی جریان هوای ورودی به داخل Air-Intake هواپیمای F18-Hornet</p>
	
<p>مدلسازی جریان هوای حول یک شاتل فضائی</p>	<p>مدلسازی جریان هوای حول یک هواپیمای F18-Hornet</p>

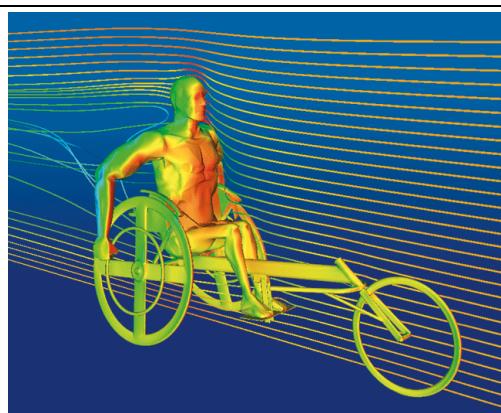
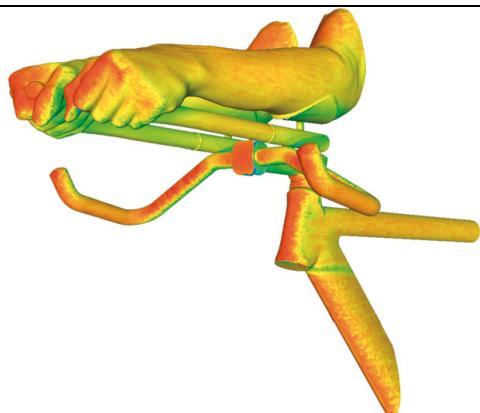
## چند نمونه از جریانات آشفته و مدلسازی آنها در صنایع خودروسازی



### چند نمونه از جریانات آشفته و مدلسازی آنها در کاربردهای بیومکانیک

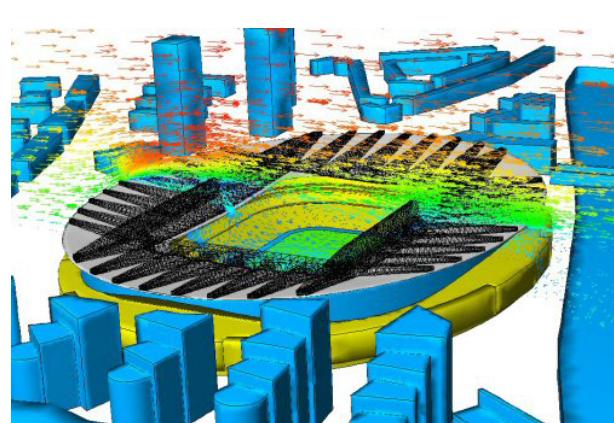
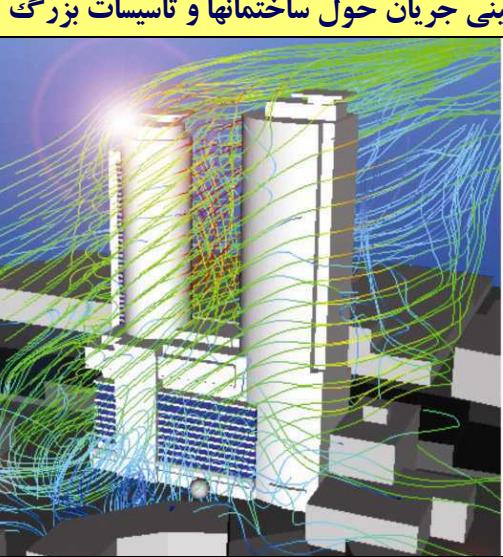


مدلسازی جریان عبوری از روی بدن یک شناگر



مدلسازی جریان حول بدن یک معلول جسمی برای بازیهای پارالمپیک

مدلسازی جریان حول دستهای یک دو چرخه سوار



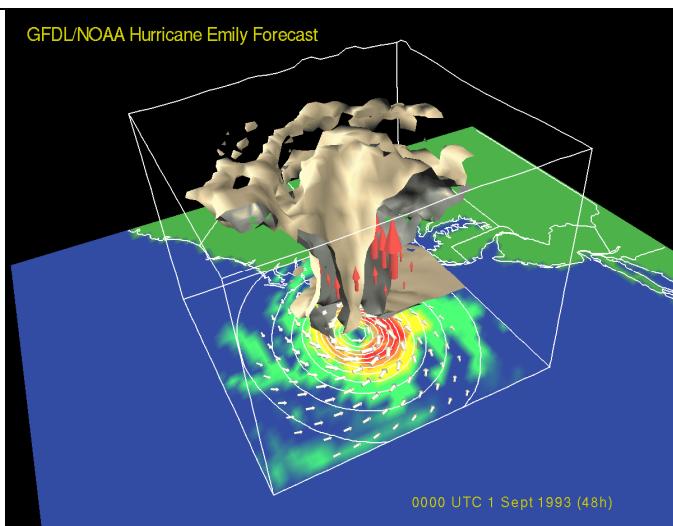
مدلسازی جریان حول ساختمان شرکت میتسوبیشی

مدلسازی جریان حول ورزشگاه اختصاصی باشگاه آرسنال

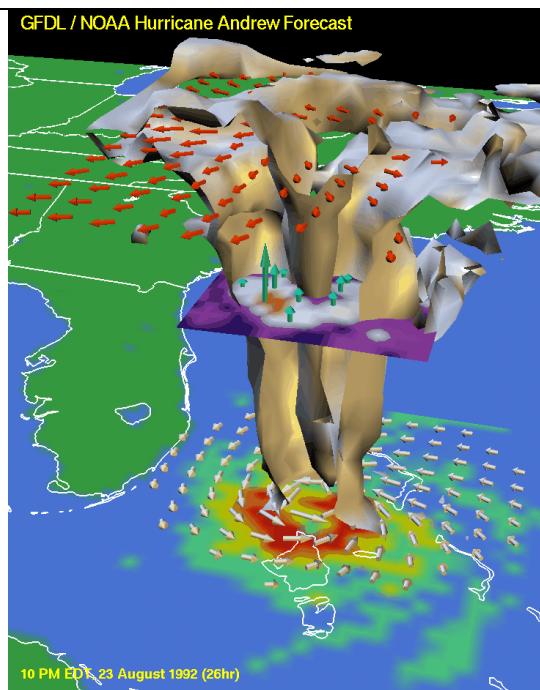
## چند نمونه از جریانات آشفته و مدلسازی آنها در پیش‌بینی آب و هوا



جریانات جوی به عنوان نمونه‌ای از جریانات آشفته در مقیاسهای بسیار بزرگ محسوب می‌شوند.

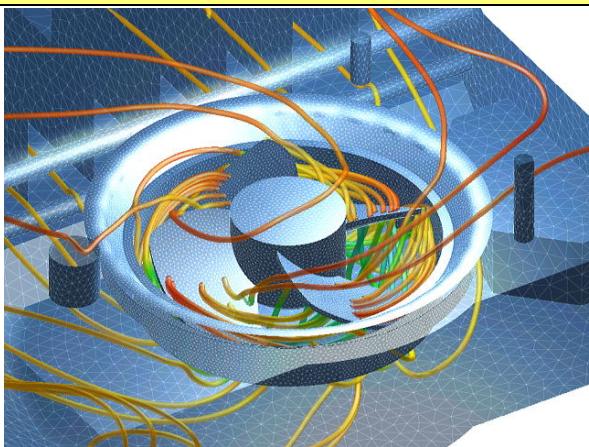


پیش‌بینی گردابه‌های جوی به عنوان نمونه‌ای از جریانات آشفته در مقیاسهای بسیار بزرگ

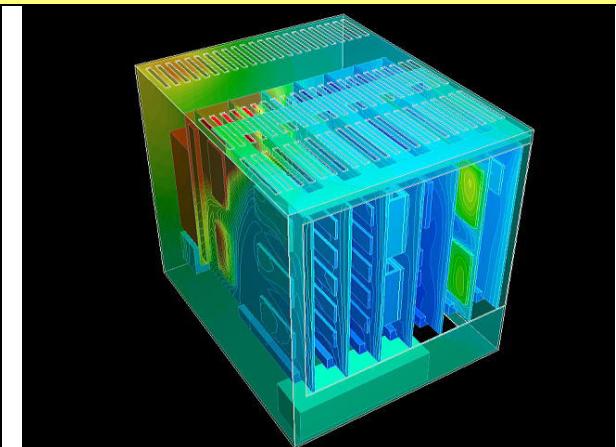


پیش‌بینی جریانات آشفته جوی

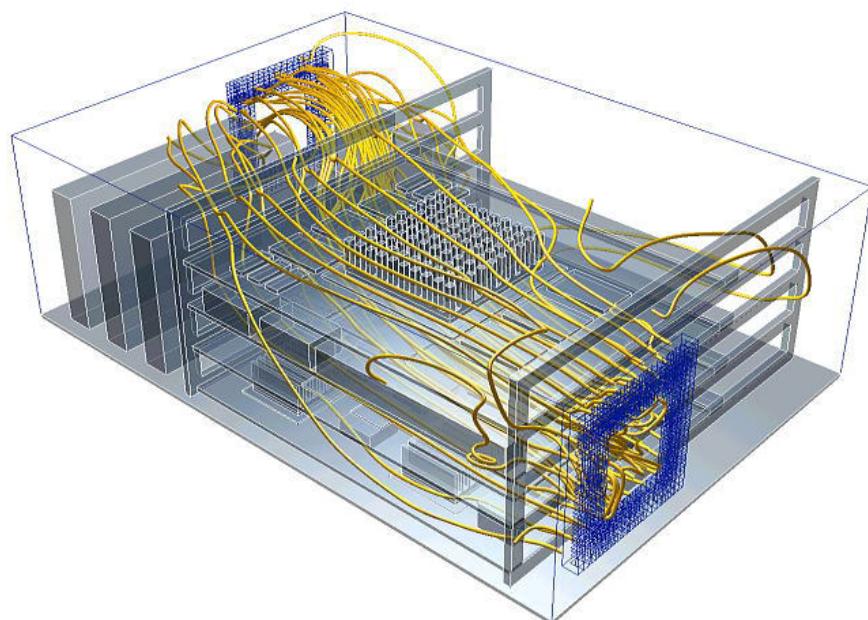
### چند نمونه از جریانات آشفته و مدلسازی آنها در کابرد های خنک کاری سیستمهای الکترونیکی



مدلسازی جریان حول فن CPU یک Motherboard

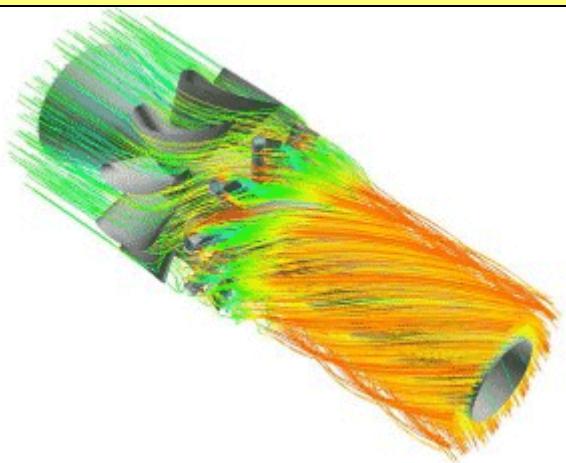


مدلسازی جریان جابجایی آزاد هوای اطراف مجموعه ای از مدارات الکترونیکی

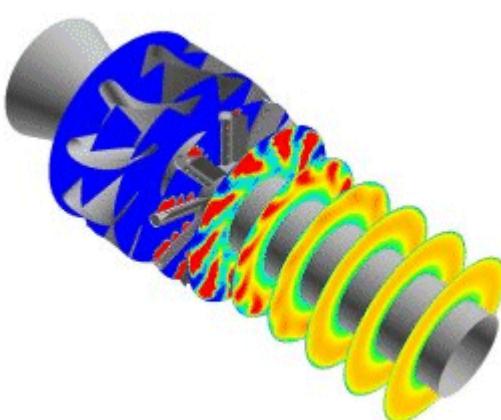


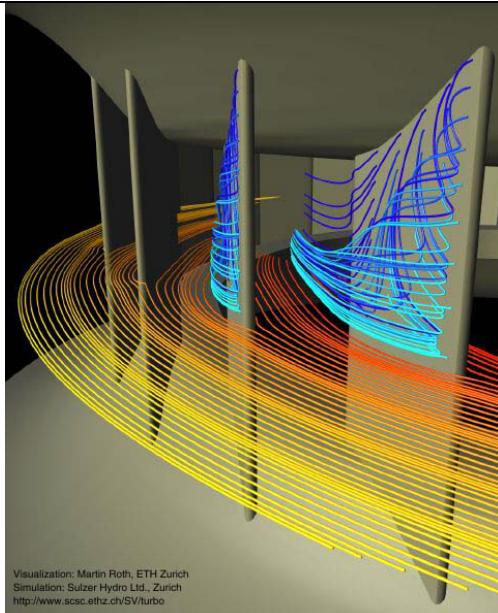
مدلسازی جریان در داخل یک سیستم الکترونیکی و سیستم خنک کاری مربوطه

### چند نمونه از جریانات آشفته و مدلسازی آنها در کابرد های توربوماشینها

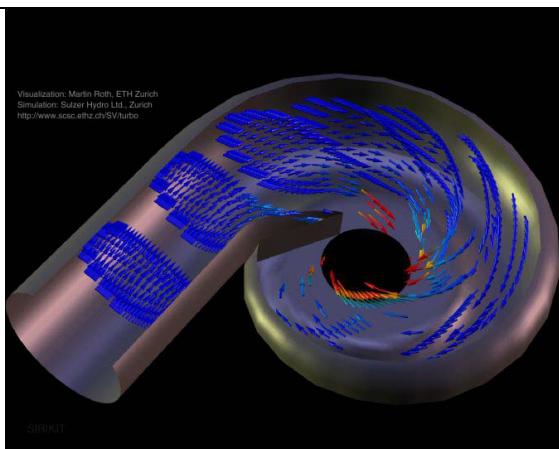


نمونه ای از جریان آشفته درون یک توربوماشین

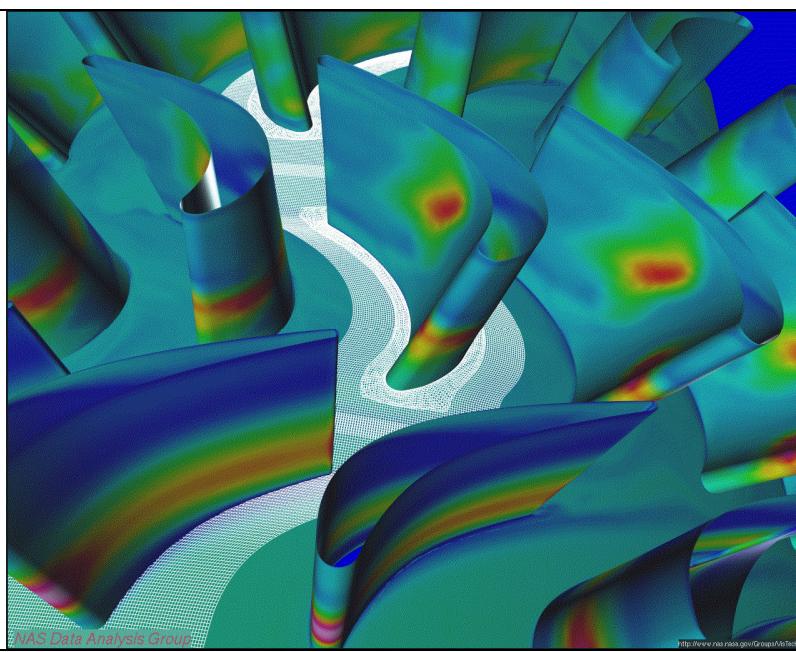




جريان آشفته در بین پرهای یک توربین آبی فرانسیس

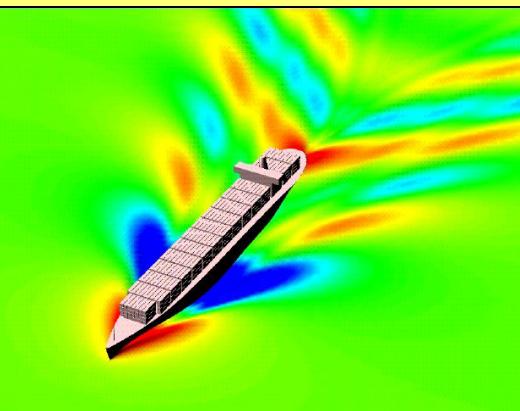


جريان آشفته درون یک محفظه حلقه‌زنی یک توربین آبی فرانسیس

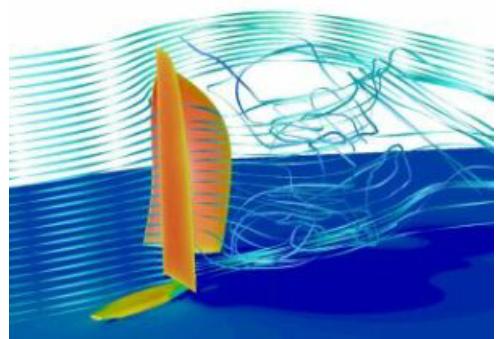


جريان آشفته در بین پرهای یک توربین گازی

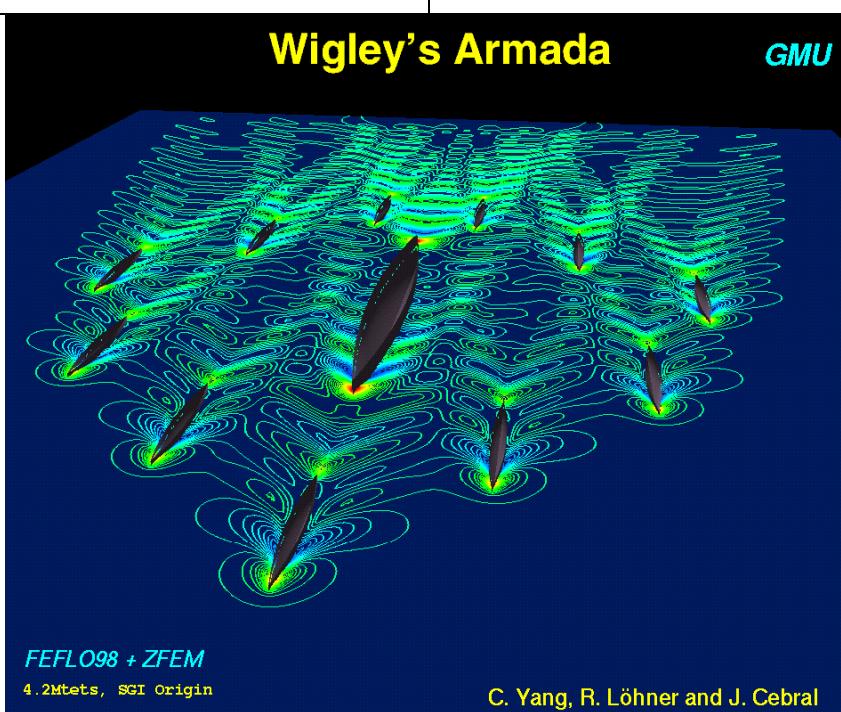
چند نمونه از جریانات آشفته و مدلسازی آنها در کابرد های صنایع دریائی



مدلسازی جریان حول یک کشتی کانتینربر



مدلسازی جریان حول یک قایق تفریحی اقیانوس پیما

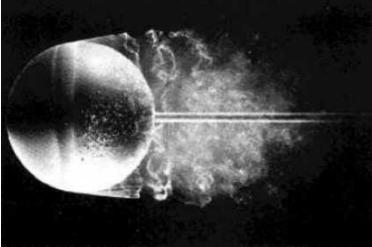
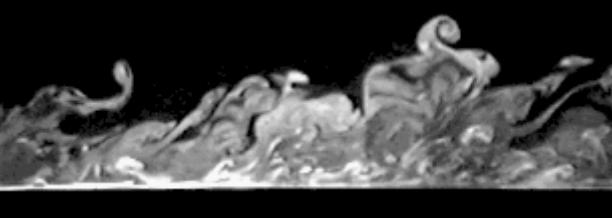
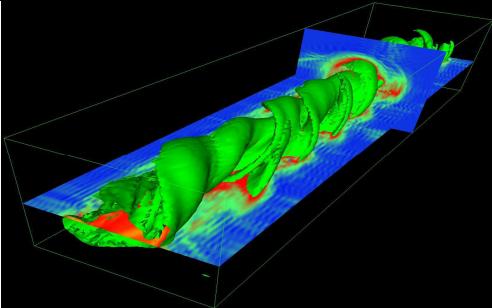
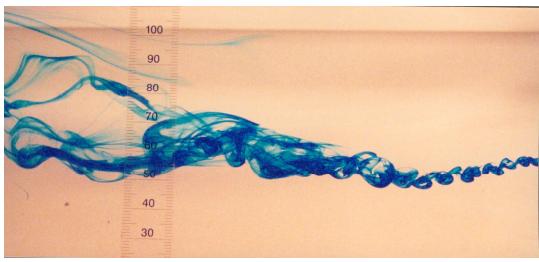
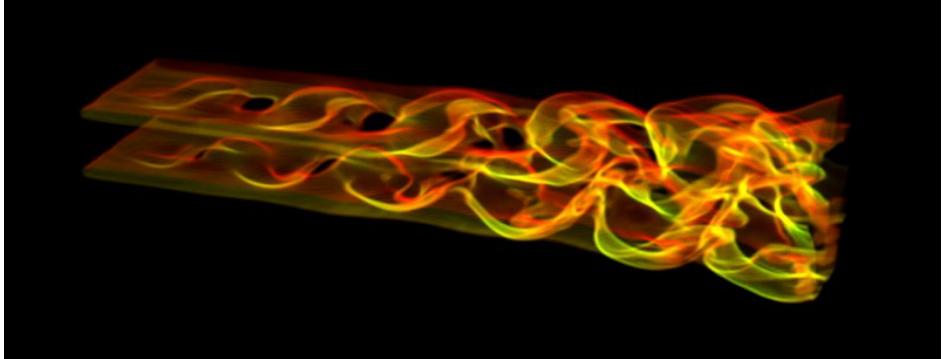


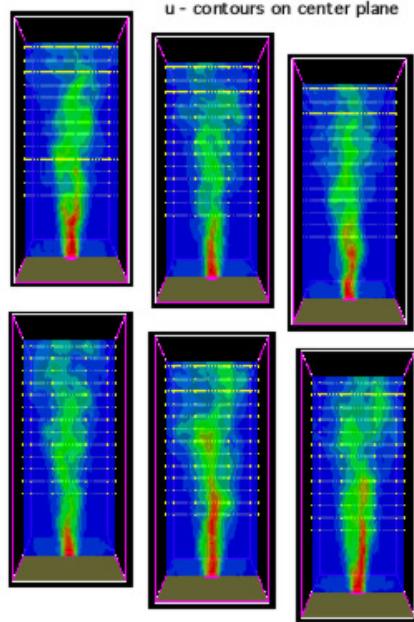
مدلسازی جریان حول یک ناو هواپیمابر و ناو شکن های اطراف آن



مدلسازی جریان آشفته حول یک ناو شکن

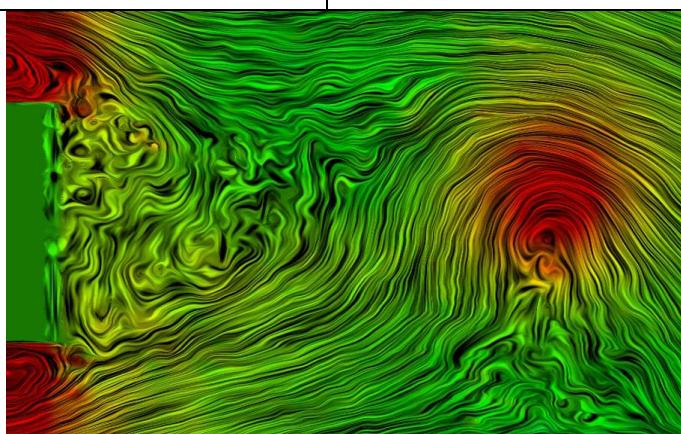
## نمونه های متنوع دیگری از جریانات آشفته

	
جریان آشفته حول یک توپ	یک جریان جت آشفته با عدد رینولدز بالا
	
جریان آشفته بر روی یک صفحه تخت	جریان آشفته حول یک توپ گلف
	
ورتکس‌های ایجاد شده در جریانات آشفته	مسیر رنگ در یک جریان آشفته
	
جریان جت احتراقی آشفته	

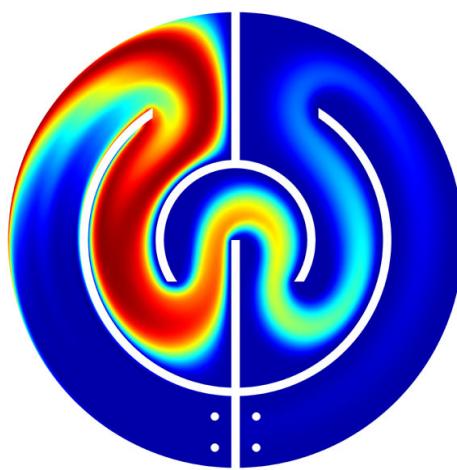


آشفته خروجی از دودکشها Plume

جريان آشفته در داخل یک محفظه بزرگ



جريان آشفته عبوری از یک مانع مستطیلی شکل تحلیل شده به روش DNS



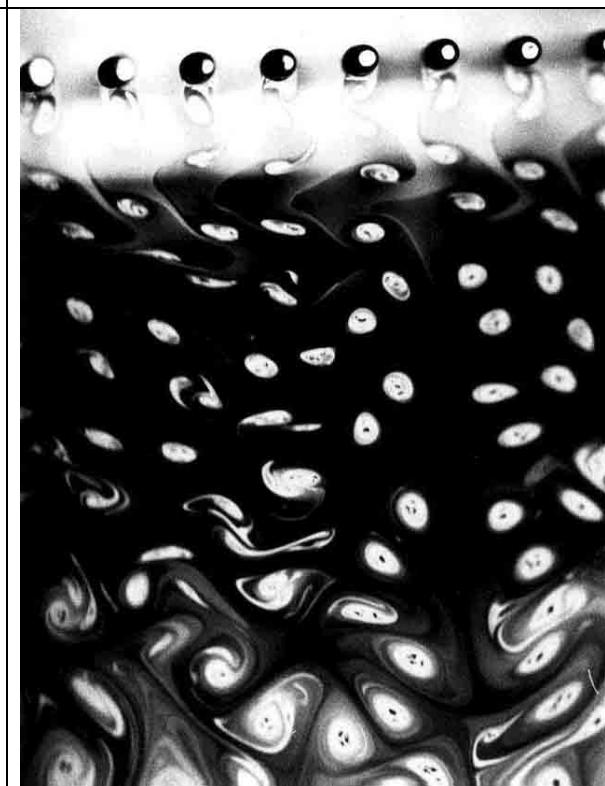
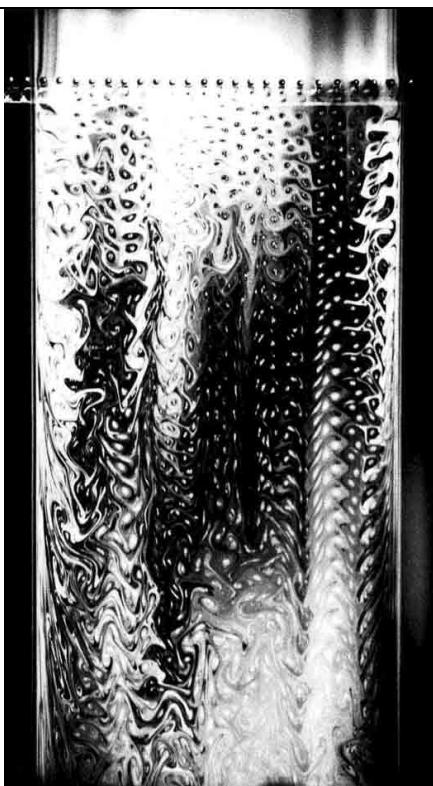
جريان آشفته در داخل یک راکتور

در اینجا، جریان عبوری از روی دسته ای از میله های شانه ای شکل نشان داده است که در آن عدد رینولذ به تدریج از مقادیر کوچک تا مقادیر بزرگ افزایش می یابد.



Vortex Street  
(قطر میله حداقل چند میلی متر است)

عدد رینولذ نزدیک مقدار بحرانی مربوط به تشکیل  
Von Karman Vortex Street



در اعداد رینولذ بالاتر، هر میله با یک Vortex Street دنبال می شود.

نمای نزدیک از جریان حول میله ها (دندانه های شانه ای)

	
<p>Vortex Street</p> <p>افزایش بیشتر عدد رینولدز باعث کاهش عمر میشود.</p>	<p>در اعداد رینولدز بالاتر، جریان آشفته ضعیفی همراه با طول مقیاسهای افزایش یافته خواهیم داشت.</p>
	
<p>نمای نزدیک از جریان در اعداد رینولدز افزایش یافته</p>	<p>جریان حول لبه یک چاقو</p>

## فهرست مراجع:

- [۱] Bradshaw P. Turbulent secondary flows. *Annu Rev Fluid Mech* ۱۹۸۷;۱۹:۵۳–۷۴.
- [۲] Bradshaw P. The understanding and prediction of turbulent flow—۱۹۹۶. *Int J Heat Fluid Flow* ۱۹۹۷
- [۳] Craft TJ, Launder BE, Suga K. Development and application of a cubic eddy-viscosity model of turbulence. *Int J Heat Fluid Flow* ۱۹۹۶;۱۷:۱۰۸–۱۰.
- [۴] Driver DM, Seegmiller HL. Features of a reattaching turbulent shear layer in divergent channel flow. *AIAA J* ۱۹۸۰;۲۳:۱۶۳–۷۱.
- [۵] Ferziger JH, Peric M. Computational Methods for Fluid Dynamics. Berlin: Springer; ۱۹۹۶ (Chapter ۲).
- [۶] Huang Y-N, Rajagopal KR. On necessary and sufficient conditions for turbulent secondary flows in a straight tube. *Math Models Meth Appl Sci* ۱۹۹۰;۵:۱۱۱–۲۲.
- [۷] Huang Y-N, Rajagopal KR. On a generalized non-linear K-e model for turbulence that models relaxation effects. *Theor Comput Fluid Dynam* ۱۹۹۶;۸:۲۷۵–۸۸.
- [۸] Huang Y-N, Kasagi N. Modelling the constitutive relations for the Reynolds stress. *J Japan Soc Fluid Mech* ۱۹۹۷;۱۶(Suppl):۱۹۹–۲۰۰.
- [۹] Huang Y-N. On modelling the Reynolds stress in the context of continuum mechanics. *Commun Nonlinear Sci Numer Simul*, in press. Available online ۱ April ۲۰۰۳.
- [۱۰] Launder BE, Spalding DB. The numerical computation of turbulent flows. *Comput Meth Appl Mech Eng* ۱۹۷۴;۳:۲۶۹–۸۹.
- [۱۱] Lumley JL. Toward a turbulent constitutive equation. *J Fluid Mech* ۱۹۷۰;۴۱:۴۱۳–۴۴.
- [۱۲] Matsumoto A, Nagano Y, Tagawa, M. Direct numerical simulation of homogeneous shear flow. In: Proceedings of the ۸th Symposium on Computational Fluid Dynamics of the Japan Society of Computational Fluid Dynamics, Tokyo, ۱۹۹۱. p. ۳۶۱–۴.
- [۱۳] Nagano Y, Kondoh M, Shimada M. Multiple time-scale turbulence model for wall and homogeneous shear flows based on direct numerical simulations. *Int J Heat Fluid Flow* ۱۹۹۷;۱۸:۳۴۶–۵۹.
- [۱۴] Rivlin RS. The relation between the flow of non-Newtonian fluids and turbulent Newtonian fluids. *Quart Appl Math* ۱۹۵۷;۱۵:۲۱۲–۴.
- [۱۵] Shih TH, Zhu J, Lumley JL. A new Reynolds stress algebraic equation model. *Comput Meth Appl Mech Eng* ۱۹۹۰;۱۲۰:۲۸۷–۳۰۲.
- [۱۶] Speziale CG. On non-linear K-e models of turbulence. *J Fluid Mech* ۱۹۸۷;۱۷۸:۴۰۹–۷۰.
- [۱۷] Yang XD, Ma HY. Linear and nonlinear eddy-viscosity turbulence models for a confined swirling co-axial jet. *Numer Heat Transfer: Part B: Fundam* ۲۰۰۳;۴۳(۳):۲۸۹–۲۰۰.

- [۱۸] Yoshizawa A, Nisizima S. A non-equilibrium representation of the turbulent viscosity based on a two-scale turbulence theory. *Phys Fluids A* ۱۹۹۳;۵:۲۲۰۲–۴.
- [۱۹] Yoshizawa A. Non-equilibrium effect of the turbulent-energy-production process on the inertial-range spectrum. *Phys Rev E* ۱۹۹۴;۴۹:۴۰۶۰–۷۱.

## فصل آخر:

یک چند به کودکی به استاد شدیم

پایان سخن شنو که ما را چه رسید

در جزوه شماره ۳، سعی شده است که به بررسی جزئیات بیشتری از جریانات آشفته و مدلسازی آنها، بالاخص شبکه بنده در جریانات آشفته، اثرات تراکم پذیری بر روی آشفتگی، آشفتگی در مسائل توام با تغییر فاز، آشفتگی در مسائل واکنشی و احتراق، اصلاحات موجود در توابع دیواره مسائل پیچیده و در نهایت مدل‌های

$v^2 - f$  و روش LES پرداخته شود.

خرداد ۱۳۸۳

مهندی صنیعی نژاد

دانشجوی دکترای مهندسی مکانیک دانشگاه صنعتی شریف

CFD\_GROUP@YAHOO.COM

برترین علم آن است که در اعمال و

رفتار عیان شود.

حضرت علی (ع)