Subject
Date

تحلیل سازه ها

بیشتر به بررسی تغییر شکل سازه ها پرداخته می شود.

پایداری سازه ها
خط تأثیر سازه ها
تغییر شکل سازه ها
سازه های نامعین (سازه هایی که تعداد مجهولاتشان از تعداد معادلات از جنس نیروی آن ها بیشتر است.)
روش های عددی

مرجع: تحلیل سازه ها — طاحونی - لیل آبادی
" — علی کاوه (انتشارات علم و صنعت)
" — رضایی پژند (" فردوسی مشهد)
" — بدیعی

میان ترم: 30% پایان ترم: 50% تمرینات: 20%

پایداری سازه ها:

سازه ی پایدار، سازه ای است که نیروهای وارده را با تغییر شکل محدود تحمل نماید. (منتقل نماید)

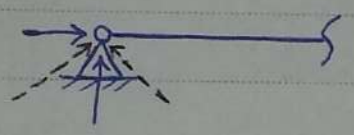
دو روش برای بررسی پایداری سازه وجود دارد، راه اول از طریق وارد کردن نیرو و بررسی تغییر شکل وارده می باشد که بسیار زمان بر می باشد و دارای تعداد حالات بسیار زیاد می باشد است. پس باید یک قانون برای بررسی پایداری تعریف کنیم.

Subject
Date

* ساده ترین نوع تکیه گاه، تکیه گاه مفصلی می باشد.

* در درس تحلیل سازه، به نیروهای وارده ی تکیه گاهی لینک گفته می شود. تکیه گاه مفصلی دو لینک از جنس نیرو دارد.

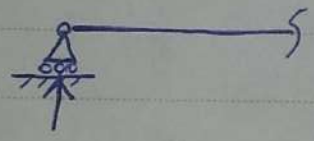
* در تکیه گاه مفصلی، سازه در جهت x و y جابه جا نمی شود ولی دوران می تواند داشته باشد.



تغییر مکان سازه در جهت x

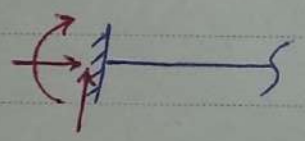
$\Delta x = 0$
$\Delta y = 0$ $\quad \theta \neq 0$

* در تکیه گاه غلتکی: نیروی تکیه گاهی در راستای عمود بر سطح وارد می شود. (چون نمی خواهد حرکت سازه در راستای عمود بر سطح جلوگیری کند)



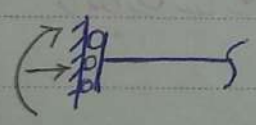
$\Delta x \neq 0$, $\theta \neq 0$
$\Delta y = 0$

* در تکیه گاه گیردار، دو لینک از جنس نیرو و یک لینک از جنس گشتاور داریم.



$\Delta x = \Delta y = 0$
$\theta = 0$

(دو لینک (نیرو)
یک لینک (گشتاور))



دو لینک

$\theta = 0$
$\Delta x = 0$
$\Delta y \neq 0$

* تکیه گاه هدایت شده (تکیه گاه برشی نیز می گویند)

← تکیه گاه هدایت شده مشابه تکیه گاه غلتکی است با این تفاوت که امکان دوران ندارد.

← تکیه گاه هدایت شده دارای یک لینک از جنس نیرو در راستای عمود بر سطح و یک لینک از جنس گشتاور است.

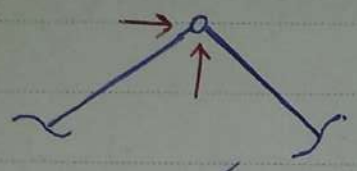
* گاهی می توان دو سازه را به هم وصل کرد:

Subject
Date 4 نوع اتصال داخلی

(جهت لینک‌ها اختیاری می‌باشد)

← سمت چپ مفصل را منفی و سمت راست را مثبت در نظر می‌گیریم.

مفصل داخلی



دو لینک

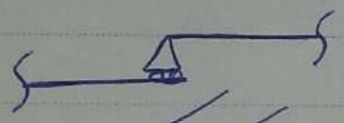
$\theta^- \neq \theta^+$

$\Delta x^- = \Delta x^+$

$\Delta y^- = \Delta y^+$

با هم حرکت کرده ولی نسبت به هم دوران می‌توانند داشته باشند

غلتک داخلی



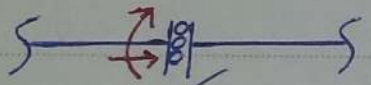
یک لینک

$\theta^- \neq \theta^+$

$\Delta x^- \neq \Delta x^+$

$\Delta y^- = \Delta y^+$

* در غلتک داخلی اعضا فقط با یک لینک به هم وصل هستند (غلتک داخلی بیانگر یک لینک است)



دو لینک

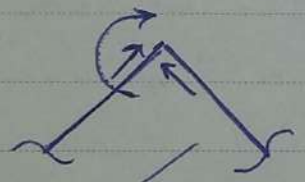
$\theta^- = \theta^+$

$\Delta x^- = \Delta x^+$

$\Delta y^- \neq \Delta y^+$

هدایت شونده‌ی داخلی.

(غیر هدایت شونده‌ی داخلی)



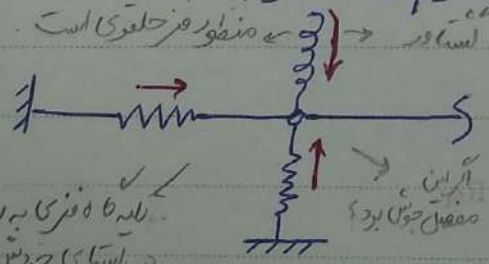
سه لینک

$\Delta x^- = \Delta x^+$

$\Delta y^- = \Delta y^+$

$\theta^- = \theta^+$

* هر فنر بیانگر یک نیرو است. هر جا نیرو و جابه‌جایی داشتیم، یک فنر داریم.



تکیه‌گاه فنری به سازه اجازه‌ی حرکت در راستای خودش را می‌دهد.

	سه لینک	برای تکیه‌گاه گیردار
	$\theta \neq 0$	$\theta = 0$
	$\Delta x \neq 0$	$\Delta x = 0$
	$\Delta y \neq 0$	$\Delta y = 0$

در تکیه‌گاه گیردار و این تکیه‌گاه هر دو سه لینک دارند ولی یکی جابه‌جایی دارد و دیگری نه. در صورتی که در سازه

Subject
Date

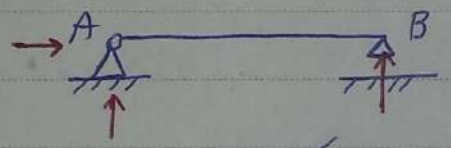
(مثل سکوی دریایی)

احتمال تغییر شکل بدهیم از حالت فنری و اگر تکیه گاه و سازه نسبت به هم حالت صلب داشته باشد (مثل دکل روی عرشه کشتی) ما از حالت گیردار استفاده می کنیم

* قانون ترکیب دو جسم صلب: ترکیب دو جسم صلب در صورتی پایدار است که توسط حداقل سه لینک غیر موازی و غیر هم راس به یکدیگر وصل شده باشند. (اگر بیشتر از سه لینک بود پایداری نقض نمی شود ولی اگر کمتر باشد نقض می شود) (منظور از سه لینک غیر موازی این است که هر سه لینک با هم موازی نباشند و غیر هم راس یعنی هر سه با هم هم راس نباشند) (در صورتی که بین دو جسم سه لینک غیر موازی و غیر هم راس بود، حتی در صورتی که سه یا تعداد بیشتری لینک موازی و هم راس نیز بین آن ها وجود داشته باشد، ترکیب را پایدار در نظر می گیریم.)

* تکیه گاه ها نقطه هستند (جسم محسوب نمی شوند)

مثال) در اینجا دو جسم داریم. جسم AB و زمین، با دو لینک در نقطه ی A و یک لینک در نقطه ی B به یکدیگر وصل شده اند و ترکیب پایدار است.

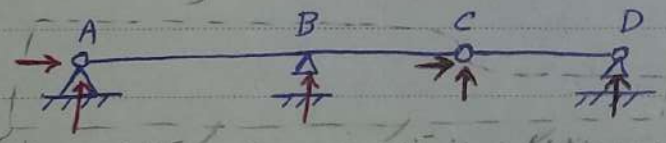


مثال) در اینجا سه جسم داریم. برای استفاده از قانون باید دو جسم را انتخاب کنیم. برای پایداری استدلال می کنیم

(در تعیین پایداری اجسام را تا مدامکان پیوسته در نظر بگیرید و نقطع نکنید)

- جسم AC و زمین با دو لینک در نقطه ی A و یک لینک در نقطه ی B به زمین وصل شده است و پایدار است.

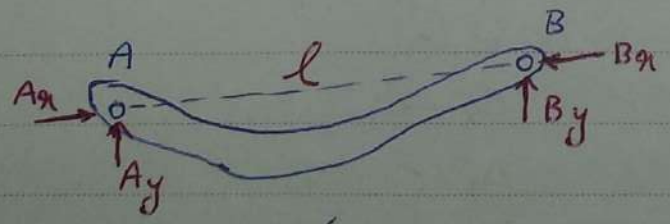
مرحله اول



؟ چون بدون لینک C پایداری AC وجود دارد نیروهای آن را در مرحله اول در نظر نمی گیریم (فقط تنها لینک های بین دو جسمی را که قانون دو جسم صلب را برای آن ها بررسی می کنیم در نظر می گیریم)

جسم CD با دو لینک در نقطه ی C و یک لینک در نقطه ی D به جسم صلب قبلی (ترکیب AC و زمین) وصل شده است و پایدار است.

* میله ی دو سر مفصل

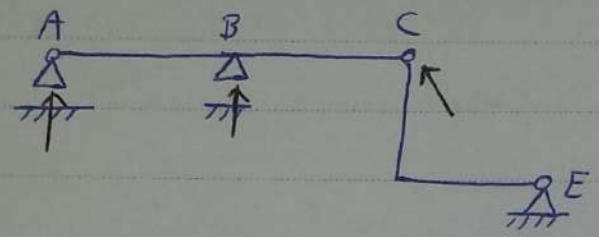


$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \Rightarrow B_y \times l = 0 \Rightarrow B_y = 0 \Rightarrow A_y = 0$$

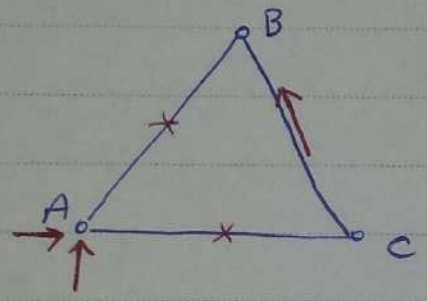
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = B_x$$

Subject
Date

پس می‌توان گفت: هر جسم دو سر مفصلی نماینده‌ی یک نیرو یا یک لینک محسوب می‌شود. این جسم می‌تواند هر شکلی داشته باشد. به این طریق این اجسام در تحلیل ساده می‌شوند.



مثال) اجسام ABC و زمین با دو لینک در نقاط A و B و لینک CE (جسم دو سر مفصل) به یکدیگر وصل شده‌اند و ترکیب پایدار است.



مثال) اجسام AB و AC با دو لینک در نقطه‌ی A و لینک BC به یکدیگر متصل شده‌اند و ترکیب پایدار است.

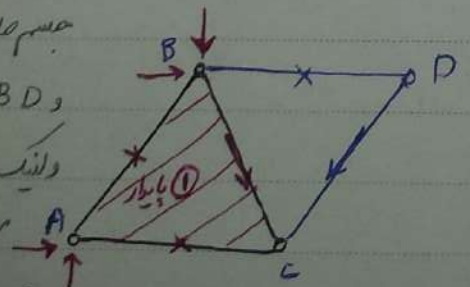
لینک بین دو نقطه می‌باشد.

* یکی از مفاهیم پایداری این است که سازه در اثر اعمال نیرو حرکت نکند. پس مقصود از بی‌نیروی نیروهای این است که نیروی وارد شده در دو راستا داشته باشیم و منظور از بی‌نیرو هم این است که در صورت اعمال آن‌ها به سازه، گشتاور نیروهای وارده نسبت به نقطه‌ی هم‌راستا صفر نشود.

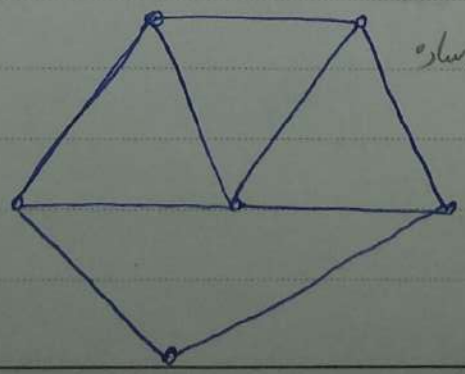
* هر جسم دو سر مفصلی به شرطی که تحت بار نباشد (انتقال داده باشد) نماینده‌ی یک نیرو یا یک لینک است.

* اگر یک خرپا را با قانون دو لینک و یک مفصل گسترش دهیم ترکیب پایدار است. (ترکیب اولیه به عنوان جسم صلب در نظر گرفته می‌شود.) (خرپای جدید بسازیم) (خرپای مثلثی)

جسم صلب ABC و BD با دو لینک در نقطه B و لینک CD (جسم دو سر مفصل) به یکدیگر وصل شده‌اند و ترکیب پایدار است.



قانون گسترش خرپای ساده



Subject
Date

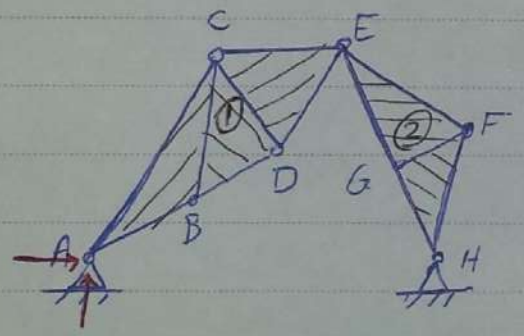
دلیل استفاده از خرپا:

سختی محوری به مراتب از سختی خمشی بیشتر است به همین خاطر با استفاده از خرپاها، که نیروها را به صورت محوری از خمشی تبدیل می‌کنند، سازه را می‌سازیم

* ویژگی خرپاها: 1- اعضای دوسر مفصل
2- نیروها در گره‌ها وارد می‌شود.

اگر سازه‌ای این شرایط را داشت خرپا بوده، پس نیروهای آن را محوری در نظر می‌گیریم و آنالیز می‌کنیم

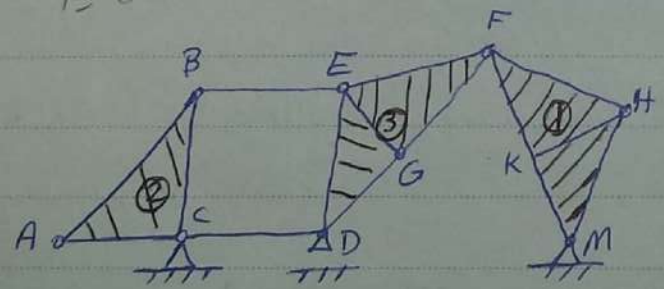
در حالت واقعی (خرپا یک تعبیر فیزیکی است) خرپای ایده‌آل وجود ندارد چون وزن خود تیرها در گره‌ها وارد نمی‌شود.



* پایداری؟

از قانون گسترش خرپای ساده استفاده می‌کنیم (از ABC شروع کرده و با یک مفصل و دو لینک گسترش می‌دهیم)
جسم یک و زمین با دو لینک در نقطه‌ی A و لینک EH (جسم دوسر مفصل) به یکدیگر وصل شده‌اند و ترکیب پایدار است.

خرپای ② یک جسم صلب تلقی می‌شود و از آنجا که دوسر آن مفصل است، آن را عضو دوسر مفصل به حساب می‌آوریم



** MHK یک خرپای ساده است تا نقطه‌ی F گسترش می‌دهیم و آن را جسم ① نام‌گذاری می‌کنیم
ABC یک خرپای ساده‌ی غیرقابل گسترش است و آن ② نام‌گذاری می‌کنیم.
EFG نیز یک خرپای ساده است و تا D گسترش می‌دهیم و آن را جسم ③ نام‌گذاری می‌کنیم.
اگر از ② و ③ شروع کنیم به جواب نمی‌رسیم. (امت شود که لینک زمین جسم است) از ① و ③ نیز به جواب نمی‌رسیم (فقط لینک F داریم)

نکته: در هنگام استفاده از قانون ترکیب (جسم صلب)، تنها لینک‌های بین آن دو جسم را در نظر می‌گیریم و کاری به سایر لینک‌ها نداریم

Subject
Date

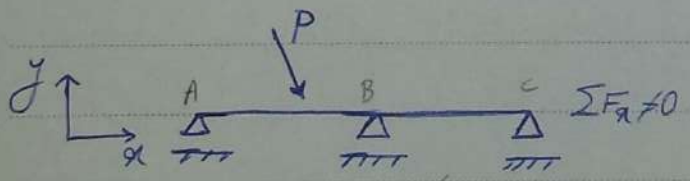
ابتدا می‌گوییم CD و زمین (یعنی پایداری آن را بررسی می‌کنیم) عضو CD با دو لینک در نقطه‌ی C و یک لینک در نقطه‌ی D به زمین وصل شده است و ترکیب پایدار است.

در ترکیب بعدی نقطه‌ی D فقط مفصل است و دیگر دیدِ علتک به آن نداریم.

جسم ③ با دو لینک در نقطه‌ی D و لینک FM (جسم دوسر مفصل ①) به جسم قبلی (ترکیب CD و زمین) وصل شده است و ترکیب پایدار است.)

جسم ② با دو لینک در نقطه‌ی C و لینک BE به جسم قبلی وصل شده است و پایدار است.

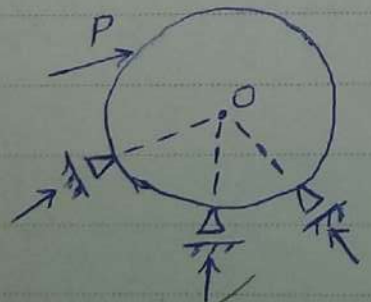
اگر بخواهیم در دو مرحله بیان کنیم: (در اینجا دوسر مفصل است)
جسم ③ و زمین با یک لینک در نقطه D (تکیه‌گاه علتکی)، لینک FM و لینک CD به زمین وصل شده است و ترکیب پایدار است. (اگر لینک CD را در نظر نگیریم، سه لینک حداقلی برای دستیابی به پایداری را نخواهیم داشت)



جسم ABC و زمین با سه لینک موازی در نقاط A و B و C به هم وصل شده‌اند و ترکیب ناپایدار است.

* اگر بار قرار دهیم، $\Sigma F_x \neq 0$
پس ناپایدار است (ناپایدار استاتیکی)
در این مثال شرایط قانون ترکیب دو جسم صلب رعایت نشده است.

نکته: قانون ترکیب دو جسم صلب شامل عدم رعایت قانون تعادل هم می‌شود.



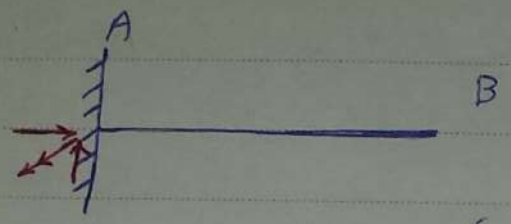
$\Sigma M_O \neq 0$

لشتاور از جنس بردار است و نمادش ↔ می‌باشد.

جسم کروی و زمین با سه لینک غیر موازی ولی هم راستا به یکدیگر متصل شده‌اند و ترکیب ناپایدار است

نکته: یک سازه‌ی ناپایدار در واقع می‌تواند یک سازه‌ی پایدار لحظه‌ای باشد که تحمل نیرو ندارد.

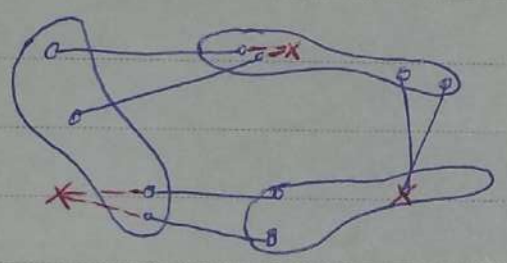
Subject
Date



از لحاظ تعیین سازه چون 3 لینک هم رأس داریم سازه ناپایدار است. پس تبصره زیر را بیان می‌کنیم:

تبصره: درصورتی که یکی از لینک‌ها از جنس گشتاور بود کنترل شرط غیر هم رأس بودن لازم نیست. (پس سازه‌ی بالا پایدار است)
(پس باید دو لینک نیروی غیر موازی داشته باشیم) (اشکالی ندارد که دو لینک نیرو و یک لینک از جنس گشتاور و هم رأس باشند)

قانون ترکیب سه جسم صلب: ترکیب سه جسم صلب درصورتی پایدار است که توسط حداقل 6 لینک که محل تقاطع دو به دوی آن‌ها در یک راستا نباشد به یکدیگر وصل شده باشند.
(به عبارت دیگر این سه نقطه تشکیل مثلث بدهند)

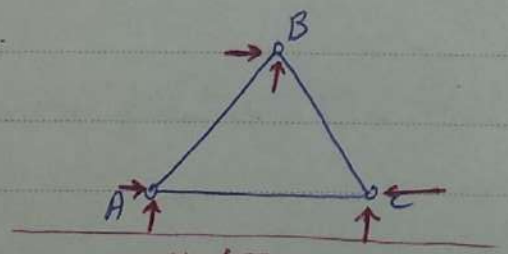


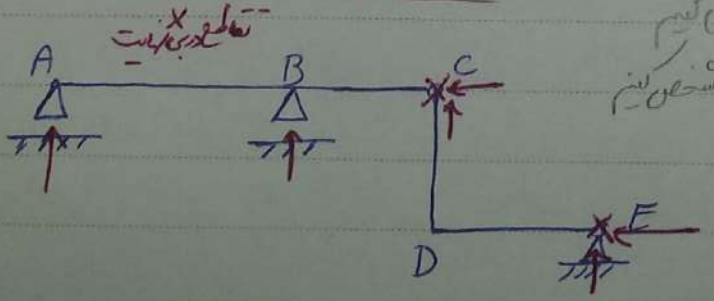
* 6 لینک داریم.
(ضربدرها که محل تقاطع دو به دو لینک‌ها هستند در یک راستا نیستند یعنی در واقع تشکیل یک مثلث می‌دهند)

نکته: محل تقاطع حتماً لازم نیست روی خود جسم بیفتد بلکه یک نقطه‌ی هندسی است.

نکته: اگر دو لینک موازی بودند محل تقاطع آن‌ها باید در بی‌نهایت بیفتد.

* اجسام AB، BC و AC، با دو لینک در نقطه‌ی A و دو لینک در نقطه‌ی B و دو لینک در نقطه‌ی C به یکدیگر وصل شده‌اند و ترکیب پایدار است.





توجه: لینک‌هایی که محل تقاطع آن‌ها را می‌یابیم باید اتصال دهنده‌ی یک جسم صلب به جسم صلب دیگر باشند.

نکته: زمانی که از قانون ترکیب سه جسم صلب استفاده می‌کنیم

* باید تمام لینک‌های موجود بین آن سه جسم را مشخص کنیم و در نظر بگیریم

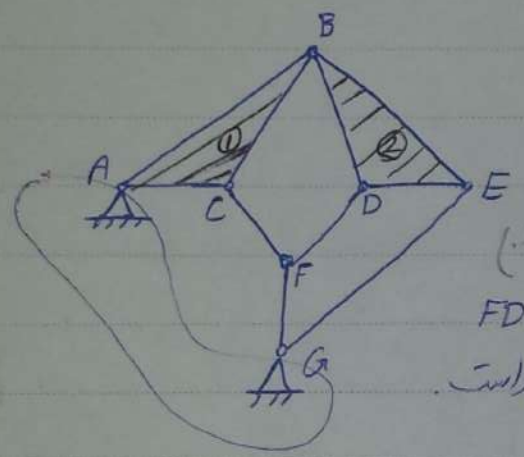
Subject
Date

اجسام ABC و CDE و زمین با دو لینک در نقاط A و B، دو لینک در مفصل C و دو لینک در مفصل E به یکدیگر وصل شده‌اند و ترکیب پایدار است.

برای مثال **

* جسم ② و ③ و زمین با دو لینک در نقطه‌ی C، لینک‌های FM و D (تکیه‌گاه غلتکی) و لینک‌های BE و CD به یکدیگر وصل شده‌اند و ترکیب پایدار است.

مثال:

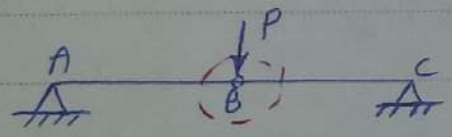


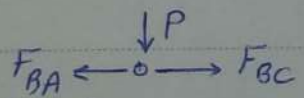
نکته: اگر فقط دو تکیه‌گاه داشتیم می‌توانیم آن را یک لینک تصور کنیم (یعنی در واقع می‌توان زمین را یک عضو دو مفصل بین آن دو تکیه‌گاه تصور کرد. این مثال برای زمانی که زمین بخشی از سه جسم صلب باشد کاربرد دارد.)

اجسام ① و ② و FG با دو لینک در نقطه‌ی B، لینک‌های FD و EG و لینک‌های CF و AG به یکدیگر وصل شده‌اند و ترکیب پایدار است.

دقت: جسم ② را نمی‌توان دو مفصل فرض کرد چون لینک DF از آن خارج شده است.

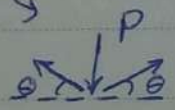
مثال: سازه خرپا است پس فقط نیروی محوری داریم. در مفصل B تعادل نداریم.





$\Sigma F_y \neq 0$

حرکت می‌کند تا برسد به زاویه θ



$F_{BC} = F_{BA} = \frac{P}{2\sin\theta}$

← به سازه‌ای مشابه سازه‌ی بالا، که لحظه‌ای ناپایدار و سپس پایدار می‌شود ناپایدار آنی می‌گویند. از این سازه‌ها باید اجتناب کنیم چون این شوک ممکن است باعث خرابی سازه شود.

Subject
Date

* معینی به این معناست که تعداد معلومات و مجهولات آن برابر است.

معین ← تعداد معلوم = تعداد مجهول

نامعین ← تعداد معلوم < تعداد مجهول

ناپایدار ← تعداد معلوم > تعداد مجهول

* دو تعریف اول معینی یا پایداری نمی‌دهند چون که پایداری یک سازه به تعداد معلوم و مجهول آن وابسته نیست بلکه وابسته به هندسه‌ی لینک‌ها می‌باشد.

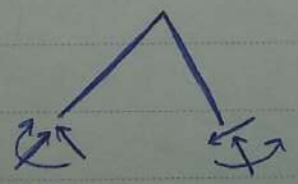
* اگر سازه‌ای پایدار باشد انتظار داریم که برای نیروهای داخلی یک جواب بیشتر به دست نیاید. در این حالت تعداد جواب‌ها بیش از یکی است (مثلاً چهار معادله و سه مجهول، به ازای سه معادله اول و یا دوم جواب‌های متفاوتی دارد.) پس از لحاظ فیزیکی ناپایدار است

* در یک سازه ما با دو مجهول نیروی داخلی و واکنش تکیه‌گاهی مواجه هستیم.

مجهول { نیروی داخلی / واکنش تکیه‌گاهی }

* نیروهای داخلی بستگی به اعضا دارد. در قاب سه مجهول برای هر عضو داریم و در خرپا یک مجهول (نیروی محوری) برای هر عضو داریم.

* هر سازه‌ی خمشی هر عضو آن 3 مجهول دارد. (نیروی محوری، برشی و لنگر خمشی)

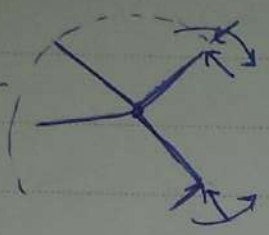


مجهولات = $3m + R$

m: تعداد اعضا ، R: واکنش تکیه‌گاهی

* برای هر گره می‌توان سه معادله نوشت: (ΣF_x ، ΣF_y و ΣM)

Subject
Date



به دو معادله نمونه

ΣF_x

ΣF_y

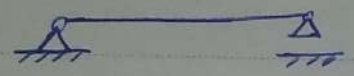
ΣM

معادلات $= 3j + C$

معادلات شرطی ← تعداد گره‌ها

نکته: برای تعیین معینی یا نامعینی یک سازه باید تعداد عضوها، واکنش‌های تکیه‌گاهی، گره‌ها و معادلات شرطی را مشخص کنیم.

مثال) یک عضو دو گره داریم و سه واکنش تکیه‌گاهی داریم.



$m = 1$

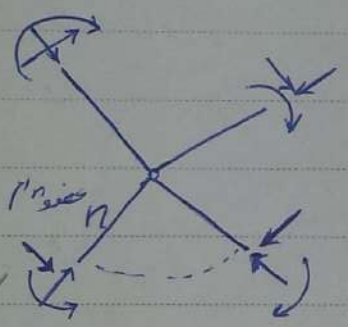
$j = 2$

$R = 3$

$3m + R = 3 \times 1 + 3 = 6$

$3j + C = 3 \times 2 + 0 = 6$ ⟶ معین

نکته: هر گره می‌تواند به صورت مفصلی، غلتکی، هدایت شده و ... باشد.



عضو $n^{ام}$

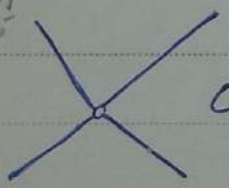
چون مفصل می‌تواند لشتاور خمشی را تحمل نماید ایجاد رابطه اضافه بر روابط تعادل می‌نماید. اگر هر عضو نسبت به مفصل باید صفر باشد، برای حفظ استقلال یکی از معادلات را حذف می‌کنیم.

* برای حفظ استقلال $n-1$ معادله را کافی داریم.
برای هر عضو می‌توان یک معادله‌ی لنگر حول گره نوشت
معادله‌ی حذف شده حتماً از جنس لنگر است.

$C = n - 1$

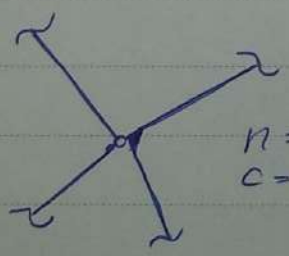
برای یک گره مفصلی $C = n - 1$ است که n تعداد اعضایی است که به صورت مستقل می‌توانند حول گره دوران کنند.

مثل حالتی که دقیق سه معادله لنگر را نداشته باشیم، دوتای آن‌ها قابل قبول است

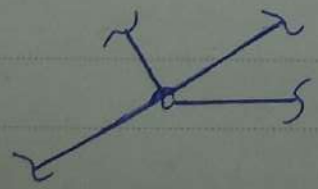


$C = 3$

n با تعداد ظاهری اعضا برابر نیست.

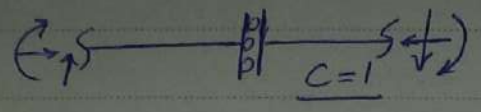


$n = 3$
$C = 2$



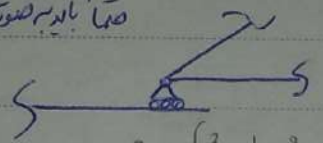
$n = 2$
$C = 1$

Subject
Date



به طور کلی برای اتصال هدایت شده داخلی
فقط یک $\sum F_y$ داریم (و تا که فقط یکی قابل قبول است)
یعنی برای اتصال هدایت شده همواره $C=1$ است

حتماً باید به صورت هدایت شده باشد.
?



$C=\begin{cases}3-1=2\\1\end{cases}$

تکیه‌گاه غلتکی، لنگر و نیرو را نمی‌تواند تحمل کند

$C=\begin{cases}n-1 & \text{لنگر}\\1 & \text{نیرو}\end{cases}$

در تکیه‌گاه غلتکی عضو نیز جرخ‌ها نیز حساب می‌شود
در n

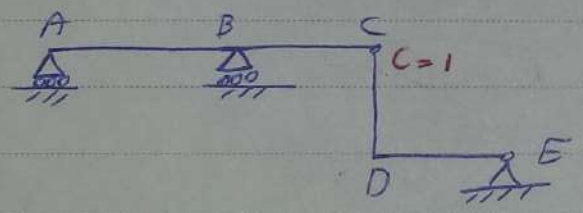
روش دوم برای مشخص کردن نامعینی:

با استفاده از قانون ترکیب دو جسم صلب اگر دو جسم را به هم متصل کردیم اگر 3 لینک داشتیم معین و اگر بیشتر نامعین است و اگر کمتر ناپایدار

با استفاده از قانون ترکیب سه جسم صلب اگر سه جسم را به هم وصل کردیم ...

مثال)

جسم



1) $\widehat{ABC}+\widehat{E}\rightarrow 0$

معین و پایدار

در محاسبه m، معین جزو عضو هاست ولی اعضایی که به هم جوش داده شده اند را یک عضو حساب می‌کنید

2) $m=4$
$j=5$
$R=4$
$C=1$

$3m+R=3\times4+4=16$
$3j+C=3\times5+1=16 \rightarrow$ معین

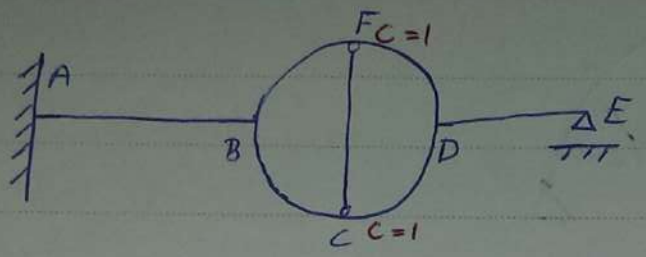
اتصالات ثابت نیز جزو لینک به حساب می‌آیند.

از هر دو روش حتماً باید به یک جواب برسیم.

در تعیین معینی یا نامعینی سازه، در همان حال که مرحله به مرحله پایداری بخش‌های مختلف را تعیین می‌کنیم، در صورت پایداری حساب می‌کنیم که چند لینک بیشتر از سه لینک حداقل مورد نیاز وجود دارد. این لینک‌های اضافه مجهولات هستند. در پایان تعادل پایداری سازه تعداد این لینک‌های اضافی در هر مرحله با هم جمع می‌شوند و درجه نامعینی سازه را مشخص می‌کنند. اگر همواره 3 لینک حداقل مورد نیاز در هر مرحله برای تعیین پایداری باشد، سازه معین است.

Subject
Date

مثال)



در استفاده از قانون اصبام صلب لازم نیست عضوها را جدا کنیم

1) $\widehat{ABCDE} + \hat{E} \rightarrow 1$ — چون در A و یکی در E یکی اضافه است.

جسم مرحله ۱

2) $\hat{1} + \widehat{BFD} \rightarrow 3 \Rightarrow 5$

3) $\hat{2} + \widehat{FC} \rightarrow 1$

5 درجه نامعینی

روش بعد: $m = 7$

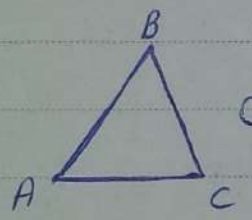
$j = 6$ $\quad 3 \times 7 + 4 = 25$

$R = 4$ $\quad 3 \times 6 + 2 = 20 \Rightarrow 5$

$C = 2$

روش سوم برای مشخص کردن نامعینی:

روش کادر بسته: هر کادر بسته 3 درجه نامعینی دارد



3 درجه نامعین

مجهول: $3K + R$

تعداد کادر بسته

معلومات: $3 + C$

در روش کادر بسته تفاوتی ندارد که اتصالات کادر به صفحه یا جوشی یا پرچی از این دو باشد.

ل 3 نداریم چون گره به گره نمی رویم.

برای مثال بالا، دو کادر بسته داریم. برای این که کادرهای تودرتو را دوباره حساب نکنیم هر کادری که شمردیم بخشی از آن را پاک می کنیم.

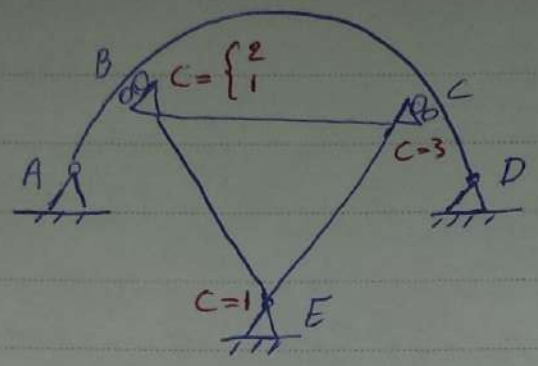
$K = 2, R = 4, C = 2$

$3 \times 2 + 4 = 10$

$3 + C = 3 + 2 = 5 \Rightarrow 5$

Subject
Date

مثال)



با استفاده از قانون ترکیب اجسام صلب

1) $\widehat{ABCD} + \overset{\text{زمین}}{\hat{E}} \longrightarrow 1$

2) $\hat{1} + \underset{\nabla}{\widehat{BCE}} \rightarrow 1$ $\Rightarrow 2$

دقت شود که در این مثال پس از بررسی ABCD و زمین، برای بررسی ECB اتصالات B و C را عملکرد در نظر می‌گیریم نه مفصلی. در مثال (**) که آن را مفصلی در نظر گرفتیم اما این (زمین) تا بالا (عضو CD) را یک عضو صلب کرده بودیم

(روش دوم)

$m = 6$
$j = 5$
$R = 6$
$C = 7$
$K = 2$

$3 \times 6 + 6 = 24$
$3 \times 5 + 7 = 22$ $\Rightarrow 2$

(روش سوم)

$3K + R = 3 \times 2 + 6 = 12$
$3 + C = 3 + 7 = 10$ $\Rightarrow 2$

نکته: یکی از راه های بررسی نامعینی یک سازه‌ی خرپایی، استفاده از قوانین ترکیب اجسام صلب است.

* در یک خرپا: (براساس قوانین ترکیب اجسام صلب)

اگر عضو اضافه (یک عضو) ← نامعین داخلی

اگر تکیه‌گاه اضافه (یک معادله) ← نامعین خارجی

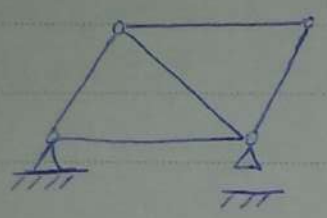
نکته: می‌توانیم از فرمول مشخص کردن نامعینی قاب، برای خرپا نیز استفاده کرد چون قاب حالت بزرگی از خرپا است (ولی این کار منطقی نیست)

خرپا نوع خاصی از قاب می‌باشد که تمام اتصالات مفصلی می‌باشد.

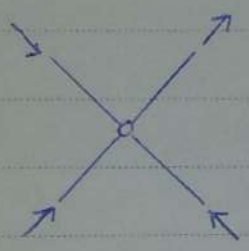
Subject
Date

ولی از روش فوق استفاده نمی‌کنیم چون تعداد اعضاء گره‌ها و به خصوص معادلات شرطی بسیار زیاد است و احتمال خطا بالا می‌رود. پس به دنبال یافتن یک فرمول خاص برای خرپاها هستیم.

در خرپا:



مجهول: $m+R$



نکته: در خرپا نیروی برشی و لنگر خمشی نداریم و فقط نیروی محوری داریم.
(به همین خاطر به جای استفاده از $3m+R$، از $m+R$ استفاده می‌کنیم)

نکته: ΣM برای این گره لازم نیست (چون همه‌ی نیروها از گره می‌گذرند ΣM صفر است.)

توجه: برای این گره می‌توان دو معادله‌ی ΣF_x و ΣF_y نوشت

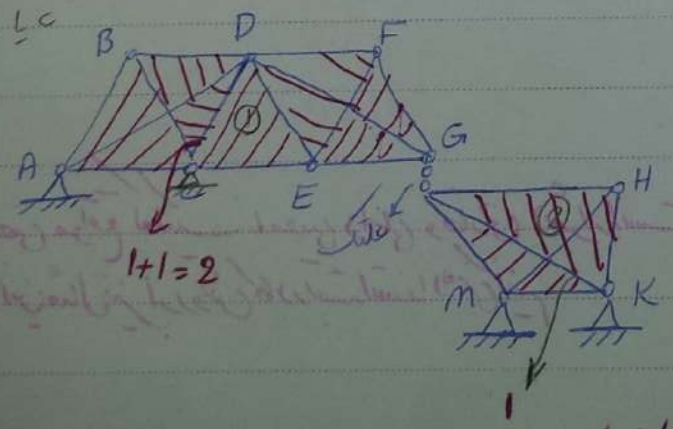
نکته: اگر اتصالات غلتکی در خرپا وجود داشت یک شرط از جنس نیرو به ما می‌دهد. (شرط لنگر قابل قبول نیست چون بدیهی است که صفر است.) (تکیه‌گاه مفصلی چون فقط شرط لنگر داشت دیگر در خرپا در خرپا تنها در یک صورت معادله‌ی شرطی داریم آن هم در صورتی است که غلتک داشته باشیم که به ما یک معادله شرطی از جنس نیرو می‌دهد.

معلومات: $2j+c$

غلتک

مثال)

یک تکیه‌گاه مفصلی ثابت در نقطه‌ی C یا E وجود دارد.



از قانون گسترش خرپای ساده استفاده می‌کنیم. DC اضافه محسوب می‌شود به این معنا که در پایداری سازه‌ی ① یک درجه نامعینی به وجود می‌آورد. (یعنی نسبت به قانون ترکیب دو جسم صلب، یک لینک اضافی داد.)

نکته: اگر هر دو جسمی که از طریق لولا به هم وصل شده اند از طریق قانون ترکیب اجسام صلب به هم مرتبط شده باشند، در صورتی که جسم دیگری به این لولا به صورت پینی وصل شده باشد، لولا را برای آن مفصلی در نظر می گیریم

Subject
Date

روش اول)

1) ① → 2
2) ② → 1
3) ① + $\hat{E}$ → 1
4) $\hat{3}$ + ② → 2

داخلی

در صورتی که بخواهیم از روش ترکیب اجسام صلب برای تعیین نامعینی خرپا استفاده کنیم، ابتدا باید نامعینی خرپا را از طریق قانون گسترش خرپای ساده مشخص کنیم.

داخلی

روش دوم)

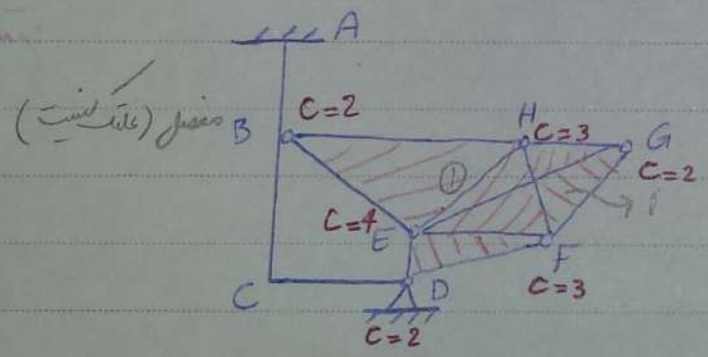
$m = 19$
$j = 10$ $\quad m + R = 19 + 8 = 27$
$C = 1$ $\quad 2j + C = 2 \times 10 + 1 = 21$
$R = 8$

(روش فرمولی)

* روش دوم به ما تعداد نامعینی داخلی را نمی دهد.

* از روش کاد بسته برای خرپا استفاده نمی کنیم (امکان پذیر است ولی منطقی نیست چون احتمال خطا خیلی بالا می برد.)

مثال)



بخشی از سازه خرپا و بخشی از کف قاب است. پس مجبوریم از فرمول قاب استفاده کنیم

1) ① → 1 نامعین داخلی
2) $\widehat{ABCD}$ + $\hat{E}$ → 2 ⇒ 4
3) $\hat{1}$ + $\hat{2}$ → 1

در بعضی مواقع لولا نامعینی داخلی و خارجی شرارا است.
برای این مثال نیز از روش کاد بسته استفاده نمی کنیم

* روش اول برای بررسی معینی یا نامعینی یک قاب یا خرپا، قانون ترکیب دو جسم صلب است. برای این روش ابتدا از طریق قانون گسترش خرپای ساده، به ساده سازی شکل اقدام می کنیم و از این طریق نامعینی داخلی را تشخیص می دهیم. زمانی که تعداد امکان این کار را انجام دادیم جسم های صلب شکل را با ساده سازی کرده و از طریق قانون ترکیب دو جسم صلب پایداری و سپس تعداد لولاهای اضافه را شمارش می کنیم.

Subject
Date

حتی اگر برای تعیین پایداری جسم را کنار چه از نظر گرفتیم در خط بعدی خود ول
باید تمامی قسمت های عضو را مجزا در نظر بگیریم

$m = 13$

$j = 8$ $\quad 3\times13+5 = 44$

$R = 5$ $\quad 3\times8+16 = 40 \Rightarrow 4$

$C = 16$

* خط تأثیر Influence Line (به صورت مخفف IL)

بارهای وارده به سازه را از چند منظر می توان بررسی کرد: استاتیکی و دینامیکی

بارها را می توان به دو حالت بار مرده و بار زنده برای هر دو حالت استاتیکی و دینامیکی دسته بندی کرد

دسته بندی دیگر (چه برای استاتیکی و چه برای دینامیکی): بار مرده (باری که از محل خود حرکت نمی کند)
و بار زنده (باری که می تواند از جای خود حرکت کند.)
(به این معنا که محل اثر آن متغیر است نه این که نسبت به زمان تغییر می کند.)
مقدار آن

پرسش: چه بار زنده در یک سازه باید به چه نحوی باشد تا سازه را طراحی کنیم؟

* بال بالا در لنگر منفی و بال پایین در لنگر مثبت و جان تیر وظیفه ی تحمل نیروی برشی را دارد.

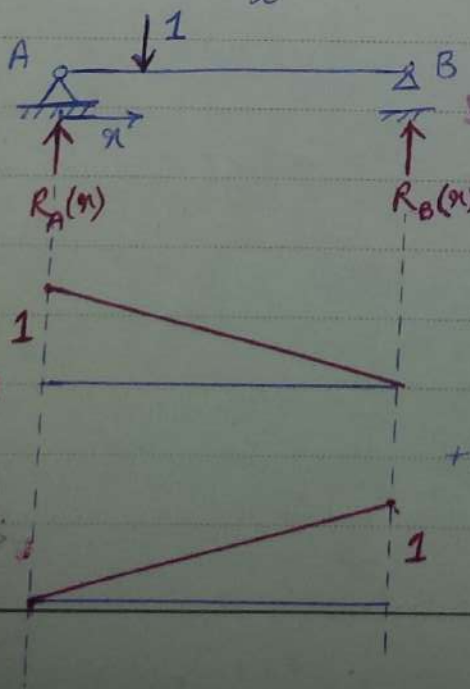
در یک تیر

← تیر یک سر گیردار یک سر لولا را در نظر می گیریم

نکته: اندازه ی بار را یک در نظر می گیریم (البته متمرکز)
به خاطر مناسب بودن بار را یک در نظر می گیریم. (تا در صورتی که
خواستیم برای مقدار مشخصی بار بررسی را انجام دهیم، مقدار آن را در ضرب کنیم)

نکته: می خواهیم محل بارگذاری اجرایی را بیابیم. ابتدا
می خواهیم واکنش های تکیه گاهی را بررسی کنیم.

طول تیر
l



R_A به ما می گویند به چه میزان است در صورت بارگذاری

در مسائل خط تأثیر ما به دنبال مقدار نیروهای تکیه گاهی و یا نیروهای داخلی در نقاط خاص به ازای بار زنده ی واحد در هر نقطه از طول سازه هستیم

$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 \Rightarrow R_A \times l - 1\times(l-x) = 0$$

$$R_A(x) = \frac{l-x}{l} = 1-\frac{x}{l}$$

نکته: چون R_A را به صورت تابعی از x داریم پس
ماکزیمم و مینیمم و ... آن را داریم.

نمودار خط تأثیر صفحه‌ی قبل بیان می‌کند که اگر بار زنده روی تکیه‌گاه A باشد، بیشترین میزان نیروی تکیه‌گاهی R_A را خواهیم داشت و هرچه بار از تکیه‌گاه A دورتر شود، R_A کاهش می‌یابد

Subject
Date

روش اول برای رسم خط تأثیر یک نیرو، با بدست آوردن معادله‌ی آن نیرو بر حسب x است. (استفاده از معادلات تعادل برای)

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_B + R_A - 1 = 0$$

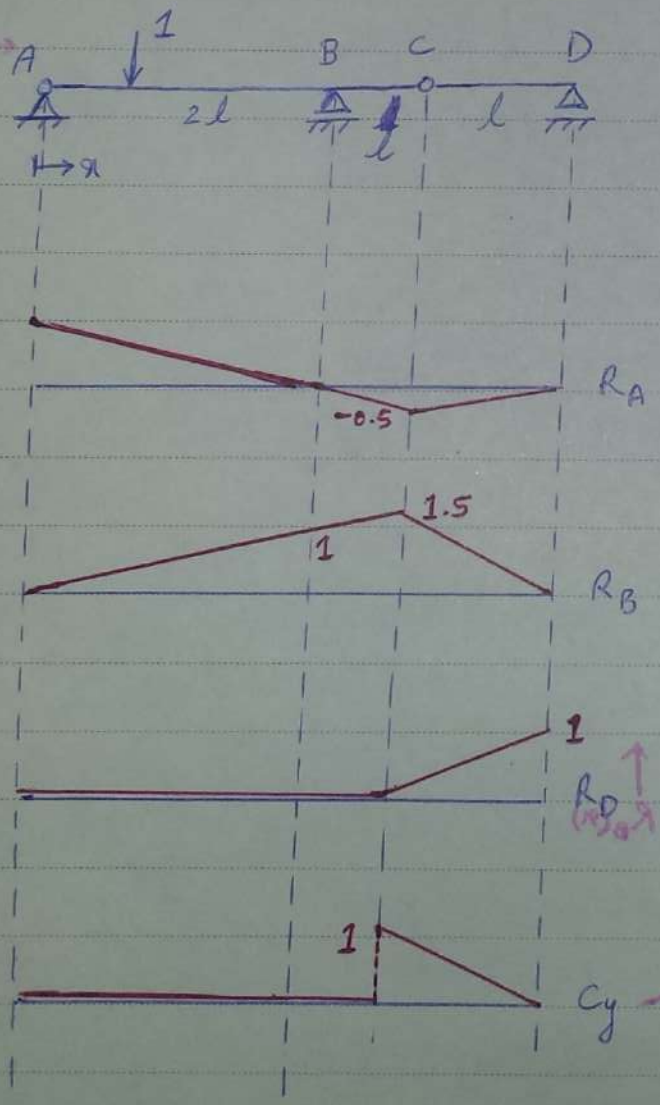
$$R_B = \frac{x}{l}$$

نمودارهای خط تأثیر همه حداکثر مرتبه‌ی یک هستند چون بار ثابت است

نکته: در سازه‌های معین خط تأثیر حداکثر درجه‌ی یک می‌باشد. (یا در صورت داشتن بار بیشتر در سازه‌ی معین باید انتخاب شود) (یعنی مضرب خطی) (معینی یا نامعینی سازه به بار گذاری ارتباطی ندارد)

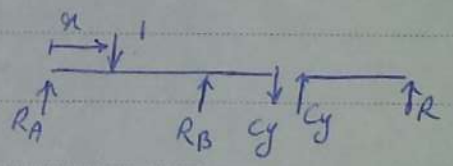
بارهایی که برای رسم خط تأثیر استفاده می‌کنیم، بصورت استاندارد متمرکز و دارای اندازه واحد است

نکته: طراحی تکیه‌گاه کششی و فشاری متفاوت است. در فشار باید مراقب کمانش بود و در صورتی که تکیه‌گاه فقط کششی باشد می‌توانیم به جای آن از طناب (حتی) استفاده کنیم



مثال) دو حالت داریم: محل بارگذاری بین AC یا بین CD باشد.

x در این بازه متغیر است. $0 < x < 3l$



مجبوریم از سمت راست شروع کنیم چون دو معادله و دو مجهول داریم ولی سمت چپ دو معادله و سه مجهول دارد چون نیروی افقی نداریم

$$\Rightarrow R_D = 0$$

$$C_y = 0$$

برای سمت چپ: (مشابه مثال قبل)

$$R_B = \frac{x}{2l}$$

$$R_A = 1 - \frac{x}{2l}$$

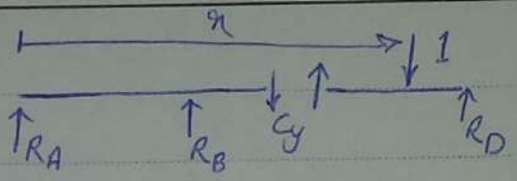
حال اگر بار از A تا C حرکت کرده و وارد ناحیه CD شده باشد:

نکته جالب: جمع نیروهای تکیه‌گاهی در هر x برابر 1 می‌شود چون باید تعادل برقرار باشد

Subject 4 مجهول و 3 معادله داریم پس مجبوریم از جدا کنیم
Date

DLC

$3l < x < 4l$



برای راحتی در رسم خط تأثیر و یافتن نیروهای تکیه‌گاهی، می‌توان محل اثر بار را به صورت قبل از مفصل داخلی و بعد از آن در نظر گرفته و دیاگرام آزاد ها را جداگانه رسم کرد.

توجه: دقت شود زمانی که بار را در یک بازه در نظر می‌گیریم، دیگر دیاگرام آزاد قسمت های دیگر حضور ندارد.

نکته: خط تأثیر می‌تواند در نقاط خرزی دارای پیوستگی و دو مقداری بودن باشد.

خط تأثیر نیروهای تکیه‌گاهی پیوسته است.

خط تأثیر مفصل می‌تواند ناپیوسته باشد.

$$\circlearrowleft^{+} \sum M_C = 0 \Rightarrow R_D \times l - 1 \times (x - 3l) = 0$$

$$R_D = \frac{x}{l} - 3$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow C_y + R_D - 1 = 0$$

$$C_y = 4 - \frac{x}{l}$$

$$\circlearrowleft^{+} \sum M_A = 0 \Rightarrow R_B \times 2l - C_y \times 3l = 0$$

$$R_B = \frac{3}{2} C_y = 6 - \frac{3}{2}\frac{x}{l}$$

$$R_A = -\frac{1}{2} C_y = \frac{x}{2l} - 2$$

تکیه‌گاه A هم برای کشش و هم برای فشار باید طراحی شود.

از R_B می‌فهمیم که بار اگر در نقطه‌ی C باشد، حالت بحرانی برای این تکیه‌گاه است و برای طراحی این تکیه‌گاه باید بار را روی نقطه‌ی C قرار دهیم.

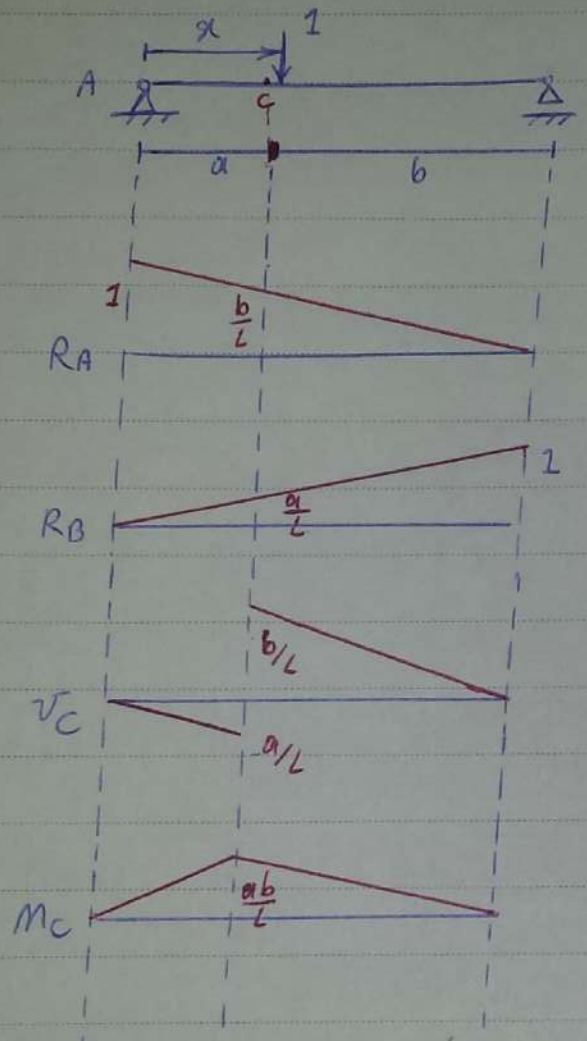
برای طراحی مفصل C، چون یک اپسیلون قبل نیرو صفر و اگر یک اپسیلون بعد نیرو ماکزیمم است، باید نیرو را سمت راست مفصل C قرار دهیم.

اگر نیرو در قسمت AC باشد بخش CD دخالت ندارد ولی اگر نیرو در قسمت CD باشد، ABC دخیل می‌شود. چون: تیر ABC خودش به تنهایی و مستقل از CD پایدار می‌باشد و در صورتی که باری به آن وارد شود خودش به تنهایی تحمل می‌کند ولی تیر CD برای پایداری وابسته به جسم ABC است و بخشی از بار وارده را به آن منتقل می‌کند.

در یک سازه‌ی پایدار، بخشی از سازه که برای پایداری به قسمت های دیگر وابسته است بار وارده به خود را با سایر قسمت ها تقسیم می‌نماید اما بخشی که مستقلاً پایدار است، تمام بار را به تنهایی تحمل می‌کند.

Subject
Date

رسم خط تأثیر نیروی برشی و لنگر خمشی برای یک نقطه :

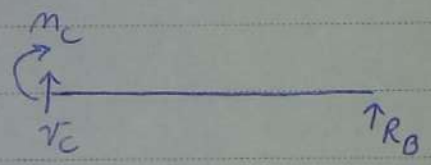


برش و لنگر در نقطه‌ای مانند c را می‌خواهیم بررسی کنیم.
نقطه‌ی c نقطه‌ای شاخص است چون محل بار متغیر است. برای رسم برش c دو راه داریم:
از R_A و R_B که محاسبه کرده‌ایم استفاده کنیم یا این که دوباره از اول محاسبه کنیم

دو حالت داریم: بارگذاری تا قبل از c و بعد از c

$C \bar{L} A$

$0 < x < a$

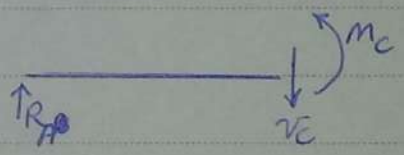


$V_C = -R_B$

$M_C = R_B \times b$

$B \bar{L} C$

$a < x \leq L$



$V_C = R_A$

$M_C = R_A \times a$

(لنگر مثبت: بالا فشاری و پایین کششی)

در مورد لنگر محل بار ثابت و محل محاسبه لنگر متغیر است.
در خط تأثیر لنگر محل محاسبه لنگر ثابت و محل بار متغیر است.

برای طراحی، ابتدا باید نقطه‌ی مبنای طراحی را مشخص کنیم. (مثبت یا منفی تأثیری در طراحی برشی ندارد.)
کنار تکیه‌گاه‌ها را برای طراحی انتخاب می‌کنیم. معمولاً نقطه‌ی بحرانی برای طراحی گوشه است (در اکثر $\frac{a}{L} = 1$ و یا $\frac{b}{L}$ مساوی یک شده و ماکزیمم می‌شود) پس مثلاً برای طراحی تیر برش نقاط کنار تکیه‌گاه‌ها و برای طراحی برای لنگر نقاط وسط را در نظر می‌گیریم.

$\frac{ab}{L}$ برای تیر دو سر مفصل در مرکز تیر ماکزیمم است. پس برای طراحی تیر دو سر مفصل برای لنگر بار را در مرکز آن قرار می‌دهیم

مهم: برای سهولت کار، اغلب دیاگرام آزاد قسمتی که بار در آن حضور ندارد شروع می‌کنیم (تا از حضور x در روابط اجتناب کنیم)

برای رسم خط تأثیر نیروی برشی و لنگر خمشی در یک نقطه، دو حالت وجود دارد بارگذاری تا قبل و بعد از آن نقطه باشد (یعنی در واقع بارگذاری در دو بازه صورت گیرد.) (در غیر این صورت V_C در دو بازه یکی گرفته می‌شود و اصلاً در دیاگرام V_C نداریم)

مثبت یا منفی بودن نیروی برشی تأثیری در طراحی ندارد

نقطه‌ی بحرانی برای نیروی برشی و لنگر خمشی در طراحی می‌توانند متفاوت باشند.

← در مسائل خط تاثیر در ابتدای امر باید خط تاثیر نیروهای تکیه‌گاهی رسم شود. در این صورت نیروهای تکیه‌گاهی حکم معلوم را

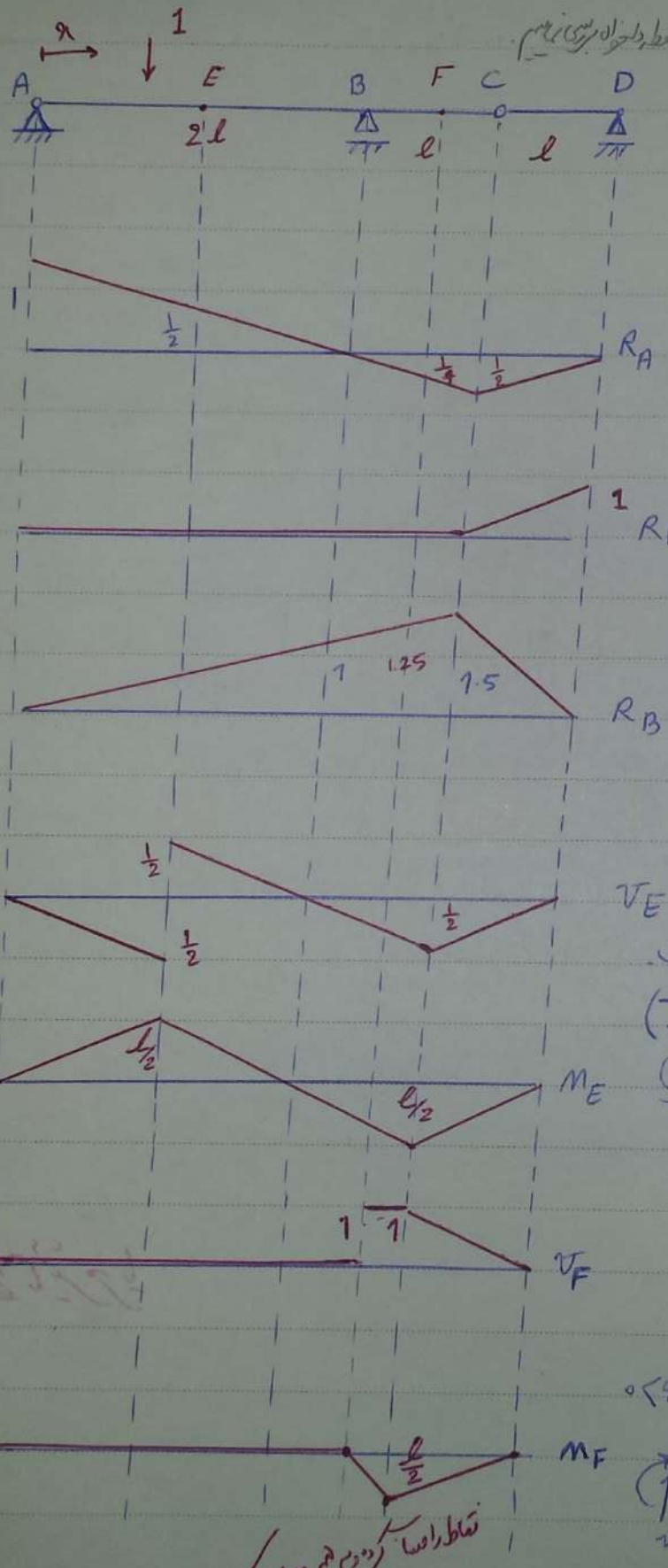
Subject

Date

برای ما داشته و تنها با دو بازه‌ی قبل و بعد می‌توانیم برای نیروی برشی و لنگر خمشی به جواب برسیم.

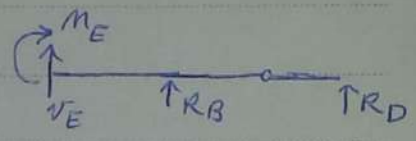
خط تاثیر

در این مثال می‌خواهیم نیروی برشی و لنگر خمشی را برای دو نقطه دلخواه بررسی نماییم.



نقطه‌ی محل بررسی را E و F نام‌گذاری می‌کنیم.

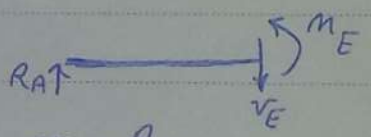
$0<x<L$ E تا A



$V_E = -(R_B + R_D)$

$M_E = R_B \times l + R_D \times 3l$

$l<x<4l$ D تا E

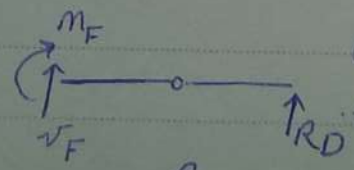


$V_E = R_A$

$M_E = R_A \times l$

* برش در نقطه‌ی E حداکثر $\frac{1}{2}$ می‌باشد و یک بخش لنگر مثبت و یک بخش لنگر منفی است.
* اگر لنگر مثبت کم باشد بخش کششی کوچک (I)
* نقطه‌ی E هم طراحی برای کشش و هم طراحی برای فشار می‌خواهد.
* در تیرهای بتنی زمانی که لنگر منفی زیاد باشد آرماتور بالا بزنید قرار می‌دهند.
* به سراغ نقطه‌ی F می‌رویم:

$0<x<2.5l$ F تا A



اگر مفصل را هم نکشیم اتفاقی نمی‌افتد چون استفاده‌ای ندارد.

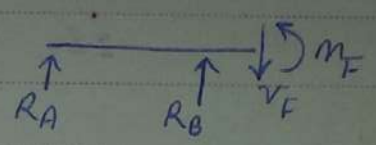
$V_F = -R_D$

$M_F = R_D \times 1.5l$

نقاط را صاف کرده و به هم وصل می‌کنیم

Subject
Date

$2.5l < x < 4l$ DLF



$$V_F = R_A + R_B$$

$$M_F = R_B \times \frac{l}{2} + R_A \times 2.5l$$

پس نتیجه می‌گیریم، نقطه‌ی F لنگر مثبت هیچ وقت ندارد و همیشه لنگر منفی دارد.

دو نقطه‌ی E و F را به صورت نمونه انتخاب کردیم. مثلاً یک تیر 20 متری دو سر مفصل را می‌توانیم با 3 نقطه بررسی کنیم. (دلخواه است ← براساس تجربه یا فرمول)

اگر بخشی از سازه به واسطه‌ی وصل شدن به سایر قسمت‌ها پایدار گردد، تا زمانی که بار در قسمت پایدار قرار دارد، در قسمت وابسته هیچ نیرو و لنگری (هیچ تلاشی) ایجاد نمی‌شود.
دلیل این که از A تا F، V_E و M_F صفر هستند. از F به بعد وارد قسمت وابسته می‌شویم.

* ابتدا نیروهای تکیه‌گاهی را رسم کرده و از طریق آن‌ها خط تأثیر نیروهای داخلی را رسم می‌کنیم
خط تأثیر

* در سازه‌های دریایی خرپا، کاربرد زیادی دارد. (همه‌ی crane ها خرپا هستند، در درون خودکشتی‌ها نیز خرپاها زیاد هستند، در جایی که بخواهند سقف زیادی را پوشش دهند، از خرپا استفاده کرده و روی آن plate قرار می‌دهند.

خط تأثیر خرپا

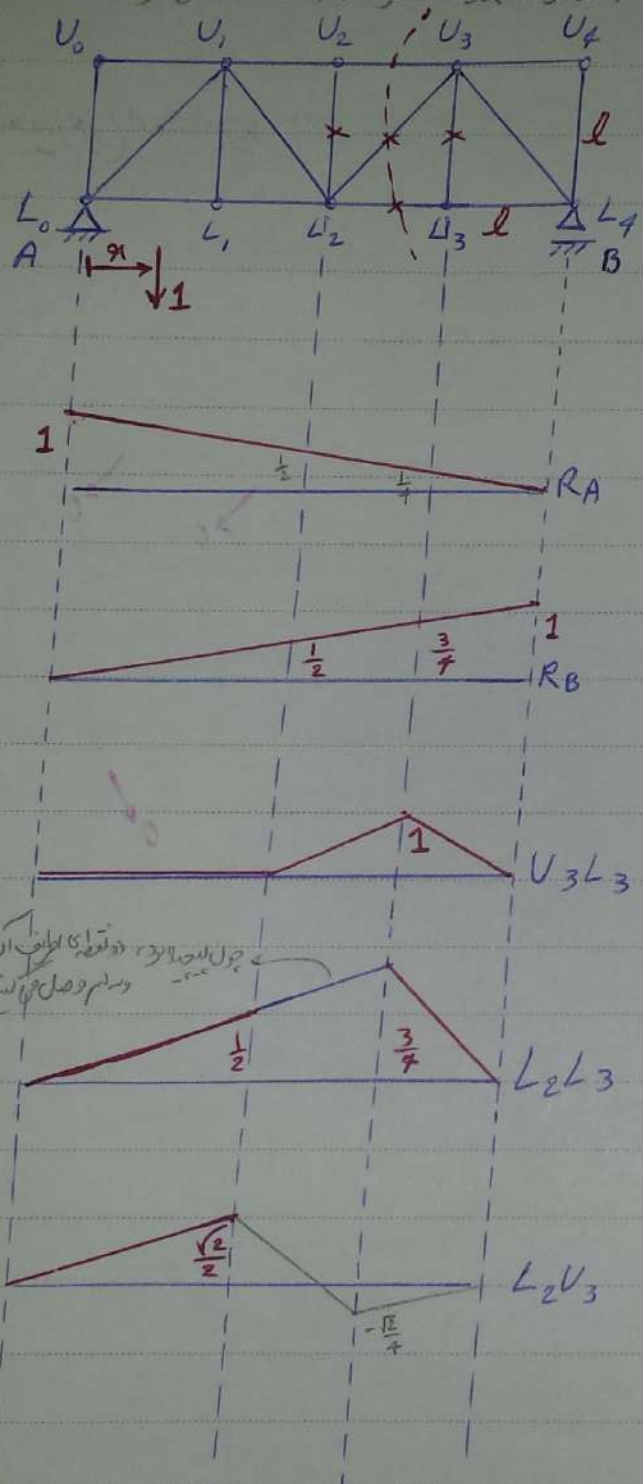
- در خرپا تنها خط تأثیر نیروی محوری داریم (دیگر خط تأثیر نیروی برشی و لنگر خمشی نداریم)

برای هر نقطه‌ی یک سازه، می‌توان سه خط تأثیر نیروهای داخلی: محوری، برشی و لنگر خمشی را رسم کرد.

Subject
Date

در مثال زیر می‌خواهیم خط تأثیر نیروی محوری عضوهای مشخص شده را بدست آوریم.

- در ترسیم خط تأثیر باید کاربرد خرپا را بدانیم (تا محل اثر بار که در گره‌های بالا یا گره‌های پایین و یا هر دو می‌باشد، مشخص شود.)

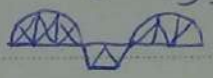


برای تکیه‌گاه‌ها اسم اضافه می‌گذاریم

چون لبه جدا بود دو نقطه‌ای اطراف آن را بدست آورده و هم وصل می‌کنیم (در این بازه بررسی نمی‌کنیم)

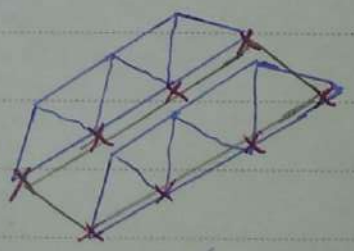
منظور از این که بار به گره‌های پایین یا بالا وارد شود این است که نیروی بار مستقیم روی این گره‌ها وارد می‌شود ولی روی گره‌های بالا به صورت مستقیم وارد نشده بلکه به صورت غیرمستقیم از طریق نیروهای واکنش عضوهای خرپا بر روی آن گره‌ها اثر می‌گذارد.

- این بار در گره‌های پایین وارد شده و به گره‌های بالا وارد نمی‌شود.
- در خرپاهای شصتی همیشه بار در قسمت بالا و به گره‌های بالا وارد می‌شود.
- سازه می‌تواند به صورت مرکب باشد و به بالا و پایین آن هم زمان نیرو وارد شود.



- در امتحان محل اثر بار به ما داده می‌شود.
- به نظر می‌رسد که بار در حین حرکت به عضوها هم وارد شده و سازه قاب است ولی در کل به این صورت نیست. متخصصان دیگر خرپا کار می‌کنند که بار بین گره‌ها تقسیم شود.

برای مثال اتصالات مکانیکی بین سازه و خرپا را در گره‌ها ایجاد می‌کنند. از لحاظ ظاهری بار بین گره‌ها وارد می‌شود ولی در حقیقت به گره‌ها وارد می‌شود.



- اتصالات سازه‌ای در گره است.
- یک گره زمانی تحت تأثیر قرار می‌گیرد که بار در مجاورت آن و در دهانه‌ی شامل آن گره قرار داشته باشد. (بار در دهانه‌ی سمت چپ یا دهانه‌ی سمت راست گره باشد)

زمان که از رش استفاده می‌کنیم حتماً باید برای بررسی در یک بازه، دیاگرام از دیاگرام دیگر را در نظر بگیریم. چون در غیر این صورت باعث می‌شود که به صورت کسری تقسیم می‌شود و حاصل می‌شود که مسئله را بسیار دشوار می‌کند.

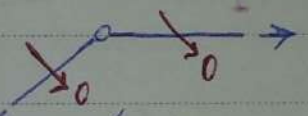
Subject
Date

- برای رسم واکنش های یک گلبی، این خرپا مشابه تیر دهانه مفصلی می باشد.

(نکته: در صورت برش نیروی محوری اعضا را کششی در نظر بگیرید)

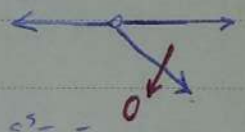
* راه های تشخیص صفر بودن اعضای صفر نیروی در خرپا

راه اول: اگر در یک گره خرپایی دو عضو وارد شود و نیرویی به آن گره وارد نشود و دو عضو هم در یک راستا نباشند، نیروی داخلی در این اعضا صفر است.



راه دوم: اگر سه عضو داشته باشیم که دو تای آن ها در یک راستا باشند و بار به گره وارد نشود. نیروی داخلی عضو غیر هم راستا صفر است.

(در این حالت نیروی داخلی دو عضو هم راستا برابر است)



* گره 2 را هیچ وقت تحت تاثیر بار قرار نمی گیرد چون بار در قسمت پایین است پس L_2 را چون در گره 2 را عضو غیر هم راستا است عضو صفر نیرویی است (یعنی بعد از حذف، مقدار نیروی داخلی L_2 را صفر است.)

نکته: وقتی برش می زنیم باید دو حالت بار قبل از برش و بار بعد از برش را محاسبه کنیم. چون در واقع در حال حذف نیروی داخلی هستیم و اگر برای سری در نظر بگیریم این نیروهای داخلی یکدیگر را خنثی می کنند.

* L_3 و L_3 زمانی که بار بین L_2 و L_4 باشد، عضو صفر نیرویی نیست. عضو L_3 را همواره تحت کشش است و مقدار ماکزیمم آن برابر P است.

- این سازه چون یک سازه ی معین است با حذف هر عضو آن سازه ناپایدار می شود پس نمی توانیم L_2 را حذف کنیم (اعضای صفر نیرویی)
- برای کاربرد اعضای صفر نیرویی کاهش کمانش است (از جمله موارد ظرافت در طراحی است.) (در این سوال L_2 را اگر کمانش کند L_2 را جلوگیری می کند)
- اگر از L_3 تا L_3 را بخواهیم تنها یک عضو یکپارچه استفاده کنیم چون طول آن $2L$ می شود، احتمال کمانش آن 4 برابر می شود. پس باید مقطع را 4 برابر کنیم. به جای این کار از دو عضو با طول L استفاده کرده و یک عضو (عضو دو نیرویی) استفاده می کنیم.

* برای بررسی خرپاها از دو روش گره و روش مقطع استفاده می کنیم.

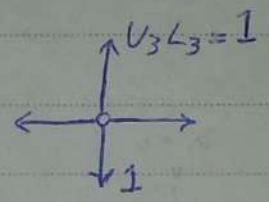
آیا فقط برای نیروهای برشی در نمودار پیوستگی داریم؟ خیر مثلاً گره اتصال برش داشته باشیم کافی است
فرض تأثیر نیروی یکی از میله‌ها نیز باید بسته شود

Subject
Date

نکته ۴:

در صورتی که هدف از تحلیل خرپا به روش برش زدن، نوشتن معادله‌ی لنگر (ΣM) باشد، مقطع مناسب، مقطعی خواهد بود که در آن تمام اعضا غیر از عضو مورد نظر از یک نقطه عبور نمایند.
چنان چه هدف نوشتن معادله‌ی نیرو (ΣF) باشد، مقطع مناسب، مقطعی است که تنها عضو مورد نظر در آن جهت مؤلفه داشته باشد.

برای یافتن U_3L_3:



برای رسم خط تأثیر U_3L_3 در بازه‌ی $2l < x < 4l$، نقطه‌ای وسط را که می‌دانیم بار در آن به صورت کامل به گره L_3 وارد می‌شود، در نظر گرفته و مقدار آن را می‌یابیم و از طریق آن خط تأثیر را کامل می‌کنیم

$x = 3l$

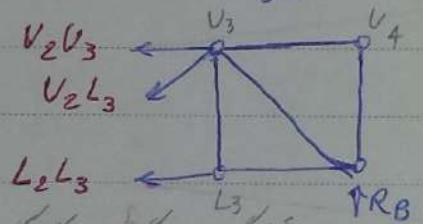
برای یافتن L_2U_3 و L_2L_3 = ? از مقطع استفاده می‌کنیم: (دو حالت را در نظر می‌گیریم)

$0 < x < 2l$
$3l < x < 4l$

و به ازای این دو حالت مقادیر L_2U_3 و L_2L_3 را بدست می‌آوریم.

روش

$0 < x < 2l$



$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow$

$R_B - U_2L_3 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$

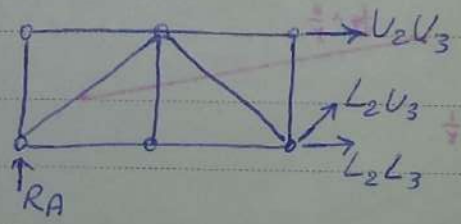
$\boxed{U_2L_3 = \sqrt{2} R_B}$

در بازه‌ی $2l < x < 3l$، بار مرده گره‌ی L_2 و L_3 تأثیری ندارد پس اگر بخواهیم دیاگرام گره چپ یا راست برش را رسم کنیم باید این اثر متغیر را داشته باشیم. به همین خاطر در این بازه بررسی انجام نمی‌دهیم و تنها به دست آوردن مقادیر بدست و وصل کردن آن‌ها بسنده می‌کنیم. (روش نیست قسمت بین دو گره‌ی L_2 و L_3 رسم شود)

$+\circlearrowleft \Sigma M_{U_3} = 0 \Rightarrow L_2L_3 \times l - R_B \times l = 0$

$\boxed{L_2L_3 = R_B}$

$3l < x < 4l$



$\Sigma F_y = 0$

$\Rightarrow L_2U_3 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + R_A = 0 \Rightarrow L_2U_3 = -\sqrt{2} R_A$

دقت شود که جهت معادله در نتیجه بی‌تأثیر است.

$+\circlearrowleft \Sigma M_{U_3} = 0 \Rightarrow R_A \times 3l - L_2L_3 \times l = 0 \Rightarrow \boxed{L_2L_3 = 3R_A}$

(هر کدام که بزرگتر بود)

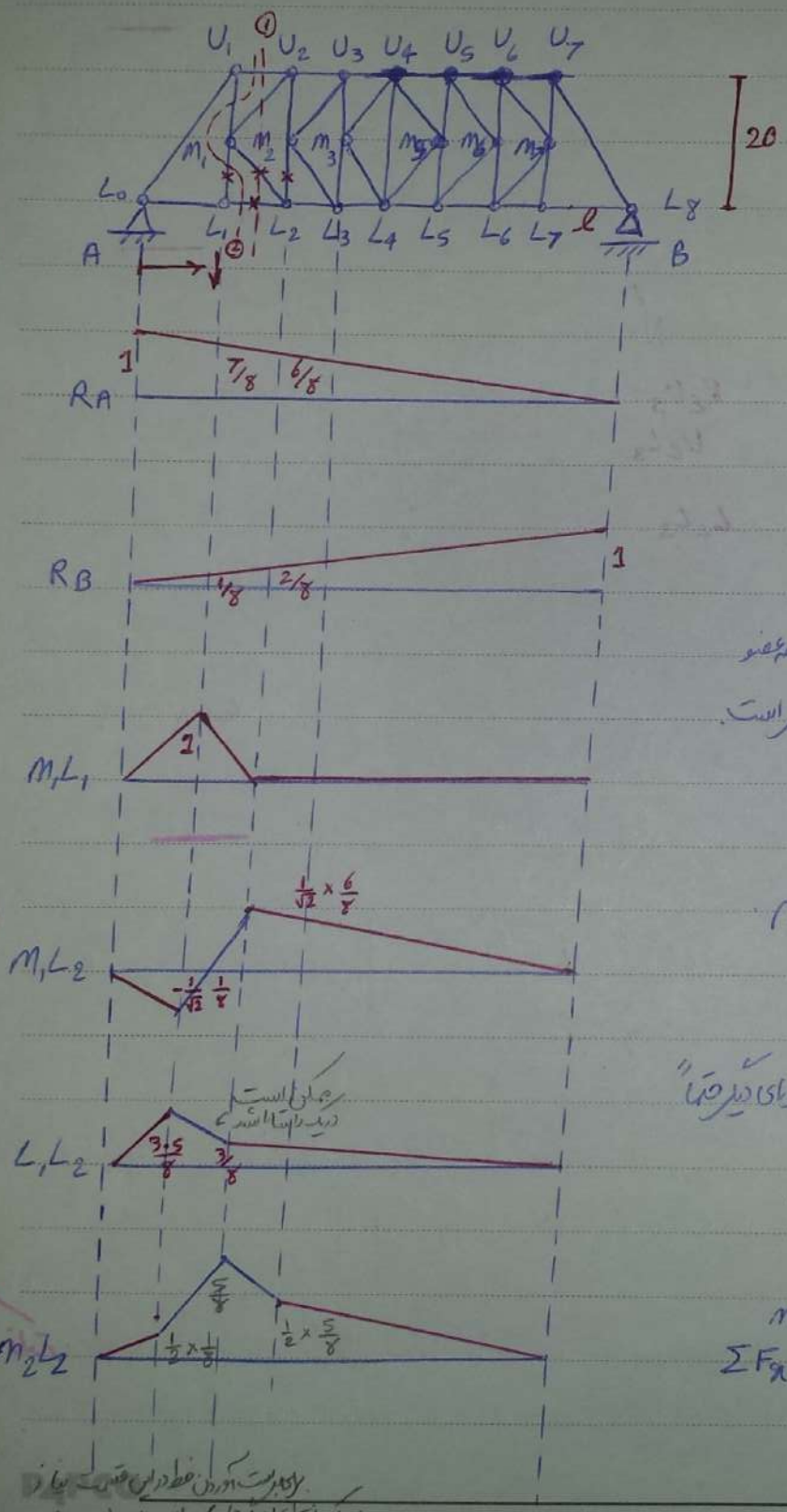
نکته: اگر عضوی کوتاه باشد، کمانش برای آن مهم نیست و آن را از لحاظ مقدار مطلق نیرو بررسی می‌کنیم و فشار برای آن حائز اهمیت می‌شود.
اگر عضو بلند باشد کمانش برای آن حائز اهمیت می‌شود.

ضریب لاغری $\frac{L}{r}$ ← شعاع چرخش

Subject
Date

* هرجا که انتظار تغییر شکل در اثر نیرو داشته باشیم، از مفهوم فنر استفاده می کنیم.

* برای مدل سازی رفتار آب نیز از فنر استفاده می کنیم.



مثال) می خواهیم خط تأثیر برخی از عضوهای این خرپا را بررسی کنیم.

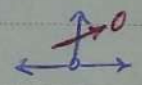
ابتدا خط تأثیر نیروهای تکیه گاهی را رسم می کنیم.

عضوهای علامت گذاری شده را در نظر می گیریم.

اگر گره m_4 داشته باشیم، ناپایدار است

← برای عضو m_1L_1، تا زمانی که بار به گره L_1 وارد نشود، چون سه عضو داریم که دوتای آن ها در یک راستا باشند، خط تأثیر صفر است.

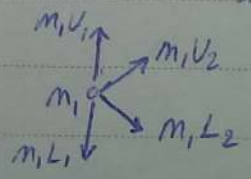
نمودار جسم آزاد:



اگر بخواهیم مابقی خط تأثیر را رسم کنیم، گره L_1 را بررسی می کنیم.

← برای بررسی m_1L_2

4 عضو داریم که دوتا در یک راستا هستند پس بین دوتای دیگر حتماً باید رابطه ای وجود داشته باشد.



$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow m_2U_2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + m_1L_2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$m_1U_2 = -m_1L_2$$

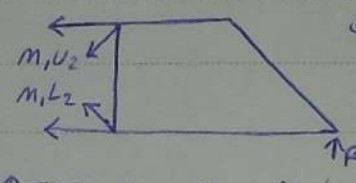
سپس مقطع قائم می زنیم.

برای درست کردن خط در این قسمت باید به یک نقطه دیگر داریم پس بار را در L_2 قرار می دهیم.

Subject
Date

در این صورت با استفاده از برش ① می‌توانستیم L_1L_2 را نیز بدست آوریم

به سمت راست مقطع قائم نگاه می‌کنیم:

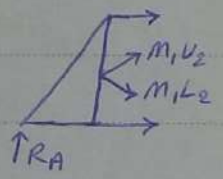


$0<x<l$ اگر بار در این بازه باشد

$$\uparrow \Sigma F_y=0 \Rightarrow R_B+M_1L_2\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\underbrace{M_1U_2}_{M_1L_2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=0$$

$$M_1L_2=-\frac{1}{\sqrt{2}}R_B$$

$2l<x<8l$



$$\Sigma F_y=0 \Rightarrow R_A+\underbrace{M_1U_2}_{-M_1L_2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-M_1L_2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=0$$

$$M_1L_2=\frac{1}{\sqrt{2}}R_A$$

برای بررسی خط تأثیر خرپاها: ۱- ابتدا رسم خط تأثیر نیروهای تکیه‌گاهی (دائم)

2- بررسی این که بین اعضا عضو صفر نیرویی هست یا نه

3- بررسی اعضایی که برای اعمال بار در یک بازه مشخص از حالت صفر نیرویی خارج می‌شوند

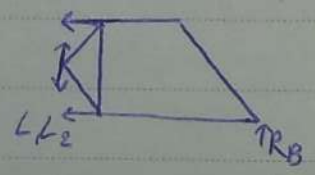
4- استفاده از روش برش گره برای یافتن معادله نیروی داخلی (برش برگره ارجحیت دارد)

روش گره به دو حالت برش برای ΣF یا ΣM (و یا هر دو) بیان می‌شود.

در خرپاها با استفاده از موازنه تعادل گره‌ها می‌توان رابطه‌ای بین اعضا نوشت و به جای استفاده از چندین و از معادل آن‌ها استفاده کرد.

← برای بررسی L_1L_2

از برش مبتنی 2 استفاده می‌کنیم بنابراین محوری دیگر گذرا (لبه) از یک نقطه عبور می‌کند. دو برش داریم.

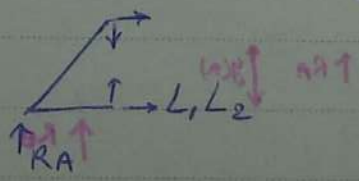


$0<x<l$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_{U_1}=0 \Rightarrow R_B\times 7l-L_1L_2\times 2l=0$$

$$L_1L_2=3.5R_B$$

$2l<x<8l$



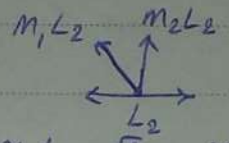
$$+\circlearrowleft \Sigma M_{U_1}=0 \Rightarrow L_1L_2\times 2l-R_A\times l=0$$

$$L_1L_2=\frac{1}{2}R_A$$

Subject
Date

← برای بررسی M_2L_2

$0<x<l$ یا $3l<x<8l$ گره l_2 تنها زمانی که بار در دهانه‌های مجاور آن باشد تحت اثر بار قرار می‌گیرد.

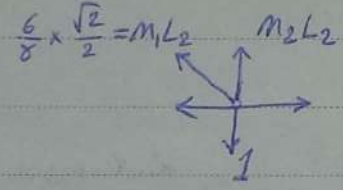


$$\Sigma F_y=0 \Rightarrow M_1L_2\times\frac{\sqrt{2}}{2}+M_2L_2=0$$

$$M_2L_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}M_1L_2$$

برای کامل کردن نمودار و یافتن مقدار نقطه L_2 برای M_2L_2 اگر بار روی L_2 باشد

گاهی تنها با استفاده از یک گره می‌توان رابطه‌ای بین عضوی که خط تأثیر آن را می‌خواهیم و عضوی که خط تأثیر آن را رسم کرده‌ایم پیدا کنیم.



$x=2l$

$$M_2L_2-1+\frac{3}{8}=0$$

$$M_2L_2=\frac{5}{8}$$

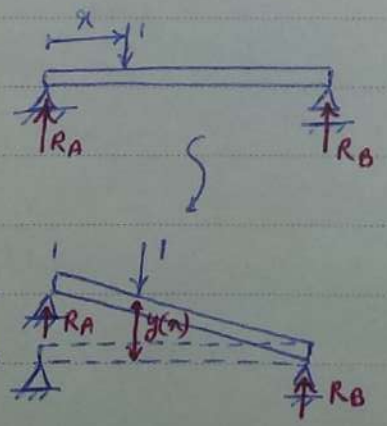
مطالعه مبحث کار مجازی

اصل کار مجازی: (روش دوم برای رسم خط تأثیر)

چنان چه سازه‌ای در حال تعادل باشد و به آن جابه‌جایی مجازی کوچکی اعمال نماییم، کار انجام شده توسط نیروهای داخلی و خارجی برابر خواهد بود.

یعنی هندسه‌ی اولیه سازه جای تغییر می‌کند

هدف: می‌خواهیم با استفاده از اصل کار مجازی، خط تأثیر رسم کنیم.



* سازه در حال تعادل است.

جابه‌جایی مجازی کوچک را در راستای خط تأثیر مورد نظرمان اعمال می‌کنیم.

R_A جابه‌جا شده و R_B جابه‌جا نشده و بار به اندازه $y(x)$ جابه‌جا شده

می‌خواهیم کار را به ازای نیروهای داخلی و خارجی محاسبه کنیم.

Subject
Date آیا می‌توان سازه را غیرصلب فرض کرد؟ یعنی کار نیروهای داخلی و خارجی برابر صفر باشند؟

* کار نیروی داخلی $\int \sigma \varepsilon dV$ ، ε و σ بستگی به مدول الاستیسیته دارند.

* تمام سازه‌هایی که تاکنون بررسی کرده‌ایم، معین بوده‌اند. در سازه‌های معین نیروهای داخلی و واکنش‌های تکیه‌گاهی به جنس ماده بستگی ندارند.

* سازه را صلب فرض می‌کنیم. یعنی مدول الاستیسیته به سمت بی‌نهایت میل کند. سازه که صلب باشد، کرنش آن صفر است پس انرژی کرنشی صفر است. پس کار نیروهای خارجی صفر است (کار نیروهای داخلی نیز صفر می‌شود.)

مهم: هندسه‌ی جدید سازه خط تأثیر سازه است.

کار نیروهای خارجی که برابر کار نیروهای داخلی و برابر صفر است

$$R_A \times 1 - 1 \times y(x) = 0$$

$$1 \times R_A = y(x) \times 1$$

از جنس جابه‌جایی — از جنس نیرو — برای بردارهای دیاگرام

* در کشیدن خط تأثیر به روش کار مجازی، فقط یک عامل باید کار انجام دهد. (در اینجا یا R_A و یا R_B باید کار انجام دهند.)

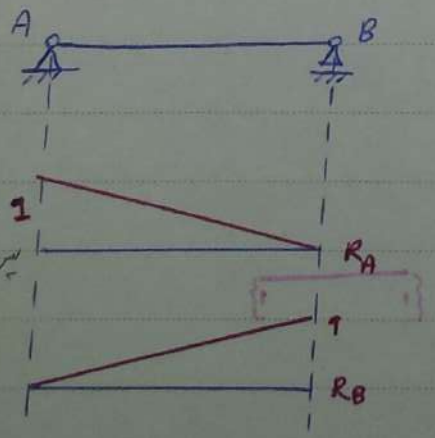
اگر هر دو انجام دهند اشکالی ندارد اما کار ما نمی‌آید چون در آن صورت هندسه‌ی سازه ترکیب خط تأثیر آن دو نیرو می‌شود.

* در جزوه‌ها از این روش برای رسم خط تأثیر استفاده نمی‌شود چون منطقی نیست (نیروهای زیادی جابه‌جا می‌شوند.) از این روش برای تیرها استفاده می‌شود.

از روش کار مجازی برای رسم خط تأثیر تیرها استفاده می‌شود.

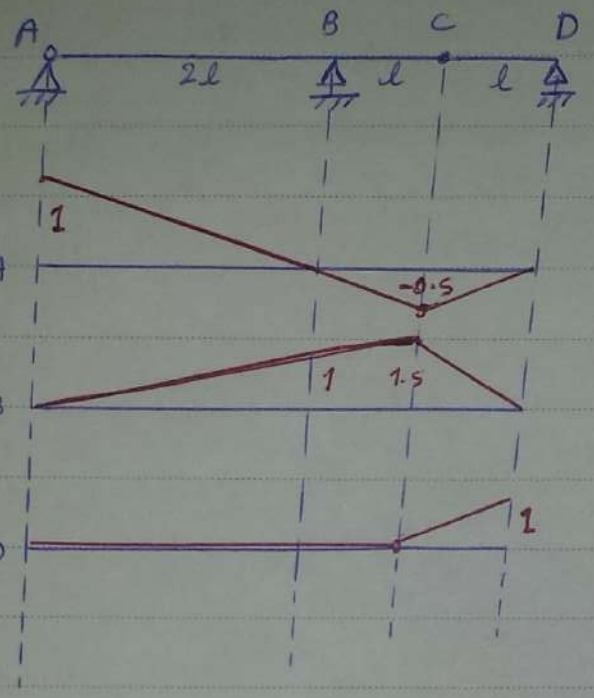
اگر محل اثر نیرو را نیز نشان دهند اشکالی ندارد چون از معادلات حذف شده است.

در روش کار مجازی



خط تأثیر R_A را می‌خواهیم پس R_A را یکی جابه‌جا می‌کنیم.

Subject
Date



مهم: چون فقط یک عامل باید جابه جا شود.

B حق ندارد جابه جا شود ← B جابه جا نمی شود و فقط A جلو می شود

← C می تواند بشکند

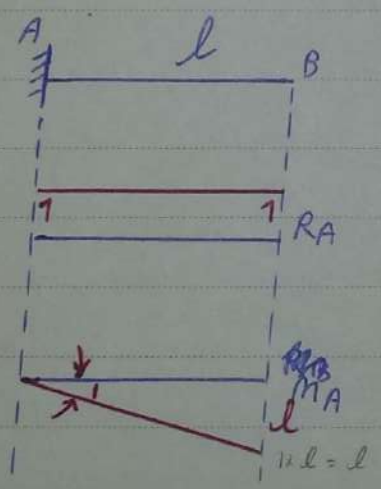
← چون جابه جایی کوچک است، بحث کوتاه بودن سازه مطرح نیست

رسم خط تأثیر با استفاده از بدست آوردن مقادیر نیرو

روش های قبلی برای دریافت مفهوم بود و برای رسم خط تأثیر تیرها از این روش استفاده می کنیم.

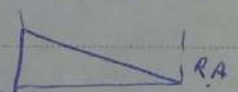
- اگر دو نقطه از یک سازه ثابت بود، کل سازه ثابت می شود. (مثلاً در مثال بالا تیر AC در A و B ثابت است پس کل این تیر ثابت است)

← برای رسم خط تأثیر، به سراغ نقطه ای می رویم که شکل جابه جایی سازه در مورد آن قطعی است.



← این روش برای ترسیم خط تأثیر بار واحد است. (اگر نیرا این بود در آن ضرب می کنیم)

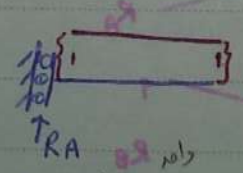
← فقط یک عامل باید کار انجام دهد پس اگر خط تأثیر را به صورت



بکشیم، سازه هم جابه جا شده و هم چرخیده است. پس دو عامل کار انجام داده اند در نتیجه خط تأثیر اشتباه است.

لنگر مثبت به صورت C ساعتگرد است پس سازه در این جهت باید چرخانده شود.

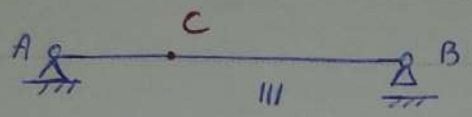
روش دوم: عاملی را که می خواهیم خط تأثیر آن را بکشیم از سازه حذف می کنیم. احتمال خط پایین می آید.



← لنگر در صورتی کار انجام می دهد که 1 را در آن چرخش داشته باشیم پس برای رسم خط تأثیر M_A، A را یک رادیان می چرخانیم.

Subject
Date

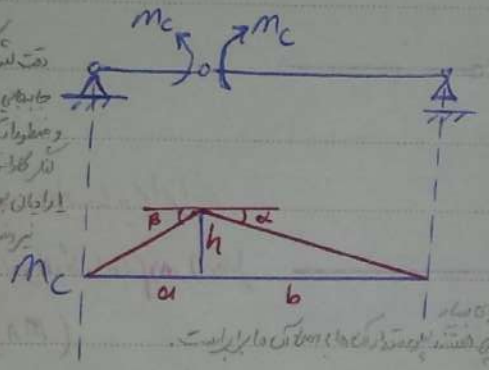
از روش کار مجازی برای رسم خط تأثیر نیروهای داخلی نیز می‌توان استفاده کرد.



در این مثال می‌خواهیم نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی در نقطه‌ی C با استفاده از روش کار مجازی رسم کنیم.

لنگر داخلی را آزاد کرده و به صورت خارجی نشان می‌دهیم.

تا بتواند بچرخاند و برای ما کار انجام دهد.



دقت شود که در روش کار مجازی، جابه‌جایی مجازی اعمال کوچک است و خطوط از یک زاویه چرخش برای این که لنگر کار انجام دهد این است که بتواند از دایره بچرخد و این زاویه خیلی بزرگ نیست

جمع دوران‌ها یک می‌شود.

$\alpha + \beta = 1$

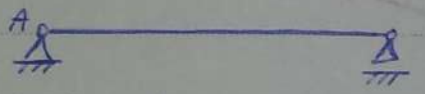
$\alpha = \frac{h}{b}, \beta = \frac{h}{a}$

$\frac{h}{a} + \frac{h}{b} = 1$

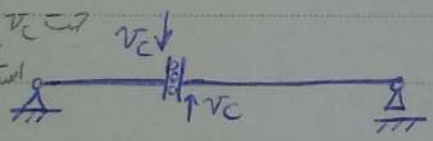
$\Rightarrow h = \frac{ab}{\underbrace{a+b}_{l}} = \frac{ab}{l}$

← اگر بخواهیم خط تأثیر لنگر داخلی در نقطه‌ای را رسم کنیم، آن نقطه را به مفصل تبدیل می‌کنیم.

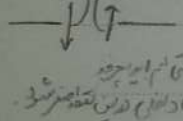
در واقع در این جا می‌خواهیم خط تأثیر آن را بکشیم از سازه حذف می‌کنیم.



جهت V_C ها با فرض $\vec{G}$ است



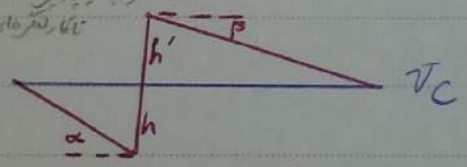
استاتیکی رسم شده‌اند



برای ترسیم خط تأثیر برش، نقطه اتصال تبدیل به هدایت شده می‌شود.

برش سمت چپ سازه را به پایین و برش سمت راست به بالا می‌برد.

چون هدایت شده داخلی است هر چند چپ بچرخد، راستش هم این چرخش تا کار لنگرهای داخلی در این نقطه صفر شود.



دوران دو طرف اتصال هدایت شده برابر است. $|\alpha| = |\beta|$

جمع جابه‌جایی‌ها یک می‌شود. $h + h' = 1$

$\alpha = \frac{h}{a}, \beta = \frac{h'}{b}$

$\frac{h}{a} = \frac{h'}{b} \Rightarrow h' = \frac{b}{a}h$

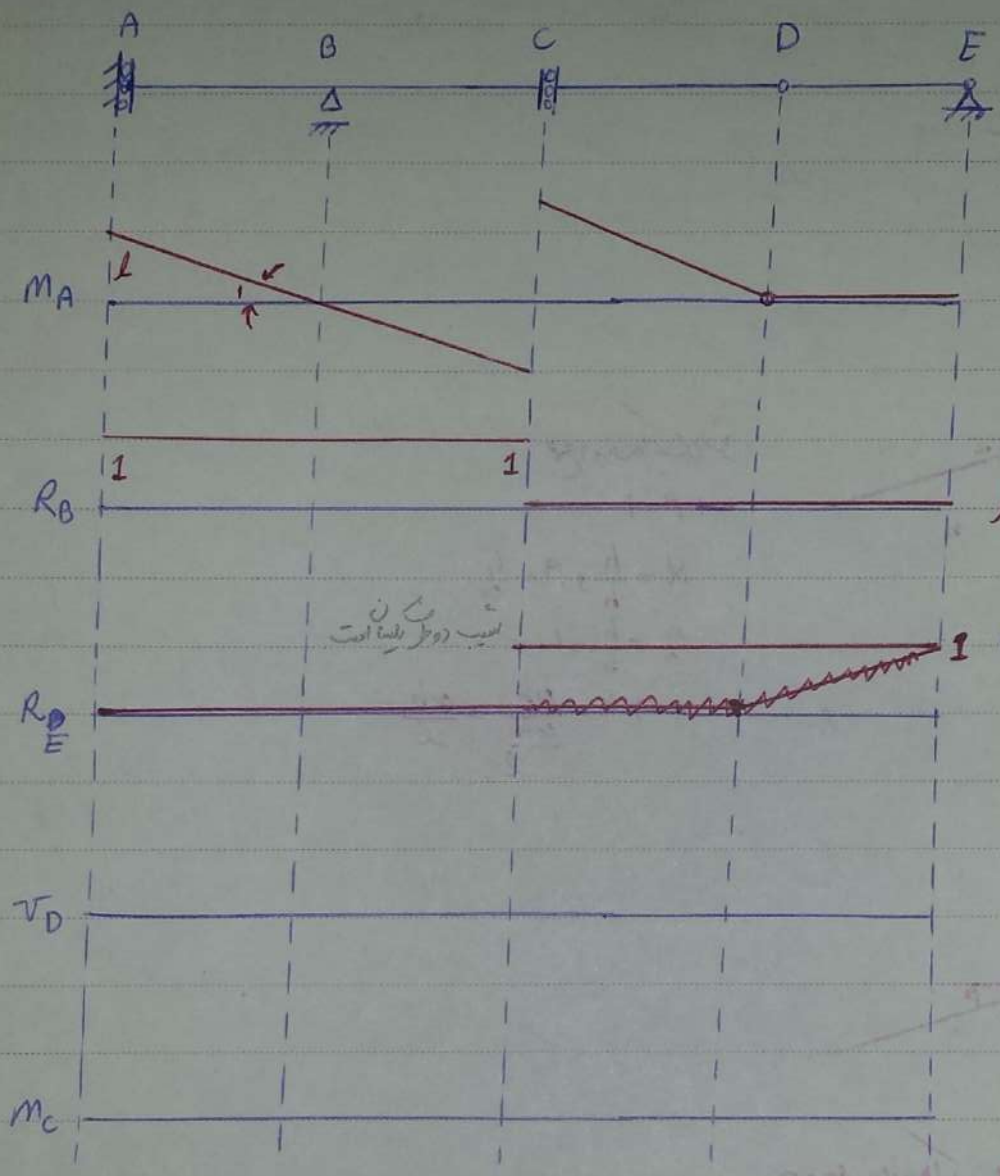
$h + \frac{b}{a}h = 1$

$h = \frac{a}{a+b} = \frac{a}{l}$

دو نکته‌ی مهم در رسم خط تأثیر:
1- یک عامل کار انجام دهد
2- مجموع تغییر شکل‌ها یک می‌شود.

Subject
Date

غلط) سازه ناپایدار است.



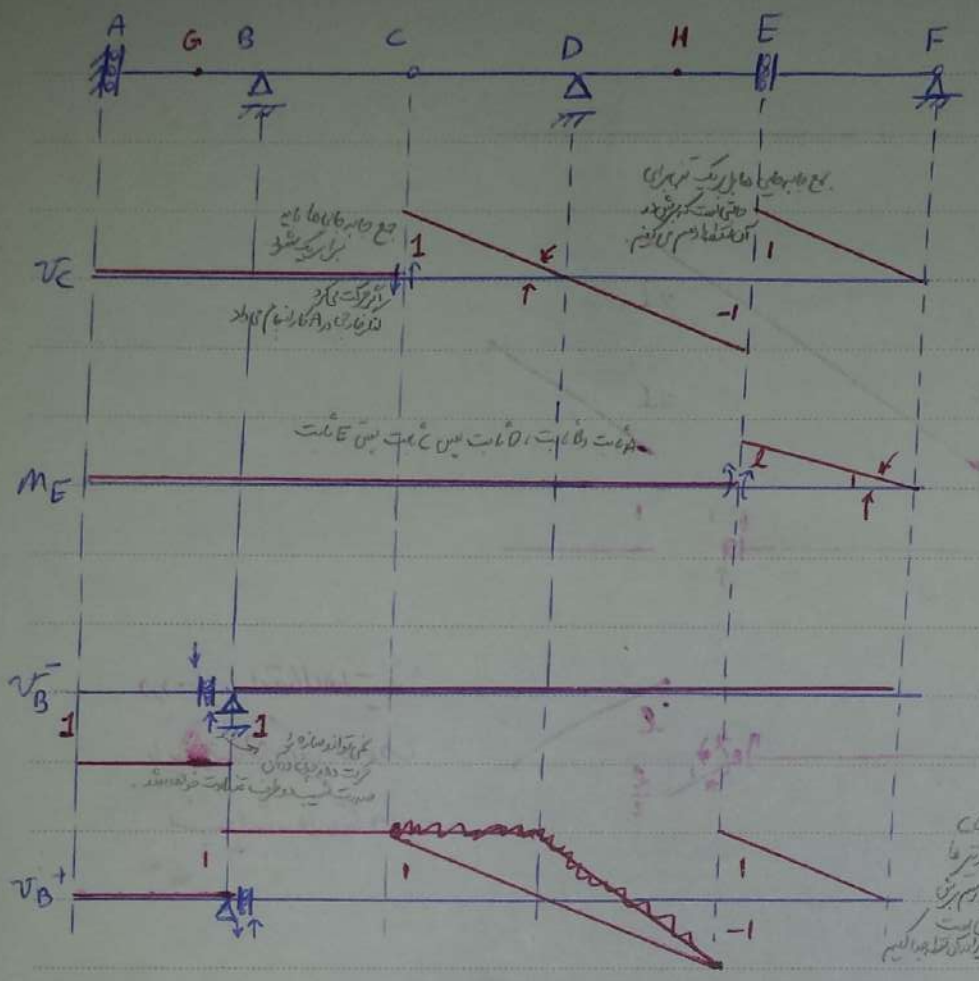
M_A زمانی کار انجام می‌دهد که یک واحد جابجا شود.

در نقطه‌ای شیب دو طرف باید برابر باشد.

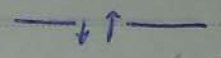
R_A نداریم که بخواهد کار انجام دهد (به خاطر جابه‌جایی دورانی M_A)

برای ثابت کردن سازه یا باید دو نقطه از آن ثابت باشد یا یک نقطه از نظر چرخشی صفر داشته باشد.

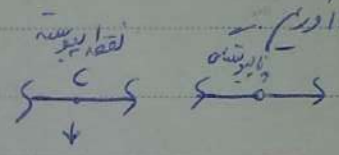
Subject
Date

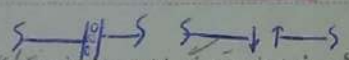


- برای رسم خط تأثیر برش در نقطه‌ی C، چون نقطه‌ی C یک مفصل است و قابلیت دوران دارد، به جای تکیه‌گاه برشی داخلی، دو نقطه را از هم جدا کرده و به صورت



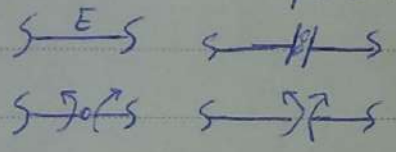
در می‌آوریم.





تکیه‌گاه برشی داخلی توانایی تحمل لنگر را دارد، اما ما از هر دو نقطه‌ی C مفصل در نظر گرفتیم پس نیازی به استفاده از این نوع تکیه‌گاه برشی نیست در غیر ما اما با تیرهای معمولی بسیار ناکارآمد است پس برای رسم برش کافی است تیر را لنگر نقطه جدا کنیم

- در کشش لنگر در نقطه‌ی هدایت شده باید عامل خمش را کم کنیم پس دو نقطه را جدا می‌کنیم.



در اتصال هدایت شده داخلی چرخش وجود ندارد و تنها باید به مساوی بودن شیب دو طرف توجه شود اما برای هدایت شده‌ها مانع چرخش هم هست.

در بررسی تکیه‌گاه‌ها، نیروی برشی را در سمت چپ و سمت راست تکیه‌گاه به صورت جداگانه بررسی می‌کنند چون واکنش تکیه‌گاهی یک نیروی متمرکز است و در برش ایجاد اختلال می‌کند.

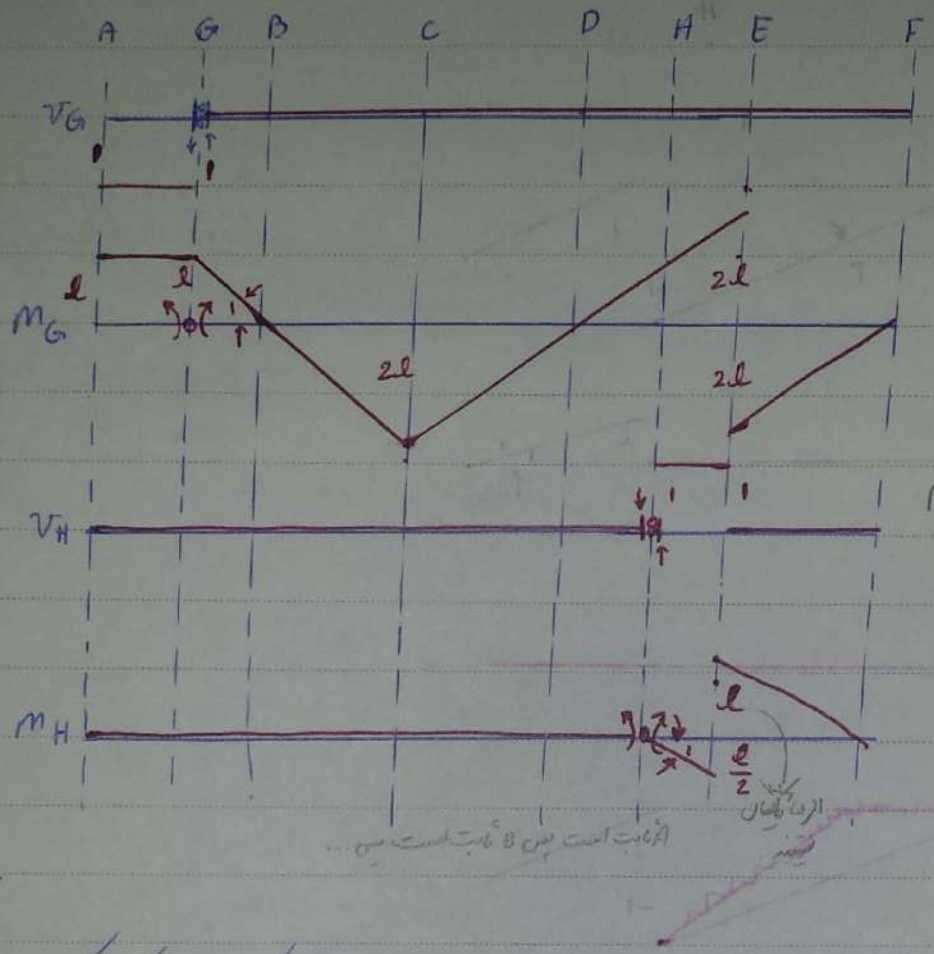
نیروی برشی سمت راست نمی‌تواند حرکت کند اما می‌تواند بچرخاند و سمت چپی می‌تواند حرکت کند.

شیب سمت چپی صفر است و اگر سمت راستش بچرخد شیب را به هم زده و شیب دو طرف غیر یکسان می‌شود. پس با توجه به این تناقض نمی‌توان هم حرکت و هم دوران داشت

در اتصال هدایت شده به شیب دو طرف توجه شود.

برای v_B^+: سمت چپی نمی‌تواند بچرخاند چون A مانع می‌شود.

Subject
Date



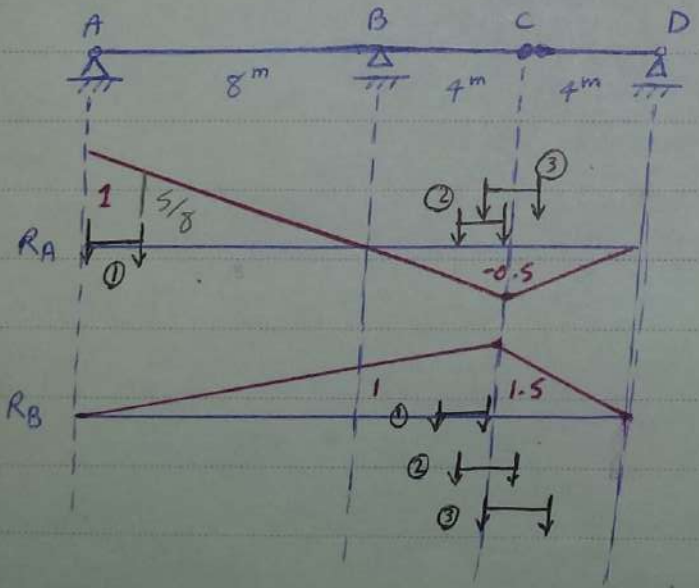
اگر در V_G ، سمت راستی بچرخاند سازه را بچرخاند شیب به هم می‌خورد.

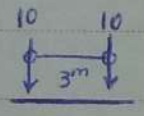
اگر لنگر سمت چپ می‌تواند سازه را بچرخاند خیر پس باید لنگر سمت راست سازه را بچرخاند.

دقت: زمانی که می‌خواهیم لنگر داخلی در یک نقطه را بدست آوریم، آن نقطه را تبدیل به مفصل می‌کنیم در این صورت خط تأثیر در این نقطه پیوسته خواهد بود (می‌تواند شکستگی داشته باشد.)

در دو طرف اتصال هدایت شده باید توجه‌مان به یکسان بودن شیب باشد و نه مقادیر.

- گاهی ممکن است با بارهای متحرک روبرو باشیم. مثلاً تریلی 7 محور دارد و 7 بار وارد می‌کند. مثلاً یک تانک یک بار گسترده است (از طریق زنجیرآن)





مثل یک خودرو

دو حالت داریم:

1- براساس موقعیت بار، رابطه بنویسیم.

2- یک سری حالت اجرایی در نظر بگیریم. و نقاط مشکوک را بررسی کنیم.

برای حالتی که یک است بار متحرک با مقدار غیر از یک داریم هم ابتدا خط تأثیر نیروهای تکیه‌گاهی را رسم می‌کنیم (به ازای همان مقدار واحد استاندارد)

Subject
Date

می خواهیم حالتی که R_A به ازای این دسته بار متحرک، بیشترین مقدار دارد را از طریق خط تأثیر بیابیم. بررسی نقاط مشکوک

دسته بار متحرک را در موقعیت هایی که فکر می کنیم ایجاد بیشترین مقدار نیرو را می کند قرار می دهیم سپس از طریق جمع حاصل ضرب های هر بار در مقدار خط تأثیر به ازای آن بار مقدار نیرو را می یابیم

$$R_A^+ = 10\times1 + 10\times\frac{5}{8}$$ حالت ①

حالت 2 و حالت 3 برابرند (بر اساس خط تأثیر) (شیب های دو طرف برابرند)

$$R_A^- = 10\times0.5 + 10\times\frac{1}{4}\times0.5$$ ②

R_B همواره مثبت است. سه حالت برای مجاورت نقطه 1.5 در نظر می گیریم. حالت 1 درست است چون هر چه شیب کمتر باشد مقدار بیشتر است.

$$R_B^+ = 10\times1.5 + 10\times\frac{9}{12}\times1.5$$ ①

چون سازه مصیب است و دفعات می توان برای هر کدام از بارها خط تأثیر را رسم کرد و با هم جمع کرد.

خیز تیر — تغییر شکل سازه ها

* تغییر شکل سازه را محاسبه می کنیم چون:
چون هر سازه ای باید تغییر شکل در محدوده ی مجاز داشته باشد.

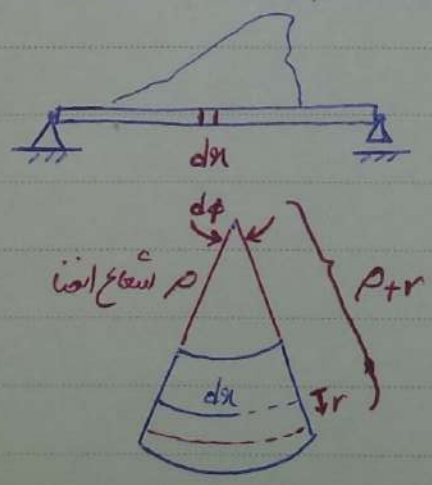
* محدوده ی مجاز تغییر شکل را قضاوت ها یا آیین نامه (rule) تعیین می کند. (سازه های عمومی بر اساس آیین نامه ساخته می شوند)

* روش انتگرال گیری فقط برای سازه های خمشی است. در نهایت آن را برای سازه های غیر خمشی بسط می دهیم.

اولین روش برای بررسی تغییر شکل سازه روش انتگرال گیری است

سازه ی خمشی: سازه ای که دارای لنگر دلتا است.

یک تیر دو سر مفصل مشابه تیر روبه رو را در نظر می گیریم و المان dx را در نظر می گیریم.



تغییر شکل را اغراق آمیز رسم کرده ایم.

هر المانی، یک تار خنثی دارد (در اینجا به طول dx)

ρ شعاع انحنا برابر است با فاصله ی مرکز انحنا تا تار خنثی

r: فاصله ی هر تار تا تار خنثی

$$\varepsilon = \frac{(\rho+r)d\phi - \rho d\phi}{\rho d\phi} = \frac{r}{\rho}$$ کرنش

با داشتن شعاع انحنا و فاصله از تار خنثی برای هر تار $\varepsilon = \frac{r}{\rho}$

Subject
Date

از مقاومت مصالح:

$$\sigma = \frac{Mr}{I} \qquad \varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{Mr}{EI} \qquad \varepsilon = \frac{r}{\rho}$$

$$\frac{r}{\rho} = \frac{Mr}{EI}, \quad \underbrace{\frac{M}{EI}}_{\text{سفتی خمشی}} = \frac{1}{\rho}$$

از خواص مصالح سازه → سختی
از خواص مقاطع سازه → سختی هندسه x سختی

در هر نقطه اگر لنگر خمشی و سفتی خمشی (EI) را داشته باشیم می توان شعاع انحنا را بدست آورد.

در سختی طول سازه و ابعاد سازه دخالت می کند.

$$\Delta = \frac{PL}{EA}$$ سختی محوری

$$P = \frac{EA}{L}\Delta$$ سختی محوری

$$\text{شعاع انحنا} \quad \rho = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}$$

curvature

← انحنا برابر معکوس شعاع انحنا ($\frac{1}{\rho}$) می باشد.

تعریف انحنا: میزان تغییرات زاویه ی خطوط مماس بر منحنی در واحد طول (میزان چرخش منحنی تقسیم بر میزان طولی که این چرخش در آن اتفاق افتاده است.) (تغییرات زاویه در واحد طول)

$$\frac{1}{\rho} = K = \frac{d\phi}{ds}$$

$$\frac{M}{EI} = \frac{1}{\rho} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$$

← با فرض تغییر شکل های کوچک، مسائل را حل می کنیم.

تغییر شکل کوچک $y'^2 = 0$

$$\Rightarrow \frac{M}{EI} = y''$$

از جهت بارگذاری و اندازه ی سازه

رابطه ی پایه ای در تئوری آنالیز سازه ها

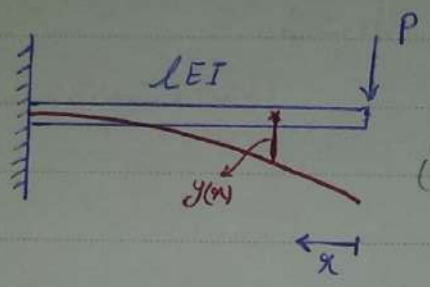
اگر جهت مثبت محور قائم رو به بالا باشد

اگر جهت مثبت رو به پایین باشد: $-\frac{M}{EI} = y''$

Subject
Date

می‌خواهیم با استفاده از روش انتگرال‌گیری معادله خیز تیر را بدست آورده و جابه‌جایی و زاویه نقاط مهم را بررسی کنیم.

مثال) برای استفاده از فرمول $\frac{M}{EI} = y''$



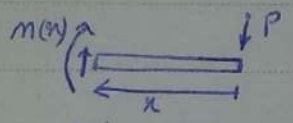
ابتدا باید فرمول M را برحسب x بنویسیم.

(در روش انتگرال‌گیری، اولین قدم محاسبه M برحسب x یعنی M(x) است)

اگر از سمت چپ بگیریم لنگر تکیه‌گاه را هم بنویسیم

به همین خاطر از سمت راست می‌نویسیم.

جهت لنگرها را براساس قوانین استاتیک می‌نویسیم.



$$M(x) = -Px$$

$$y''(x) = \frac{-Px}{EI} \quad , \quad y'(x) = -\frac{1}{2}\frac{P}{EI}x^2 + C$$

$\frac{M}{EI} = y''$ را در معادله بدست آمده قرار می‌دهیم

شرط‌های مرزی در نقطه گیردار: در این نقطه شیب‌ها و جابه‌جایی‌ها (y) صفر هستند.

برای یافتن ثابت از شرایط مرزی استفاده می‌کنیم.

دو نوع شرط مرزی داریم: B.C یا I.C

بحث زمان مطرح باشد

این شرط مدنظر ماست.

$$B.C \quad y'(x=l) = 0 \Rightarrow 0 = -\frac{1}{2}\frac{P}{EI}l^2 + C$$

$$C = \frac{Pl^2}{2EI}$$

$$y'(x) = -\frac{1}{2}\frac{Px^2}{EI} + \frac{1}{2}\frac{Pl^2}{EI}$$

$$y(x) = -\frac{1}{6}\frac{Px^3}{EI} + \frac{1}{2}\frac{Pl^2}{EI}x + C$$

شرایط مرزی $B.C \quad y(x=l) = 0 \Rightarrow 0 = -\frac{1}{6}\frac{Pl^3}{EI} + \frac{1}{2}\frac{Pl^3}{EI} + C \Rightarrow C = -\frac{1}{3}\frac{Pl^3}{EI}$

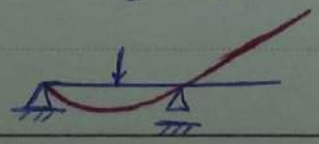
$$y(x) = -\frac{1}{6}\frac{Px^3}{EI} + \frac{1}{2}\frac{Pl^2}{EI}x - \frac{1}{3}\frac{Pl^3}{EI}$$

در بحث تغییر شکل، عمدتاً به دنبال تغییر شکل ماکزیمم هستیم. برای یافتن آن مقدار تابع را در ابتدا و انتها و نقاطی که مشتق (شیب) برابر صفر می‌شود را محاسبه کنیم.

در روش انتگرال‌گیری برای یافتن تغییر شکل ماکزیمم تنها از بدست آوردن y(x) مقدار تابع را در ابتدا و انتها و نقاطی که مشتق (شیب) برابر صفر می‌شود محاسبه می‌کنیم.

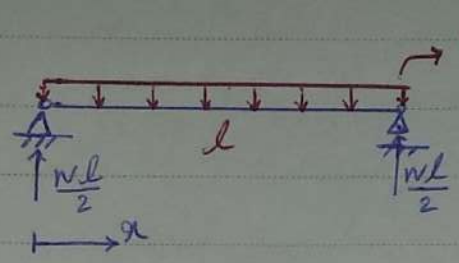
از طریق شکل ساده می‌توان برخی از این حالات را از ابتدا حذف کرد.

این شکل بیانگر این است که الزاماً نقطه وسط دهانه تغییر شکل ماکزیمم تیر را ندارد



Subject
Date

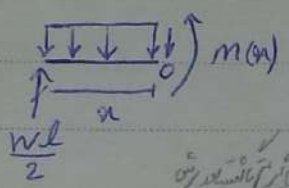
مثال)



سازه‌ی متقارن تحت بار متقارن

نصف بار سمت چپ و نصف سمت راست.

فاصله مرکز ثقل × مقدار بار گسترده = لنگر بار گسترده



$$\left(\sum M_o = 0 \Rightarrow M(x) + wx \times \frac{x}{2} - w\frac{L}{2} \times x = 0\right.$$

نسبت به نقطه‌ی O می‌گیریم تا تنش‌ها برش را حذف کنیم

$$M(x) = \frac{1}{2} wlx - w\frac{x^2}{2}$$

$$y''(x) = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}wlx - w\frac{x^2}{2}\right)$$

$$y'(x) = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{4}wlx^2 - \frac{1}{6}wx^3 + c\right)$$

$$y(x) = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{12}wlx^3 - \frac{1}{24}wx^4 + cx + C_2\right)$$

می‌توانستیم از تقارن استفاده کنیم

$y(x=0) = y(x=l)$

یا نقطه‌ی دیگری و تشابه مثلث‌ها و معادله و دو مجهول

$$y(x=0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

شرط مرزی برای تکیه‌گاه مفصلی و غلتکی

$y = 0$

$$y(x=l) = 0 \Rightarrow \frac{1}{12}wl^4 - \frac{1}{24}wl^4 + cl = 0$$

$$c = -\frac{wl^3}{24}$$

$$y(x) = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{12}wlx^3 - \frac{1}{24}wx^4 - \frac{1}{24}wl^3x\right)$$

اگر چند بار داشته باشیم (نوع بارگذاری) داشته باشیم، این روش روش خوبی نیست.

یا چند دهانه

روش انتگرال‌گیری در صورتی که چند بار و یا چند دهانه (نوع بارگذاری) داشته باشیم، روش مناسبی نیست

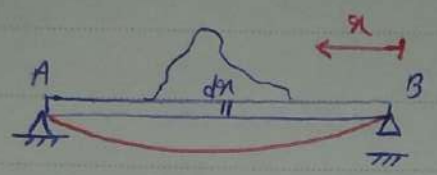
Subject
Date

در این روش برای بررسی تغییر شکل سازه ها، روش لنگر سطح است.

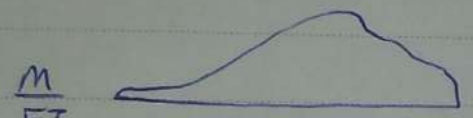
روش لنگر سطح (moment-area)

راهی ساده تر از راه انتگرال گیری که از طریق دو قضیه اصلی آن می توان به بررسی تغییر مکان ها و هم پرداخت و مقدار تغییر شکل و زوایای آن ها را یافت و شکل خیز تیر را یافت و نقاط بحرانی را هم بدست آوریم

برای بدست آوردن فرمول از تیر دو سر مفصل استفاده می کنیم و سپس از فرمول آن برای سایر سازه ها استفاده می کنیم

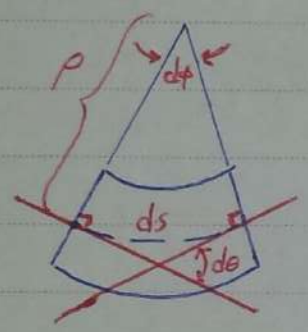


هر سازه ی خمشی یک نمودار لنگر دارد.



منحنی $\frac{M}{EI}$ بیانگر انحنای تیر در هر نقطه ای مزبور می است. $(\frac{1}{\rho})$

نمودار لنگر را بر EI تقسیم می کنیم پس برابر $\frac{1}{\rho}$ می شود و در نتیجه به آن منحنی انحنا می گویند.



می خواهیم این نمودار را به تغییر شکل هندسی سازه و به تغییر شکل اتکایی (به صورت مقایسه ای) ربط دهیم.

زاویه dθ زاویه بین مماس ابتدا و انتهای المان مورد مطالعه (dx) است.

طول تار خنثی : ds

زوایای dφ و dθ برابرند.

چهارضلعی محدب: چهارضلعی که اگر اضلاعش را ادامه دهیم اضلاع دیگر را قطع نکند

تار خنثی به علت این که تنش ندارد، تغییر طول هم ندارد.

طول اولیه المان — طول تار خنثی

$$ds = dx$$

$$d\phi = d\theta$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} = \frac{d\phi}{ds} = \frac{d\theta}{dx}$$

تغییر زاویه بر روی طولی که انحنا در آن اتفاق افتاده است.

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{EI} \Rightarrow \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta = \int_{x_1}^{x_2} \frac{M}{EI}\, dx$$

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{M}{EI}\, dx = A_{M(x_1 - x_2)}$$

قضیه اول لنگر سطح

تغییر زاویه بین مماس زیر منحنی $\frac{M}{EI}$ در آن فاصله از x_1 تا x_2

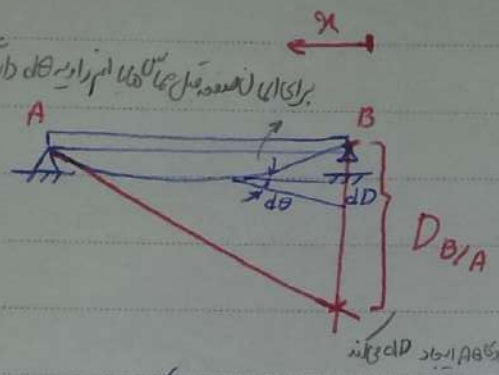
Subject
Date

قضیه اول لنگر سطح: تغییرات زاویه و نه خود زاویه را به ما می‌دهد.

این رابطه تغییرات زاویه را به ما می‌دهد و نه خود زاویه.

باید این تغییرات را به خود زاویه ربط دهیم که نسبت به هندسه مسئله است.

اگر در نقطه‌ی A بعد از تغییر شکل مماس رسم کنیم



(فرض بر این که در اینجا صفر است)

$D_{B/A}$: فاصله‌ی نقطه‌ی B از مماس رسم شده در نقطه‌ی A

قضیه دوم لنگر سطح

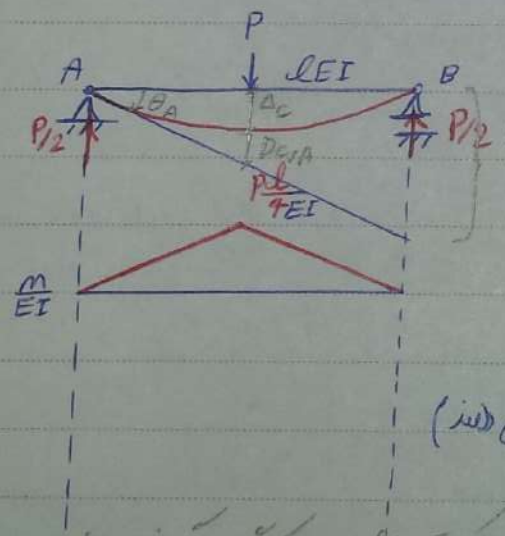
$$D_{B/A} = \int_A^B dD = \int_A^B x \times d\theta = \int_A^B \frac{M}{EI} x \times dx = A_{M(A-B)} \times \bar{x}_B$$

چون این‌ها حرکت می‌کنیم tan زاویه با خود زاویه برابر است

تغییر هندسی این فرمول گشتاور اول سطح می‌شود.

$\bar{x}$ نسبت به نقطه‌ای که داریم تغییر شکلش را محاسبه می‌کنیم محاسبه می‌شود.

این رابطه هم به طور مستقیم به خیز مربوط نیست (ولی از جنس طول است)



مثال) در روش لنگر سطح نیاز داریم که هندسه‌ی تغییر شکل سازه را رسم کنیم (برخلاف روش لنگر آلاری که پاسخ نهایی به ما هندسه نهایی سازه را می‌دهد)

در روش لنگر سطح حل ما بر اساس هندسه‌ی تغییر شکل سازه می‌باشد تا بتوانیم از تغییر زاویه‌ها آن‌ها استفاده کنیم.

هندسه تغییر شکل سازه:

① بستگی به تکیه‌گاه‌ها دارد (بعضی از نقاط باید به شکل خاصی تغییر شکل دهند)

② و بارهای لنگر ایجاد شده)

برای رسم هندسه‌ی تغییر شکل سازه باید به دو فاکتور توجه داشت: نوع تکیه‌گاه و لنگر داخلی ایجاد شده بر اثر بارها

(لنگر مثبت ← انحنای خیز مثبت (تقعر مثبت))

(لنگر منفی ← انحنای خیز منفی (تقعر منفی))

دقت شود که اگر M صفر باشد به این معنا نیست که شیب در آن صفر است (بالکن) به این معناست که این نقطه انحنا ندارد ولی می‌تواند شیب داشته باشد

برای رسم نمودار لنگر:

A و B مفصل هستند پس لنگر آن‌ها صفر است. (البته اگر لنگر متمرکز داشتیم باید آن را در نظر بگیریم)

در نقطه‌ی A و B که لنگر صفر است پس تنها نقطه‌ای این را فلان کننده در نمودار لنگر، محل اثر بار است.

Subject
Date

در روش لنگر سطح $D_{B/A}$ یعنی تغییر مکان خواسته‌ی اصلی ما نیست بلکه ارتباط مفید هندسی برای حل مسئله است

وقتی بار گسترده نداریم مقدار برش ثابت و نمودار لنگر خطی است.

حال نمودار را بر EI تقسیم می‌کنیم (چون بر عدد ثابت تقسیم شده نمودار تغییر نمی‌کند)

برای فهمیدن شکل کیفی تغییر اندازه (به خاطر کیفی است)

تغییر شکل در نقاط ابتدا و انتها صفر است و بر اساس لنگر مثبت، تنها به یک صورت می‌توانیم تغییر شکل داشته باشیم

یک مماس در نقطه‌ی A می‌کشیم (می‌خواهیم تغییر شکل را نسبت به یک نقطه محاسبه کنیم)

$$D_{B/A} = A_{m(A-B)} \times \bar{x}_B$$
$$= \frac{1}{2} l \times \frac{Pl}{4EI} \times \frac{l}{2} = \frac{Pl^3}{16EI}$$

به خاطر منفی بودن θ_A

حال می‌توانیم θ_A را تعریف کنیم. (θ_A در واقع شیب خیز در نقطه‌ی A یا همان i_A است)

$$\theta_A = -\frac{D_{B/A}}{l} = -\frac{Pl^2}{16EI}$$

(چرا از نسبت زاویه بین مماس اول و آخر)

چون تغییر شکل بسیار کوچک است $\tan\theta$ که برابر شیب است با θ برابر است.

θ_A منفی است چون جهت چرخش آن ساعتگرد است.

با استفاده از قضیه‌ی اول لنگر سطح θ

با دست آوردن θ_A می‌توانیم نقطه‌ی A را مبنا قرار دهیم و سایر نقاط را بر حسب آن بدست آوریم.

$$\theta_B - \theta_A = A_{m(A-B)}$$

$$\theta_B - \left(-\frac{Pl^2}{16EI}\right) = \frac{1}{2} l \times \frac{Pl}{4EI}$$

$$\theta_B = \frac{Pl^2}{16EI}$$

(جهت چرخش θ_B پادساعتگرد است پس مثبت است)

قدر مطلق

به خاطر متقارن بودن سازه و بارگذاری انتظار داریم θ_A و θ_B برابر باشند

مثبت و منفی به خاطر جهت است

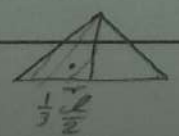
تا اینجا θ_A و θ_B را بدست آوردیم (به خاطر شرایط یکسان A و B از ابتدا می‌دانستیم که جابه‌جایی آن‌ها صفر است.)

حال باید ماکزیمم جابه‌جایی را بدست آوریم. این اتفاق در جایی که شیب صفر می‌شود رخ می‌دهد.

$$D_{C/A} = A_{m(A-C)} \times \bar{x}_C = \frac{1}{2} \times \frac{l}{2} \times \frac{Pl}{4EI} \times \frac{1}{3} \times \frac{l}{2} = \frac{Pl^3}{96EI}$$

(راه اول برای بدست آوردن A_c)

کرنل تا نقطه C



Subject
Date

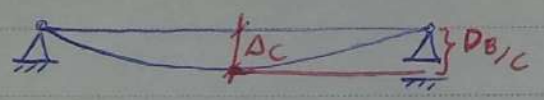
در این مثال ما از این که نقطه‌ی C، نقطه‌ی جابه‌جایی ماکزیمم است به خاطر هندسه‌ی ساده‌ی سازه مطلع بودیم.

دقت شود که هنگامی که می‌خواهیم با روابط هندسی کار کنیم با قدر مطلق ها کار داریم. مثبت و منفی مربوط به تحلیل سازه است.

$$\left|\frac{1}{2} D_{B/A}\right| = |\Delta_C| + |D_{C/A}| \Rightarrow \frac{1}{32}\frac{Pl^3}{EI} = |\Delta_C| + \frac{Pl^3}{96EI}$$

$$|\Delta_C| = \frac{Pl^3}{48EI}$$

روش دوم برای محاسبه Δ_C) اگر از نقطه‌ی C که شیب صفر است بخواهیم مماس رسم کنیم مماس آن افقی می‌شود. حال $D_{B/C}$ را محاسبه می‌کنیم.

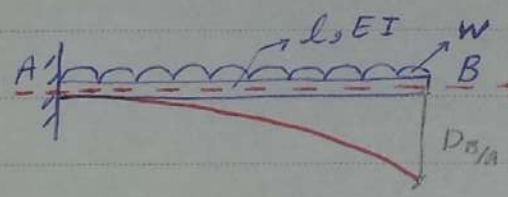


نقطه‌ی تغییر شکل ماکزیمم، دارای $\theta = 0$ است

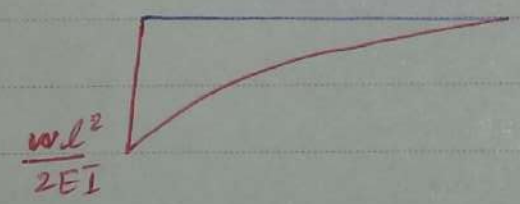
$$|\Delta_C| = |D_{B/C}| = \left|\frac{1}{2}\frac{l}{2} \times \frac{Pl}{4EI} \times \frac{2}{3} \times \frac{l}{2}\right| = \frac{Pl^3}{48EI}$$

مثال) بار گسترده‌ی یکنواخت داریم (یعنی: $\boxed{\text{WWW}}$)

می‌خواهیم تغییر شکل را بررسی کنیم یعنی نقاط کلیدی و مهم را بررسی کنیم



برای این کار باید نمودار لنگر بکشیم.



لنگر و برش در انتهای آزاد صفر است مگر این که لنگر و برش متمرکز داشته باشیم.

شیب نمودار لنگر برابر است با مقدار برش (نه شیب برش) $\frac{dM}{dx} = V(x)$

مشتق دوم منحنی لنگر برابر بارگذاری است و چون در اینجا بار منفی است پس انحنا به سمت پایین است.

$$\frac{d^2M}{dx^2} = q(x)$$

دقت شود که در هر دو روش انتگرال گیری و لنگر سطح بارگذاری باید نمایش داده شود

Subject
Date

در این سئوال دقت شود که $D_{B/A}$ ضرب است

گشتاور منفی

در نقطه‌ی A

با شیب صفر و انحنای منفی ← بدست آوردن تغییر شکل سازه

دقت شود که مساحت منفی در قضایای اول و دوم لنگر سطح لحاظ شود

$$\theta_B - \cancel{\theta_A}^{\,0} = A_{m(A-B)} = \frac{1}{3} \times \frac{-wl^2}{2EI} \times l = -\frac{wl^3}{6EI}$$

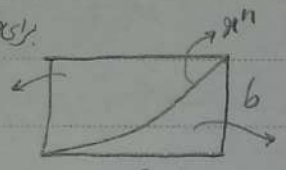
در اینجا اگر قدر مطلق هم نباشد اشتباه درست بود.

برای محاسبه ضرب و تغییر شکل در نقطه B : $|\Delta_B| = |D_{B/A}|$ هندسه مسئله این رابطه را به ما تحمیل کرده است

برای هست بیشتر

$\frac{n}{n+1}ab$

(فاصله‌ی مرکز ثقل بخش بزرگتر درج نشده است)



$A = \frac{1}{n+1}ab$

$\frac{1}{n+2}a$ (فاصله‌ی مرکز ثقل بخش کوچکتر از راست)

مرکز ثقل منحنی درجه 2 نسبت به رأس $\frac{1}{4}$ و نسبت به قاعده $\frac{3}{4}$

$$|\Delta_B| = |D_{B/A}| = \left|-\frac{wl^3}{6EI} \times \frac{3}{4}l\right| = \frac{wl^4}{8EI}$$

لنگر قطعاً صفر

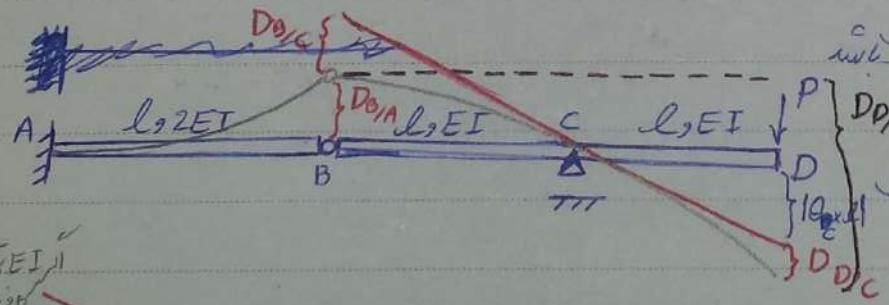
می‌تواند لنگر داشته باشد

در مفصل داخلی حتماً لنگر صفر است

- تا اینجا دو مثال تیر یک دهانه را بررسی کردیم

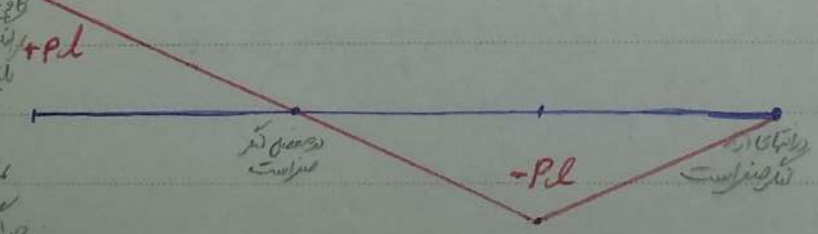
مثال ۱

EI می‌تواند در طرفین و یا طول متفاوت باشد ?



گام اول کشیدن نمودار لنگر است

اگر EI تمام بخش‌ها یکسان بود کافی است دو ضلع نمودار لنگر در صورت ما EI باید از این آن‌ها ضرب شود. صورت نمودار $\frac{M}{EI}$ باید دوباره رسم شود.

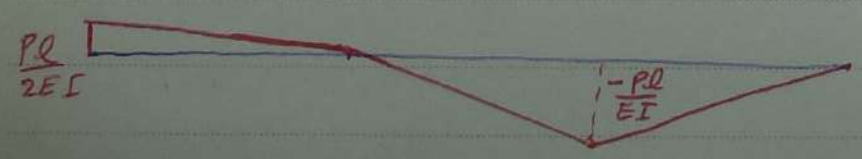


برای فهمیدن لنگر، در آن مقطع می‌زنیم.

در مفصل و انتهای آزاد حتماً لنگر دارای صفر است ولی در تکیه‌گاه مفصلی و غلتکی ممکن است صفر نباشد.

لنگر نقطه‌ی B و A را داشتیم پس رسم وصل می‌کنیم و ادامه می‌دهیم پس لنگر A بدست می‌آید.

چون برای شیب نمودار لنگر ثابت است



ما نمودار $\frac{M}{EI}$ را می‌خواهیم بررسی کنیم

شیب هم در چول EI ها متفاوت بود. آن که بر 2EI تقسیم شد کوچکتر شد.

هنگامی که می‌خواهیم نمودار لنگر را بر EI تقسیم کنیم دقت شود که بخش مربوط به قرار بر EI آن تیر تقسیم می‌کنیم.

Subject
Date

- نمودار تغییر شکل را به صورت کیفی رسم می‌کنیم چون همه چیز را نمی‌توانیم دقیق حساب کنیم مثلاً در نقطه‌ی B می‌دانیم اینجا منفی است ولی نمی‌دانیم اینجا صفر و منفی (\) یا منفی و سپس مثبت است (∩) بشکه بالا زده دارد. همان حالت اول را در نظر می‌گیریم و محاسبات را انجام می‌دهیم (از روی نمودار راحت نمی‌توان به تقعر پی برد و این که این تقعر مثبت یا منفی به چه صورت است را به ما نمی‌دهد.)

- از نقطه‌ی A شروع می‌کنیم.

- از نقطه‌ی A تا B پیوسته است پس:

$$\theta_A = 0 \Rightarrow \theta_B^- - \theta_A = A_{m(A-B)} \Rightarrow \theta_B^- = \frac{1}{2}\frac{Pl}{2EI} \times l = \frac{Pl^2}{4EI}$$

θ_B دوران خط مماس بر آن نقطه

- جابه‌جایی B را می‌خواهیم بدست آوریم:

$$\Delta_B = D_{B/A} = \frac{Pl^2}{4EI} \times \frac{2}{3}l = \frac{Pl^3}{6EI}$$

θ_B^+ و θ_C و θ_D و Δ_D را می‌خواهیم.

از قانون اول و دوم گشتاور سطح تنها زمانی برای دو نقطه می‌توان استفاده کرد که بین آن دو نقطه ناپیوستگی وجود نداشته باشد (مثل مفصل) نقطه‌ی C چپ یا بعد از مفصل بود و نظر کی منفی است ولی تو جهت کی مثبت بودن و آن بدهیم

$D_{B/A}$ را نمی‌توانیم حساب کنیم چون سازه در این فاصله دارای ناپیوستگی است روی نقطه‌ی B سمت راست هیچ چیزی نمی‌توانیم بگوییم. شکل تغییر سازه کیفی است ولی نمی‌توانیم حکم کلی روی آن بدهیم

$D_{B/C}$ و $D_{B/A}$ قابل محاسبه‌اند، با تقسیم مجموع آن‌ها بر طول BC، θ_C بدست می‌آید؛ دقت شود که روابط هندسی را با قدر مطلق می‌نویسیم و سپس منفی‌های جبری را اعمال می‌کنیم.

$$D_{B/C} = -\frac{Pl}{EI} \times \frac{l}{2} \times \frac{2}{3}l = -\frac{Pl^3}{3EI}$$

$$\theta_C = -\frac{|D_{B/C}| + |D_{B/A}|}{l} = -\frac{Pl^2}{2EI}$$

$$\theta_C - \overset{\text{مجهول}}{\theta_B^+} = A_{m(B-C)} \Rightarrow -\frac{Pl^2}{2EI} - \theta_B^+ = -\frac{1}{2}\frac{Pl}{EI} \times l \Rightarrow \theta_B^+ = 0$$

با تغییر ابعاد و اندازه و بارگذاری این عدد می‌تواند تغییر کند.

$$\theta_D - \theta_C = A_{m(C-D)}$$

$$\theta_D - \left(-\frac{Pl^2}{2EI}\right) = -\frac{1}{2}\frac{Pl^2}{2EI}$$

$$\theta_D = \frac{-Pl^2}{EI}$$

Δ : نقطه پایین‌تر از مکان اولیه باشد ← منفی

" بالاتر " " " ← مثبت

$D_{B/A}$: نقطه B نسبت به بالا از مماس A باشد ← مثبت

" " پایین " " " ← منفی

برای $D_{x/y}$ اصلاً موقعیت نقاط نسبت به هم مهم نیست و تنها عامل منفی کننده مساحت است.

برای $\theta_x - \theta_y$ حتماً باید نقطه x در سمت راست نقطه y باشد.

Subject
Date

برای محاسبه Δ_D :

$$D_{D/C} = -\frac{Pl^2}{2EI} \times \frac{2}{3} l = -\frac{Pl^3}{3EI}$$

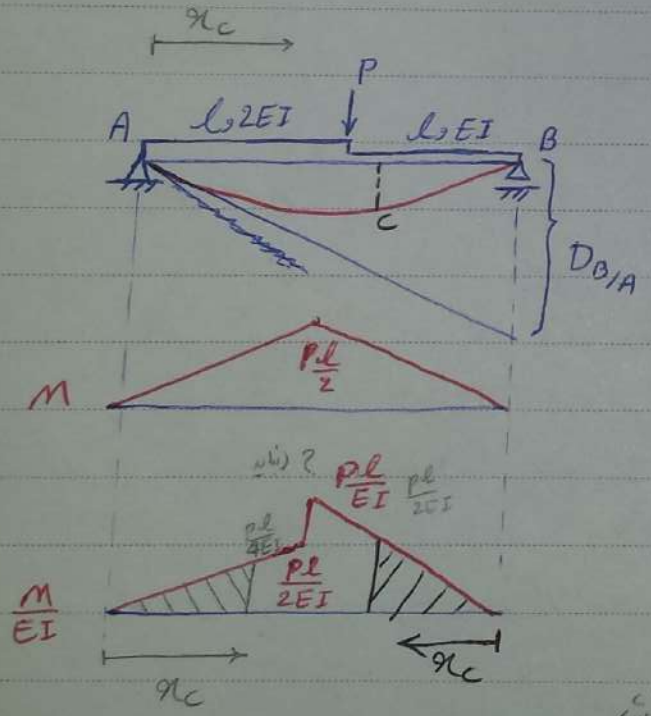
$$|\Delta_D| = |\theta_C \times l| + |D_{D/C}| = \frac{Pl^3}{2EI} + \frac{Pl^3}{3EI} = \frac{5}{6} \cdot \frac{Pl^3}{EI}$$

روش دیگر برای بدست آوردن Δ_D :

در نقطه‌ی B راست، شیب صفر است ($\theta_B^+ = 0$) (بخش مشکی)

$$D_{D/B} = -\frac{Pl}{EI} \times 2l \times \frac{1}{2} \times l = -\frac{Pl^3}{EI}$$

$$|\Delta_D| = |D_{D/B}| - |D_{B/A}| = \frac{Pl^3}{EI} - \frac{Pl^3}{6EI} = \frac{5}{6} \frac{Pl^3}{EI}$$



مثال با مقطع متغیر

* چون سازه معین است نمودار لنگر ربطی به EI ندارد. (در سازه‌های معین هم نمودار لنگر به EI ربطی ندارد.)

چون سازه متقارن نیست نمی‌دانیم که انحنای ماکزیمم در کدام سمت است.

چون سازه نامتقارن است باید دو جا حساب کنیم

$$D_{B/A} = \frac{1}{2} \frac{Pl}{EI} \times \frac{l}{2} \times \frac{2}{3} l + \frac{1}{2} \frac{Pl}{2EI} \times l \times \frac{4}{3} l$$
$$= \frac{2}{3} \frac{Pl^3}{EI}$$

مجموع مساحت کل در یک سطح کل برابر است با مساحت‌های هر بخش در یک سطح آن بخش

$$\theta_A = -\frac{D_{B/A}}{2l} = -\frac{Pl^2}{3EI}$$

می‌خواهیم ببینیم ماکزیمم کجا رخ می‌دهد. فرض می‌کنیم در نقطه‌ای مثل C حداکثر جابجایی را داشته باشیم:

C نقطه حداکثر جابجایی $\Rightarrow \theta_C = 0$

چون نمودار $\frac{M}{EI}$ دارای شکستگی‌ها باشد پس نمی‌توانیم موقعیت یک سطح را برحسب تعیین کنیم. پس هر بار فرض می‌کنیم که C یک بازه‌ی دارای نمودار پیوسته باشد.

فرض می‌کنیم این نقطه تا قبل P باشد اگر عدد P در این بازه آمد درست و در غیر این صورت محاسبه از اول

Subject

Date

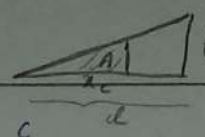
برای یافتن نقطه‌ی ماکزیمم جابه‌جایی مثل C با استفاده از شرط $\theta_C = 0$

فرض می‌کنیم که C در یک بازه‌ی پیوسته باشد و با استفاده از قانون اول لنگر سطح

یک نقطه‌ی دارای θ معین تشکیل معادله می‌دهیم اگر مقدار x_c در خارج

این بازه قرار گرفت فرض درست و در غیر این صورت باید بازه‌ی

پیوسته‌ی بعدی را در نظر بگیریم.



$A = \frac{1}{2} l \times t \times \left(\frac{x_c}{l}\right)^2$

نسبت مساحت‌ها با نسبت تشابه‌ها، توان دو می‌باشد.

نسبت تشابه : $\frac{x_c}{l}$ نسبت مساحت‌ها $\left(\frac{x_c}{l}\right)^2$

(راه سخت‌تر این است که معادله بنویسیم)

$$\cancel{\theta_C}^{\,0} - \theta_A = A_{m(A-C)}$$

$$+\frac{Pl^2}{3EI} = \frac{1}{2}\frac{Pl}{2EI} \times l \times \left(\frac{x_c}{l}\right)^2 \qquad \left(\frac{x_c}{l}\right)^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{x_c}{l} = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} > 1$$

غلط

پس فرض ما غلط بوده است.

$$\theta_B - \theta_A = A_{m(A-B)} = \frac{1}{2}\frac{Pl}{2EI} \times l + \frac{1}{2}\frac{Pl}{EI} \times l$$

$$= \frac{3}{4}\frac{Pl^2}{EI}$$

$$\theta_B = \frac{5}{12}\frac{Pl^2}{EI}$$

فرض می‌کنیم نقطه ماکزیمم در سمت راست باشد. حال برای یافتن x_c جدید اقدام می‌کنیم.

$$\theta_B - \theta_C = A_{m(C-B)}$$

$$\frac{5}{12}\frac{Pl^2}{EI} = \frac{1}{2}\frac{Pl}{EI} \times l \times \left(\frac{x_c}{l}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{x_c}{l}\right) = \sqrt{\frac{5}{6}} \Rightarrow x_c = 0.9128\, l$$

حال باید بدست آوریم

$$\Delta_C = D_{B/C} = \frac{5}{12}\frac{Pl^2}{EI} \times \frac{2}{3}\sqrt{\frac{5}{6}}\, l$$

روش لنگر سطح روش سختی است چون باید تغییر شکل سازه و محل ماکزیمم تغییر را حدس بزنیم.

روش سختی است چون باید تغییر شکل سازه را حدس بزنیم، محل ماکزیمم تغییر را حدس بزنیم و رابطه‌ای بین هندسه و ... بیابیم

- روش لنگر سطح تفسیر روش انتگرال‌گیری بود. در روش جدید می‌خواهیم تفسیری برای روش لنگر سطح بنویسیم

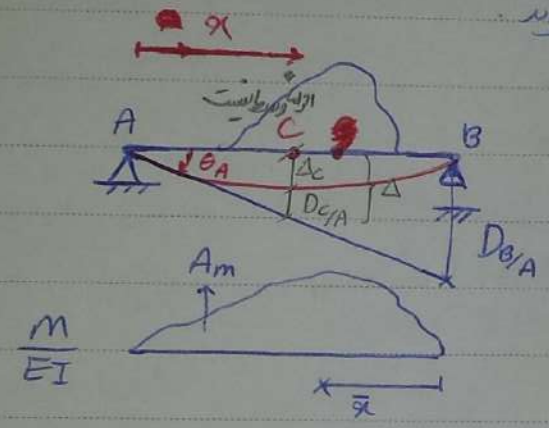
- اگر در سازه ناپیوستگی داشتیم θ را باید تا قبل آن نقطه و بعد تا بعد از آن نقطه در نظر گرفت.

- اگر در سازه ناپیوستگی داشتیم باید θ قبل و بعد آن نقطه را جداگانه در نظر گرفته و محاسبه کنیم

Subject
Date

روش بار الاستیک

در روش لنگر سطح باید محاسبات را برای تک تک نقاط تکرار می‌کردیم و برای برخی از نقاط نیز پاسخ نمی‌داد. پس تفسیر جدیدی برای روش لنگر سطح به نام بار الاستیک بیان کردند.



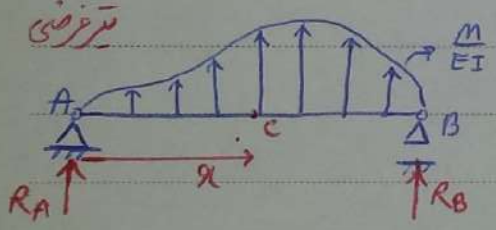
- خلاصه روش لنگر سطح

برای محاسبه از نقطه A شروع کرده و عماس را رسم می‌کنیم.

$$D_{B/A} = A_m \times \bar{x}$$

$$\theta_A = -\frac{D_{B/A}}{l} = -\frac{A_m \times \bar{x}}{l} \quad ①$$ رابطه بر اساس لنگر سطح

به ظاهر فرضی جهت عقربه‌های ساعت



- فرض نمودار $\frac{M}{EI}$ را عیناً روی سازه منتقل می‌کنیم (به این حالت تیر تیر فرضی می‌گویند)
- اگر لنگر منفی بار به سمت پایین و اگر مثبت به سمت بالا می‌باشد.
- به بار الاستیک می‌گویند چون لنگر بر روی EI است.
- دیمانسیون این بار $\frac{1}{L}$ یعنی $\frac{1}{L}$ است ($\frac{M}{EI} = \frac{1}{\rho}$) برخی به این بار مستقیماً انحنا می‌گویند.

نیروهای تکیه‌گاهی را محاسبه می‌کنیم:

بینه‌ها اهمیت ندارد (نمیخواهیم)

$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 \Rightarrow R_A \times l + A_m \times \bar{x} = 0$$

$$R_A = -\frac{A_m \times \bar{x}}{l} \quad ②$$ رابطه بر اساس استاتیک

$$①, ② \Rightarrow R_A = \theta_A$$

می‌خواهیم تغییر شکل و دوران را در تمام نقاط بررسی کنیم پس نقطه‌ای C را در نظر می‌گیریم. (دقت شود که با نقطه‌ای C دارای جابه‌جایی ماکزیمم اشتباه نشود)

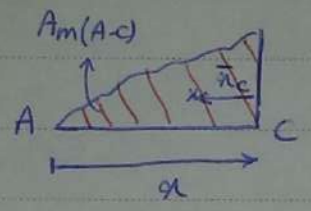
Subject
Date

بر اساس قضیه اول روش لنگر سطح :

$$\theta_C - \theta_A = A_{m(A-C)}$$

$$\theta_C = \theta_A + A_{m(A-C)} \quad (3)$$

- به یک رابطه بر اساس تغییر شکل (Δ) نیاز داریم .



برش نمودار $\frac{M}{EI}$

$$|\Delta| = |\Delta_C| + |D_{C/A}|$$

بلا از خط مماس A می باشیم مثبت است

چون از قدر مطلق می خواستیم بیرون آوریم منفی بود در منفی ضرب کردیم

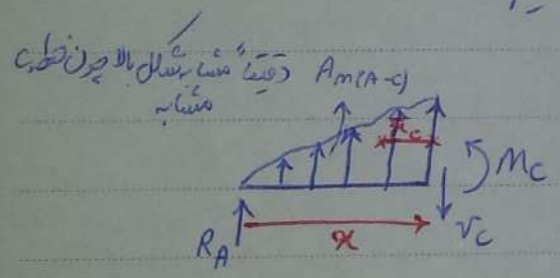
$$-\theta_A \times x = -\Delta_C + D_{C/A}$$

پایین آمده پس منفی است

$$\Delta_C = \theta_A \times x + A_{m(A-C)} \times \bar{x}_C \quad (4)$$

- دوباره به سراغ تیر فرضی (نام دیگر: تیر مزدوج) می رویم . در نقطه C برش می زنیم .

محاسبه V_C :



جهت V_C قرارداد استاتیکی است اما جهت آن دلخواه است .

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$R_A + A_{m(A-C)} - V_C = 0$$

$$V_C = A_{m(A-C)} + R_A \quad (5)$$

محاسبه M_C : حول نقطه C

$$+\circlearrowleft \sum M_C = 0 \Rightarrow M_C - R_A \times x - A_{m(A-C)} \times \bar{x}_C = 0$$

$$M_C = R_A \times x + A_{m(A-C)} \times \bar{x}_C \quad (6)$$

$$3,5 \Rightarrow \theta_C = V_C$$

$$4,6 \Rightarrow M_C = \Delta_C$$

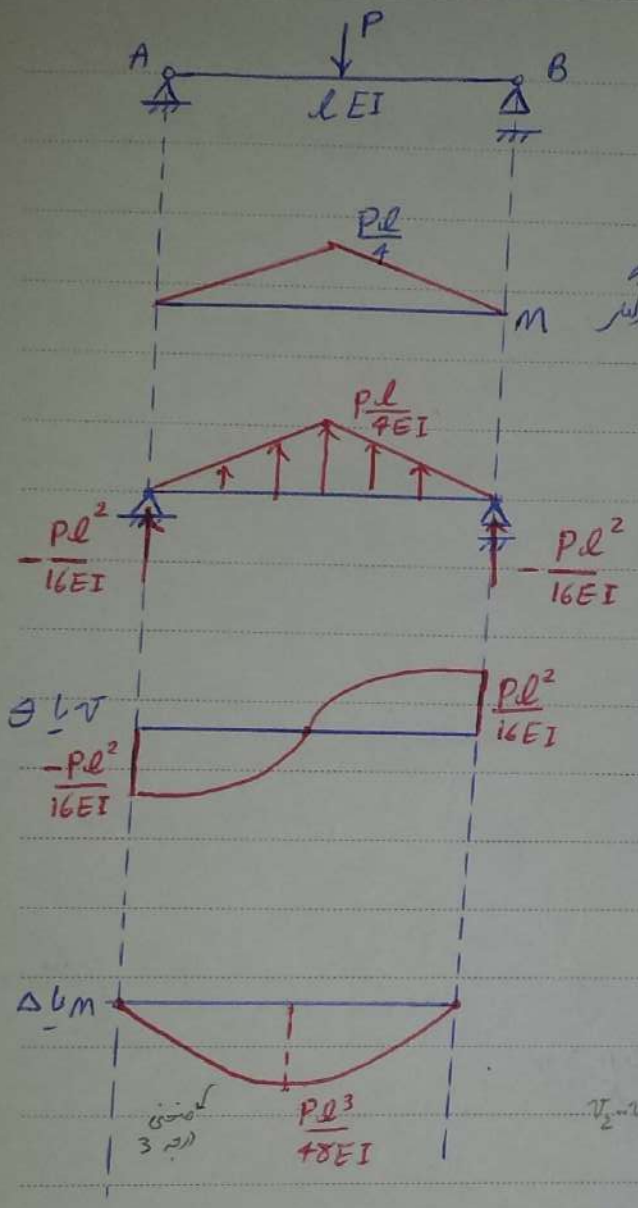
برش در تیر مزدوج برابر است با دوران در تیر اصلی

لنگر در تیر مزدوج برابر است با جابجایی در تیر اصلی

روند حل مسائل با استفاده از روش بار الاستیک

۱- رسم نمودار لنگر 2- رسم نمودار $\frac{M}{EI}$ 3- رسم تیر مزدوج 4- اعمال $\frac{M}{EI}$ بر روی تیر مزدوج 5- رسم نمودار V (θ) و نمودار M (Δ) برای تیر مزدوج

Subject
Date



مثال) قبلاً تغییرشکل در نقاط A و B و جابه‌جایی ماکزیمم را با استفاده از روش لنگر سطح برای این تیر بدست آورده بودیم.

هشدار: با خط تأثیر اشتباه نشود.

نمودار لنگر را رسم می‌کنیم و سپس نمودار $\frac{M}{EI}$ را به روی تیر فرضی منتقل می‌کنیم.

سازه متقارن و تحت بارگذاری متقارن است پس واکنش‌های تکیه‌گاهی کدام برابر نصف بار هستند.

توجه: همیشه برش برابر نیروی تکیه‌گاهی نیست بر چپ یا راست بودن تکیه‌گاه بستگی دارد.

$V=R$ $\qquad$ $V=-R$

← تغییرات برش برابر است با مساحت زیر نمودار بارگذاری (در اینجا ۱ مثبت پس تغییر مثبت)

$$V_2-V_1=\int_1^2 q(x)\,dx$$

شیب نمودار برش برابر است با مقدار بارگذاری. (برای رسم نمودار V یا θ ابتدا مقدار در نقاط A و B را می‌یابیم و بعد تغییر و بعد شیب را در نظر گرفته و نمودار را رسم می‌کنیم)

$$\frac{d^2v}{dx^2}=\frac{dq}{dx}=c$$ ثابت چون q ثابت است — تغییر منحنی برش

$0<x<\frac{l}{2}$: $c>0$ → تغییر مثبت

$\frac{l}{2}<x<l$: $c<0$ → تغییر منفی

برای رسم M: در قسمت بیشتر قسمتی پس ارتفاع تقاطع × $\frac{2}{3}$

← نمودار M تیر خرد در واقع تغییرشکل تیر را نشان می‌دهد.

تغییرات لنگر برابر است با مساحت زیر نمودار برش

$$M_2-M_1=\int_1^2 V(x)\,dx$$

انحنای نمودار لنگر با بارگذاری یکی است (✓)

بیان دیگر: برش منفی است پس شیب باید منفی باشد

Subject
Date

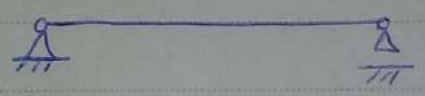
قبل از این که نمودار لنگر را روی تیر فرض قرار دهیم، برای استفاده از روش بار الاستیک باید کار زیر را انجام دهیم

$\Delta_A = 0$ $\quad$ $\Delta_B = 0$ → در روش بار الاستیک ما تغییر شکل را فقط در راستای عمود بر عضو بررسی می‌کنیم.

$\theta_A \neq 0$ $\quad$ $\theta_B \neq 0$

تبدیل به نیرو

$\begin{cases} M_A = 0 \\ V_A \neq 0 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} M_B = 0 \\ V_B \neq 0 \end{cases}$



اسم تیری که در تصاویر بالا رسم کردیم.

به خود تیر اسم

تیر مزدوج یک تیر دو سر مفصل برابر است با خود تیر دو سر مفصل.

مثال) می‌خواهیم ببینیم آیا تیر مزدوج این تیر مشابه خودش می‌شود یا نه.

شرط تغییر شکل

$\theta_A = 0$ $\quad$ $\theta_B \neq 0$

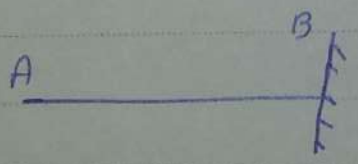
$\Delta_A = 0$ $\quad$ $\Delta_B \neq 0$

جابجایی ندارد و چرخش هم ندارد پس باید برش و لنگر در نقطه باشد

$V_A = 0$ $\quad$ $V_B \neq 0$

$M_A = 0$ $\quad$ $M_B \neq 0$

باید شرط تغییر شکل با شرط نیرو هم خوانی داشته باشد

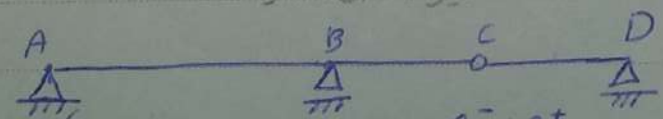


تیر مزدوج یک تیر یک سر گیردار، یک تیر یک سر گیردار است که جای تکیه‌گاه عوض شود.

تیر مزدوج را بدون توجه به بارگذاری رسم می‌کنیم.

Δ یعنی تغییر شکل عمود بر راستای اولیه

مثال)



دقت شود که نمی‌توان مفصل داخلی را برای تیر مزدوج دوباره به مفصل داخلی تبدیل کرد چون اگر شرط تغییر شکل $\theta_B^- = \theta_B^+$ را به شرط نیرو $V_B^- \neq V_B^+$ تبدیل کنیم، یکی گاه مفصل داخلی با نیروی قائم خود نمی‌تواند این شرط را در بر گیرد.

$\theta_B \neq 0$ $\quad$ $\theta_C^- \neq \theta_C^+$

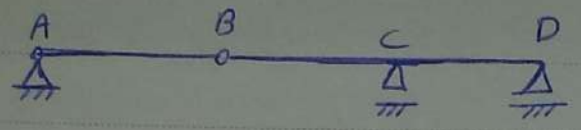
تکراری (در بالا بیان شد) $v = \Delta_B^- = \Delta_B^+$ ، $\theta_B^- = \theta_B^+$ تیر را یکپارچه در نظر می‌گیریم

$\Delta_B = 0$ $\quad$ $\Delta_C^- = \Delta_C^+$

$V_B \neq 0$ $\quad$ $V_C^+ \neq V_C^-$ → برش دیسکونتینیو داریم پس باید تکیه‌گاه‌ها مشابه نیروی متمرکز بگذاریم

$M_B = 0$ $\quad$ $M_C^- = M_C^+$ نقطه‌ای که برش دارد و لنگر ندارد ← مفصلی

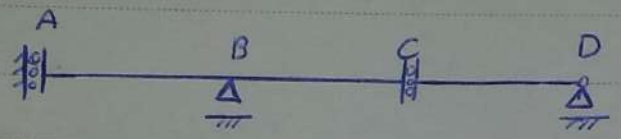
Subject
Date



تکیه‌گاه غلتکی نماینده نیروی متمرکز است.

در رسم تیر مفصل دوج حتی الامکان از اضافه کردن نیرو (کنیت تکیه‌گاهی) پرهیز می‌شود.

مثال)



$\theta_A = 0$ $\qquad$ $\theta_C^- = \theta_C^+$

$\Delta_A \neq 0$ $\qquad$ $\Delta_C^- \neq \Delta_C^+$

$v_A = 0$ $\qquad$ $v_C^- = v_C^+$

$M_A \neq 0$ $\qquad$ $M_C^- \neq M_C^+$

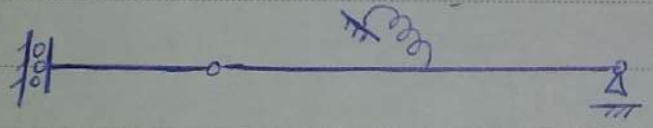
برش نداشته باشد ولنگر داشته باشد

هدایت شده

در دو حالت تیر مفصل دوج به بارگذاری ربطی ندارد مگر این که تغییر شکل اولیه داشته باشیم.

شرایط تغییر شکلی را به شرایط نیرویی تبدیل می‌کنیم.

هدایت شده تبدیل می‌شود به لنگر متمرکز

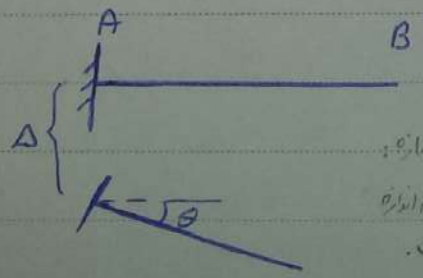


لنگر متمرکز را می‌توان با فنر پیچشی نمایش داد.

در آخر می‌توان (بعد) مفصلی یا غلتکی نداشت ولی چون باید در راستای افقی یک لنگر لحاظ کنیم از غلتکی استفاده می‌کنیم (برشی داریم) چون می‌خواهیم به ناپایداری برنخوریم.

---

* می‌خواهیم اثر تغییر شکل اولیه بر روی سازه را بررسی کنیم. این تغییر شکل اولیه می‌تواند به دلیل خطای اولیه و ... رخ دهد.



تغییر شکل اولیه برای این سازه: به اندازه Δ جابه‌جایی و به اندازه θ دوران داشته است.

- همه‌ی سازه‌ها این تغییر شکل اولیه را دارند ولی ما از بعضی از آن‌ها صرف نظر می‌کنیم.
- معروف‌ترین تغییر شکل اولیه، نشست زمین است. در قدیم برای از بین بردن تغییر شکل اولیه فرایندهایی را طولانی می‌کردند (مثلاً نمونه‌هایی را در دست می‌کردند و بعد آن را چند سال رها می‌کردند)
- در سازه‌ی نامعین تغییر شکل اولیه نیروی اضافه ایجاد می‌کند و تغییر شکل را بیشتر می‌کند. در سازه‌ی معین تغییر شکل اولیه نیروی اضافه ایجاد نمی‌کند

بر اثر تغییر شکل اولیه، سازه‌ی ما از حالت مطلوب خارج شده و دارای یک سری جابه‌جایی‌ها و دوران‌هایی می‌شود. حال اگر ما بخواهیم تغییر شکل این سازه تحت اثر بارگذاری‌ها را با استفاده از روش بار الاستیک (تیر مزدوج) بررسی نماییم، باید این تغییر شکل اولیه را در سیستم تیر مزدوج اثر دهیم.

Subject
Date

- در کل سازه‌ها را با دمپر نگاه می‌کنیم تا اگر عضوی از بین رفت عضوهای دیگر سازه را نگه دارند.

مقدار بهت

$\Delta_A = -\Delta$ $\quad$ $\Delta_B \neq 0$

$\theta_A = -\theta$ $\quad$ $\theta_B \neq 0$

$M_A = -\Delta$ $\quad$ $M_B \neq 0$

$V_A = -\theta$ $\quad$ $V_B \neq 0$

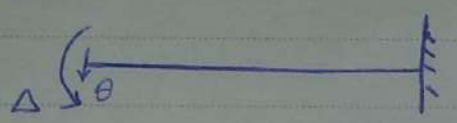
تکیه‌گاه A در حالت پیش فرض $\begin{cases} A=0 \\ \theta=0 \end{cases}$ و با تغییر شکل اولیه به میزان

مشخص $\begin{cases} M=-\Delta \\ V_A=-\theta \end{cases}$ تغییر می‌کند ولی تقطا B در نتیجه $\begin{cases} \Delta \neq 0 \\ \theta \neq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} M \neq 0 \\ \theta \neq 0 \end{cases}$

به میزان ما وجود دارد پس برای آن گشتاور و نیروی خاص محاسبه می‌کنیم.

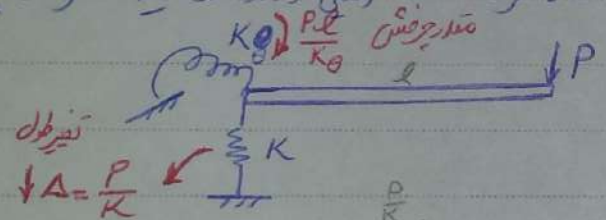
- در روش تیر مزدوج، تغییر شکل اولیه را به صورت نیرو و لنگر متمرکز نشان می‌دهیم.

می‌خواهیم لنگر Δ باشد پس لنگر $-\Delta$ قرار می‌دهیم.



- تیر مزدوج باید به نحوی تشکیل شود که تغییر شکل اولیه را نیز به ما بدهد.

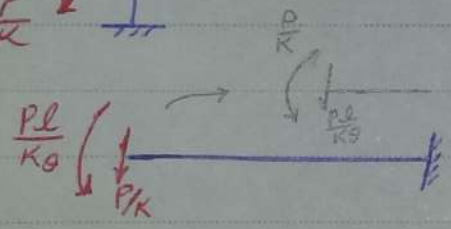
مثال) بعضی اوقات تکیه‌گاه صلب نیست و به خاطر نیروهای وارده سازه حرکت دارد. (یعنی بارگذاری روی تکیه‌گاه اثر دارد.)



- اگر بار خیلی زیاد باشد فونداسیون را نمی‌توان صلب تصور کرد.

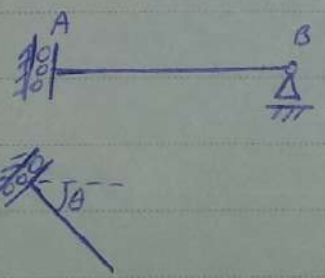
تکیه‌گاه فنری را به صورت لنگر و نیروی متمرکز در تیر مزدوج نمایش می‌دهیم.

- تغییر شکل اولیه می‌تواند ناشی از بارگذاری باشد.



دقت شود که در تغییر شکل اولیه، چرخش θ درجت ساعتگرد منفی در نظر گرفته شود

مثال) - این سازه تغییر شکل اولیه دارد یعنی جابه‌جایی (دوران) اولیه دارد.



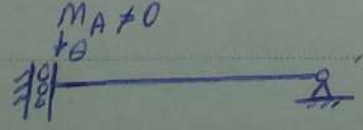
- جابه‌جایی برای این سازه تغییر شکل اولیه حساب نمی‌شود بلکه دوران تغییر شکل اولیه حساب می‌شود.

(چون تغییر شکل قائم در ذات این سازه است.)

- تغییر شکل اولیه مرتبط به جهاتی است که سازه در آن جهات مقید است. یعنی:

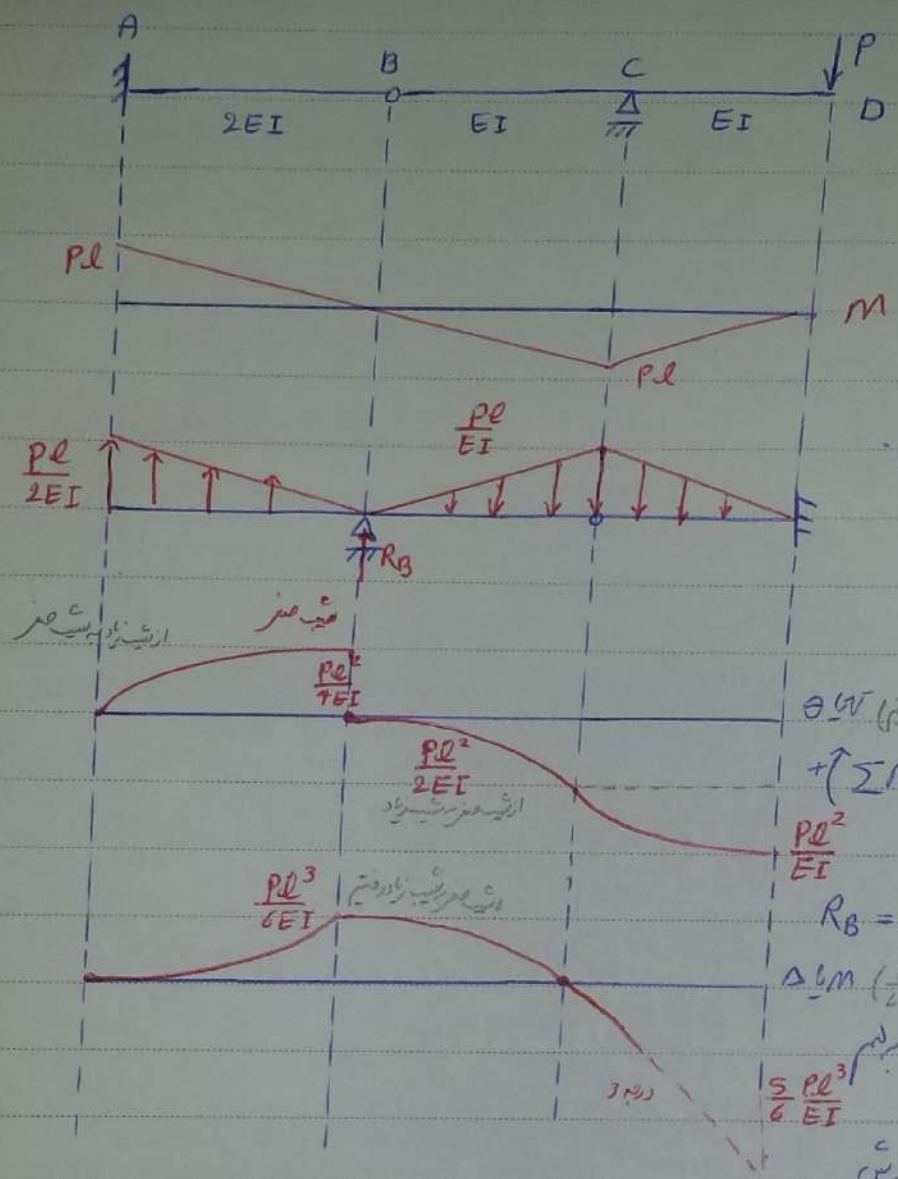
$V_A = -\theta$

$M_A \neq 0$



جابه‌جایی‌ها و دوران‌هایی برای ما ایجاد تغییر شکل اولیه (نیرو و لنگر متمرکز در تیر مزدوج) می‌کنند که سازه در آن جهات مقید باشد.

Subject
Date



مثال) حل مثال تیر دو دهانه با رویکرد تیر مزدوج

(مثال ۱۰ صفحه بررسی روش تیر مزدوج بر روش لنگر سطح)

نمودار $\frac{M}{EI}$ را به صورت بار بر روی تیر مزدوج فرض داریم.

حال باید نمودار برش داخلی و لنگر داخلی را رسم کنیم.

- برای بدست آوردن R_B (از منحنی θ یا v)

$$+\circlearrowleft \sum M_C = 0 \Rightarrow R_B \times l + \frac{1}{2}\frac{Pl}{2EI} \times l \times \frac{5}{3} l - \frac{1}{2}\frac{Pl}{EI} \times l \times \frac{1}{3} l = 0$$

$$R_B = -\frac{1}{4}\frac{Pl^2}{EI}$$

- دیاگرام برحسب نیوتن متر است (برحسب $\frac{1}{L}$) M یا Δ

- در تیر مجازی دیاگرام را دانسته برحسب زده ایم.

- در رسم v، در نقطه B نیروی متمرکز و در نتیجه برش در جهت نیروی متمرکز داریم

- برای بدست آوردن تغییر شکل باید نمودار لنگر را رسم کنیم. در نقطه A در تیر مزدوج گشتاور داخلی صفر است

شیب نمودار M با مقدار برش تعیین می‌شود.

تغییرات لنگر برای مساحت زیر نمودار برش

- برای بدست آوردن لنگر D، مساحت منحنی برش از C تا D را می‌خواهیم که برابر مساحت یک بخش مستطیلی و یک منحنی درجه 2 است.

نیروی متمرکز باعث تغییر شیب ناگهانی در نمودار لنگر و شکستگی آن می‌شود.

سه‌شنبه 95/9/2 میان‌ترم تا آخر روش تیر مزدوج

Subject
Date

از روش تیر مزدوج برای بررسی بعضی از قاب ها استفاده می شود.

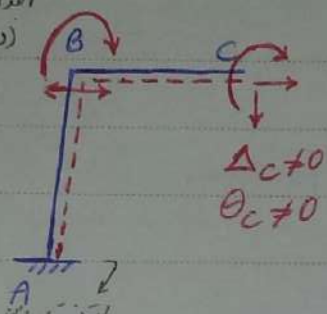
از روش تیر مزدوج نمی توان برای بررسی خرپا استفاده کرد. روش لنگر سطح و تیر مزدوج بر پایه ی لنگر داخلی هستند و مختص سازه های خمشی هستند. خرپا لنگر داخلی ندارد. پس برای تغییر شکل خرپا باید از روش دیگری استفاده کرد.

ابتدا فقط تیر AB را در نظر گرفتیم
(در نقطه B مرکز آزاد است)

$\theta_B \neq 0$

$\Delta_B^{AB} \neq 0$

$\Delta_B^{BC} = 0$



$\Delta_C \neq 0$

$\theta_C \neq 0$

با تعریف تار پایینی به تیر تبدیل شد.

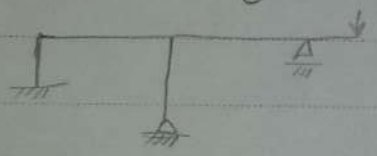
- قاب ساده

تیر مزدوج قاب ها نیز شبیه تیر می شود.

تعریف لنگر مثبت: تار بالا فشاری و تار پایین کششی

در قاب باید تار پایین را تعریف کنیم تا بتوانیم لنگر مثبت و منفی را تفکیک کنیم
(در تیرها با استفاده از ساختگر یا پاد ساعتگرد بودن گشتاور به مثبت و یا منفی بودن آن پی می بردیم ولی در اینجا این تعریف با توجه به میدان دید تغییر می کند)

چگونه تیر مزدوج سازه ی قاب مرکب



Δ یعنی تغییر شکل عمود بر امتداد اولیه

نقطه ی C هم در جهت قائم و هم در جهت افقی می تواند جابه جا شود و هم دوران کند.
نقطه ی B جابه جایی افقی و دوران داریم. (هنوز از عنوان Δ استفاده نکرده ایم)

با توجه به در نظر نگرفتن تغییر شکل محوری (تیر نه فشرده و نه کشیده می شود) نقطه ی A ثابت است.

نقطه ی B مرز مشترک است.

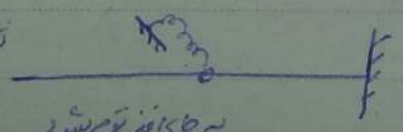
$$\begin{cases} V_B \neq 0 \\ M_B^{AB} \neq 0 \\ M_B^{BC} = 0 \end{cases}$$

گشتاور مثبت

برای مشخص کردن لنگر از مفصل استفاده می کنیم برش هم به ما می دهد

نقطه آزاد آزاد شد

نقطه آزاد آزاد شد



به جای فنر توجه بشود
(نمی تواند بر عکس باشد)

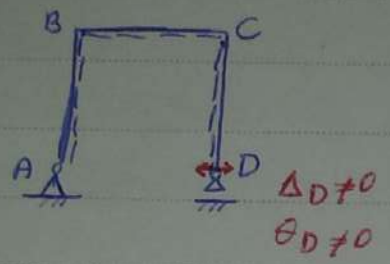
Subject
Date

3 6 15
12 14

* هر سازه‌ای که معین و پایدار باشد دارای تیر مزدوج معین و پایدار است.

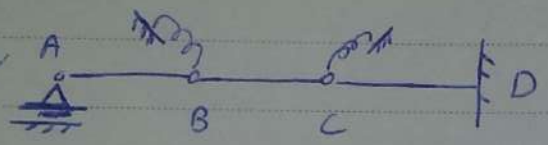
↔ اگر سازه‌ای نامعین باشد تیر مزدوج آن ناپایدار است. آیا بله است؟

مثال) جابه‌جایی افقی برای تیر CD معنی Δ می‌دهد.



رسم تیر مزدوج

به خاطر این که $\Delta_B^{AB} \neq 0$ یک گشتاور متمرکز به AB باید اثر کند (که جهت آن با بحث استاتیک هنوز نمی‌گوییم)



$|M_B| = |M_C|$

یکی را باید در جهت افق ببندیم (چون کی داریم) پس مفصلی را علامتگذاری می‌کنیم

هر فنری یک لینک است. نحوه نمایش هم نیست.
نماینده

عضو CD با 3 لینک در D و یک لینک پیچشی در C به زمین وصل است و یک درجه نامعینی به کل سازه می‌دهد.

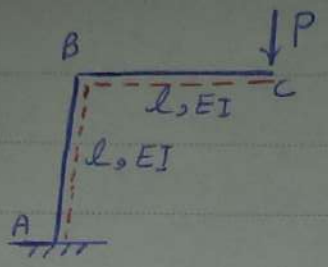
دقت شود که لنگر متمرکز در مفصل، هنگامی که برای هم دیاگرام گشتاور مفصل را جدا می‌کنیم تنها می‌تواند در دیاگرام گشتاور یکی از عضوها باشد یعنی در واقع تنها به یکی از عضوها اثر می‌کند.

- براساس نکته‌ی بالای صفحه، باید تیر مزدوج سازه معین، معین باشد ولی تیر مزدوج ما نامعین از درجه یک است.
پس ما یک شرط تغییر شکل را به شرط نیرو تبدیل نکرده‌ایم.
- $A_B = A_C$ است پس $|M_B| = |M_C|$

تمام اطلاعات مربوط به هندسه سازه باید تبدیل به اطلاعات نیرویی شود.

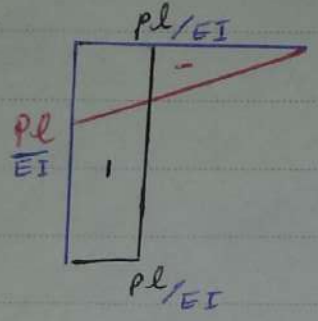
Subject
Date

مثال) تغییر شکل سازه را حساب کنید.

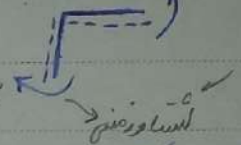


در قاب ها، اولین کار تعیین تار پایین است.
تار پایین را تا جایی که ممکن است پیوسته در نظر بگیرید.
(یعنی برش نداشته باشیم)

اگر اصل ال است ۵ عضو را جدا در نظر بگیرید.

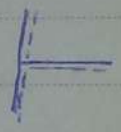


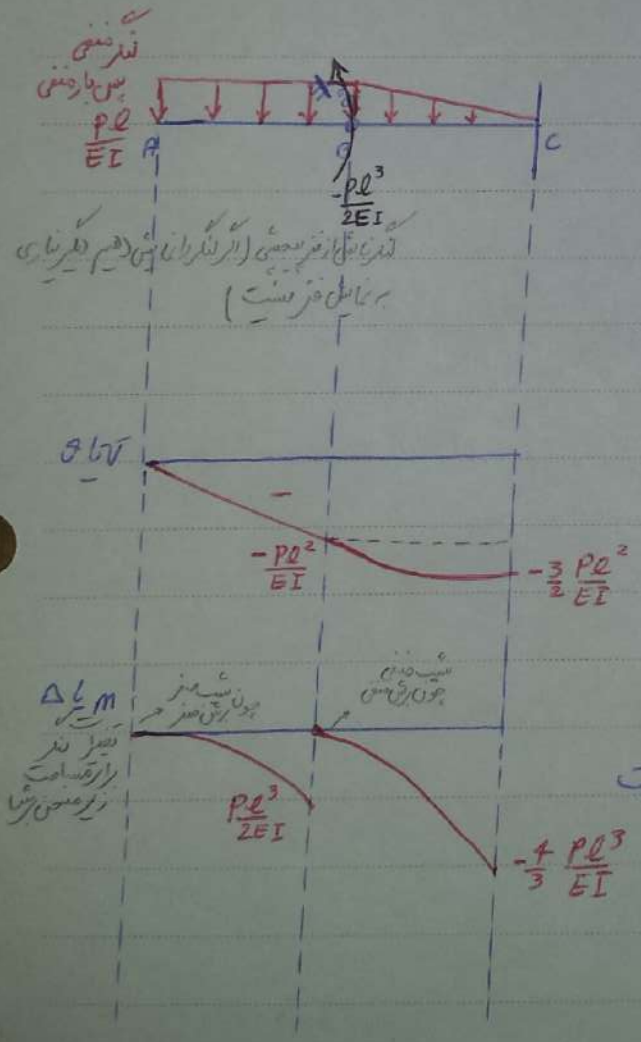
غیرپیوسته: لنگر مثبت



برای تعادل لنگرهای لنگر ها باید به این صورت باشند

پس در یک نقطه لنگر هم منفی و هم مثبت است یعنی می کنیم
پیوسته در نظر بگیریم تا با جهات استاتیکی یکسان باشد
در بعضی اوقات مجبوریم تار پایین را غیر پیوسته در نظر بگیریم.





قدم دوم رسم نمودار لنگر است. برای این کار می توان عضوها را جدا در نظر گرفت یا تمام آن ها را یکجا در نظر گرفت.

قدم بعدی: نمودار $\frac{M}{EI}$

" " : رسم تیر مزدوج

برای بدست آوردن لنگر فنر: مفصل B را باز کرده و دیاگرام آزاد سمت چپ را در نظر می گیریم.

برعکس: به اندازه لنگر وارده از نمودار لنگر برش داریم اگر لنگر تمرکز با دساعتگرد برش مثبت و اگر ساعتگرد برش منفی

همه ی اطلاعات لازم را با کامل شدن نمودارها بدست آوردیم.

Subject
Date

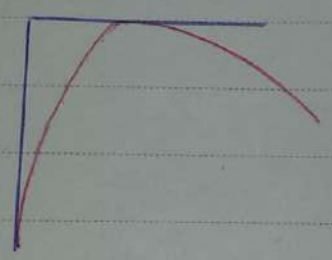
$$\theta_B = -\frac{Pl^2}{EI}$$

$$\theta_C = -\frac{3}{2}\frac{Pl^2}{EI}$$

$$\Delta_B^{AB} = \frac{-Pl^3}{2EI}$$

$$\Delta_C = -\frac{4}{3}\frac{Pl^3}{EI}$$

برای رسم تغییر شکل سازه چون بخش اول سازه عمودی بوده و در حالت تیر خروج از سازه سازگر چرخیده پس نمودار M این قسمت را نیز با دقت سازگر چرخانده و قرار می دهیم ولی چون بخش دوم نچرخیده، نمودار M را مستقیم قرار می دهیم.



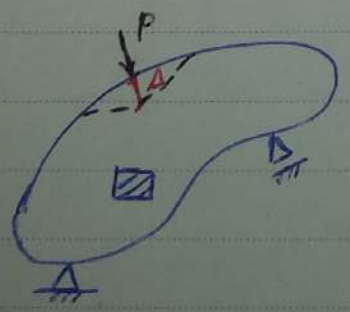
- روش انتگرال گیری برای حالاتی که تعداد دهانه و بارگذاری زیاد باشد مناسب نیست (ثوابت انتگرال گیری زیاد می شوند)

محدودیت های روش قبل: 1- فقط سازه های خمشی را پاسخ می دهند.

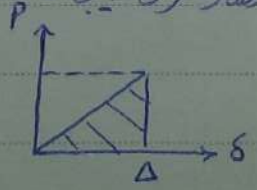
2- تغییر شکل را فقط در راستای عمود بر عضو به ما می دهند (جهت Δ به ما تحمیل می شود.)

(مثلاً در مثال بالا نمی توانند تغییر شکل افقی BC را به ما بدهند.)

روش انرژی: اگر هر سازه ی دلخواه را تحت اثر بار قرار دهیم، تحت اثر بار سازه دچار تغییر شکل می شود.



← هنگامی که می خواهیم به یک سازه بار وارد کنیم بار را به صورت تدریجی وارد می کنیم. پس در سازه کرنش تدریجی خواهیم داشت (که باید دید اگر امید این کرنش به قدر اگر مقدار خود می رسد)



زمانی می توانیم بگوییم که کار نیرو Δ × P است که در تمام طول مسیر نیروی P برابر P باقی بماند اما این طور نیست و به صورت تدریجی وارد می شود.

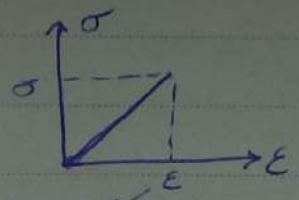
کار نیروی خارجی P (روی سازه) $U_{ext} = \frac{1}{2} P\Delta$

Subject
Date

نحوه‌ی اعمال بار و زمان اعمال آن برای انرژی سازه مؤثر است.

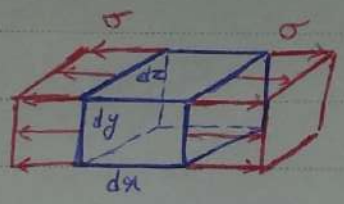
در نقاط مختلف سازه کرنش های مختلفی داریم و در نهایت یک رابطه خطی بین تنش و کرنش مشاهده می‌کنیم.

(برای مواد الاستیک خطی)



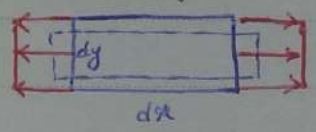
برای یافتن انرژی داخلی:

← پس باید مجموع انرژی سازه را بدست آوریم. یک المان را در نظر می‌گیریم تا انرژی آن را بدست آوریم سپس از آن برای کل سازه انتگرال می‌گیریم.

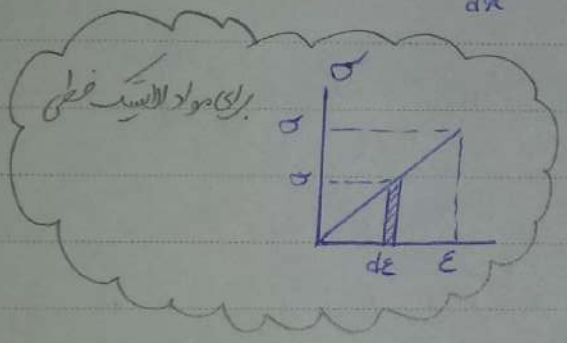


المانی که داریم تحت تنش قرار دارد.
باید از دو طرف تحت تنش باشد تا در حالت تعادل قرار گیرد.

حالت دو بعدی



(تغییر طول)
به علت نیروهای وارده سازه دچار افزایش طول می‌شود.



اگر به اندازه $d\varepsilon$ افزایش کرنش داشته باشیم

نیروی وارد بر المان

$$F = \sigma \times dy \times dz$$

$$\text{کرنش} = \frac{\text{تغییر شکل}}{\text{طول اولیه}}$$

تغییر شکل (طول) $d\Delta = d\varepsilon \cdot dx$

کار انجام شده توسط نیرو در جابه‌جایی

$$dU_0 = (\sigma \cdot dy \cdot dz) \cdot (d\varepsilon \cdot dx) = \sigma \cdot d\varepsilon \cdot \underbrace{(dx \cdot dy\, dz)}_{dv}$$

انرژی — نیرو — جابه‌جایی

$$dU = \frac{dU_0}{dv} = \sigma \cdot d\varepsilon$$

چگالی انرژی

$$U = \int_0^{\varepsilon} \sigma \cdot d\varepsilon \quad \text{چگالی انرژی}$$

با افزایش مقدار کرنش در نتیجه کرنش بیشتر مقدار نهایی

روابط بالا برای تمام مواد (خطی، غیر خطی، الاستیک، غیر الاستیک) است چون از رابطه خطی استفاده نکرده‌ایم.

Subject
Date

مواد الاستیک خطی $\sigma = E \cdot \varepsilon$

$$U = \int_0^{\varepsilon} \sigma \cdot d\varepsilon = \int_0^{\varepsilon} E \cdot \varepsilon \cdot d\varepsilon = \frac{1}{2} E \varepsilon^2$$

اگر ماده خطی نبود انتگرال باید تعریف و محاسبه شود و در صورت خطی بودن از نتیجه استفاده می‌شود.
اگر فرمول بالا را بخواهیم برحسب تنش بدست آوریم.

$$= \frac{1}{2} E \left(\frac{\sigma}{E}\right)^2 = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E}$$

$$U_{int} = \int \underset{\text{چگالی انرژی}}{u} dv$$ فرمول جامع

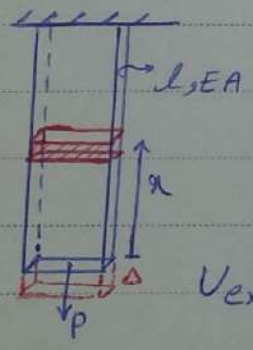
$$U_{int} = U_{ext} \Rightarrow \Delta = ?$$ می‌دانیم که $U_{ext} = U_{int}$ ما می‌خواهیم رابطه تغییر شکل Δ بررسی

$$V_{int} = \int U = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E} dv$$ فرمول بالا

این برای همه نوع سازه صادق است و نحوه محاسبه‌ی σ متفاوت است.

تغییر شکل و تنش محوری

مثال) یک تیر مشوری (یعنی سطح مقطع آن ثابت است) را در نظر می‌گیریم



به علت بار وارده تغییر شکل (Δ) اتفاق می‌افتد.

$$U_{ext} = \frac{1}{2} P \Delta$$

هر سازه‌ای که داریم با یک دستگاه مختصات (یا یک رابطه ریاضی) برای آن در نظر می‌گیریم.
در اینجا دستگاه مختصات را قائم در نظر می‌گیریم.

دقت شود که $U = \frac{1}{2} \frac{\sigma(x)^2}{E}$

$$dV = A \cdot dx$$
(اگر مقطع ثابت نیست میزان تغییرات را بر حسب x)

$$\sigma(x) = \frac{P}{A}$$

$$U_{int} = \int U dV = \int_0^{l} \frac{1}{2} \frac{P^2}{EA^2} \cdot A \cdot dx = \frac{1}{2} \frac{P^2 l}{EA}$$ خطی

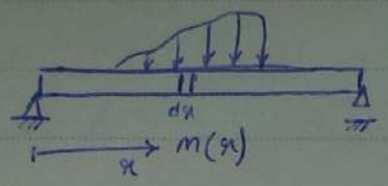
انرژی ذخیره شده در میله تحت نیروی محوری

$$\frac{1}{2} P \Delta = \frac{1}{2} \frac{P^2 l}{EA} \Rightarrow \Delta = \frac{Pl}{EA}$$

Subject
Date

ما می خواهیم که برای انواع مختلف سازه ها، فرمول های مشخص داشته باشیم

سازه خمشی



سازه خمشی روبرو را در نظر بگیرید.

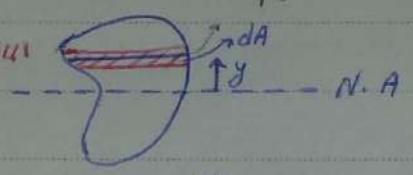
دو سر مفصل بودن تیر روبرو تاثیری در نتیجه ما ندارد.

می خواهیم برای انرژی ذخیره شده در اثر لنگر خمشی بیابیم.

(تمام نقاط روی خط به موازات بدون تنش برابر دارند)

تمام نقاط دارای تنش برابر

شکل مقطع



همان در نظر می گیریم.

$$\sigma = \frac{My}{I}$$

برای هر مقطع یک لنگر داریم و برای هر مقطع برای هر y تنش متفاوت داریم

$$dv = dA \times dx$$

(در بعد سوم به اندازه dx پیشروی کرده است)

$$U_{int} = \int_v u\, dv = \int_l \int_A \frac{1}{2} \frac{M^2(x) y^2}{EI^2}\, dA \cdot dx \qquad \left(U = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{E}\right)$$

انتگرال روی حجم ها با یک بار روی x و یک بار روی A حرکت کند.

$$= \frac{1}{2} \int \frac{M^2(x)}{EI^2} dx \times \underbrace{\int_A y^2 dA}_{I}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{M^2(x)}{EI}\, dx$$

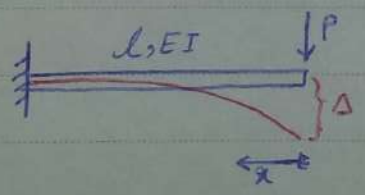
- M فقط به x وابسته است و به y و A وابسته نیست.

پس می توانیم انتگرال ها را تفکیک کنیم.

برای انرژی کرنشی داخلی ناشی از خمشی

فرمول بالا به هیچ سطح مقطعی وابسته نیست. (دایره، مستطیل و ...) (ولی تیر باید منشوری باشد)

مثال)



$$U_{ext} = \frac{1}{2} P\Delta$$

باید M(x) را بدست آوریم. از راست مقطع می زنیم (x را در نظر می گیریم) تا کار ساده تر شود.

$$M(x) = -Px$$

Subject
Date

$$U_{int} = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{P^2x^2}{EI}dx = \frac{1}{6}\frac{P^2l^3}{EI}$$

$$\frac{1}{2}P\Delta = \frac{1}{6}\frac{P^2l^3}{EI} \Rightarrow \Delta = \frac{Pl^3}{3EI}$$

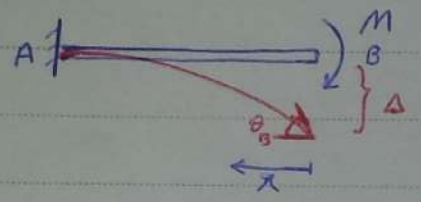
جواب درست است. اما باید منفی باشد. در روش انرژی جابه جایی در راستای نیرو را مثبت می دهند.

در روش انرژی جابه جایی در راستای نیرو مثبت است

در روش ~~کار مجازی~~ انتقال یکه جهت مثبت رو به بالا است (و هم چنین روش تیر مزدوج) (مثبت است قرار)

در روش کار مجازی نسبت به هندسه مسئله $D_{B/A}$ مشخص می کرد که مثبت و منفی چطور است.

مثال)



$$U_{ext} = \frac{1}{2}M\theta_B$$

در روش انرژی Δ و θ بدست آمده برای نقطه اعمال نیرو ذکر است.

← دقت شود که کار خارجی نمودار برابر $\frac{1}{2}P\Delta$ نیست.

$$M(x) = -M$$

$$U_{int} = \frac{1}{2}\int \frac{M^2}{EI}dx = \frac{1}{2}\frac{M^2l}{EA}$$

انرژی خمشی داخلی ناشی از لنگر خارجی

(در مسئله قبل ناشی از نیروی خارجی بود)

$$\frac{1}{2}M\theta_B = \frac{1}{2}\frac{M^2l}{EI} \Rightarrow \theta_B = \frac{Ml}{EI}$$

چون θ در جهت M بود مثبت شد

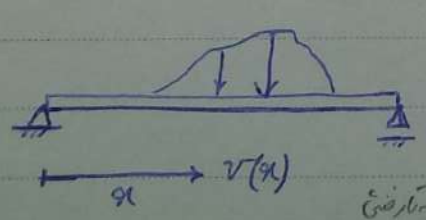
در نوشتن رابطه ی انرژی خارجی دقت شود که این انرژی بعضی اوقات به لنگر و برخی اوقات به نیرو وابسته است.

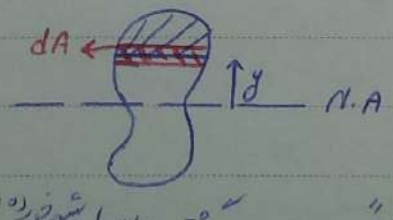
* محدودیت روش انرژی:

روش انرژی جابه جایی را فقط در نقطه اعمال بار و در راستای اعمال بار به ما می دهد. (پس در این سؤال Δ را نمی تواند به ما بدهد)

روش انرژی برای بیشتر از یک بار نیز نمی تواند تغییر شکل را به ما بدهد. (مجموع ضریبی از Δ_1 و Δ_2 را به ما می دهد.)

انرژی برشی





نیروی برشی باعث ایجاد تنش برشی می شود.

گشتاور اول سطح هاشور خورده نسبت به تار خنثی

اثر M را قبلاً بررسی کردیم.

تنش برشی روی فاصله y از تار خنثی $\tau = \frac{VQ}{It}$

Subject
Date

برای محاسبه انرژی کرنشی داخلی ناشی از برش

در فرمول چگالی انرژی تنش قائم به تنش برشی و مدول خمشی به مدول برشی تبدیل می‌شود.

$$U = \frac{1}{2}\frac{\tau^2}{G} \quad \text{چگالی انرژی} \qquad dv = dA \cdot dx$$

$$U = \frac{1}{2}\iint \frac{v^2(x)\,Q^2}{G I^2 t^2}\, dA \cdot dx = \frac{1}{2}\int_{l} \frac{v^2(x)}{GA}\, dx \cdot \underbrace{A\int_A \frac{Q^2}{I^2 t^2}\, dA}_{K} = \frac{1}{2} K \int \frac{v^2}{GA}\, dx$$

(در A ضرب و تقسیم — مقطع)

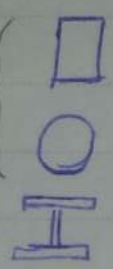
K: ضریب شکل (بی بعد است)

(تنها به سطح مقطع سازه وابسته است
و به طول سازه و بارگذاری وابسته نیست)

* ضریب شکل برای مقطع مربع - مستطیل $K = 1.2$

" " " " دایره‌ای $K = 10/9$

" " " " I شکل $K = 1$



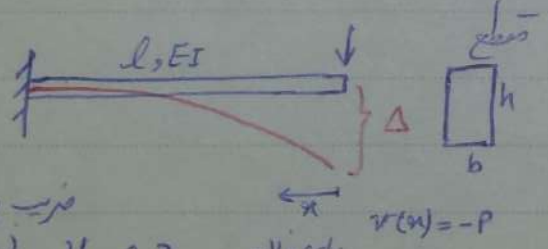
اثبات کنید (تا وقتی مقطع گفته شود، Q برابر مساحت ناحیه ...)

سؤال: آیا می‌توانیم برش خالص داشته باشیم؟ خیر.

← شیب نمودار لنگر برابر است با مقدار برش $\frac{dM}{dx} = v(x)$

پس هر جا برش داشتیم لنگر هم همراه آن است که متغیر است. M می‌تواند ثابت باشد در صورتی که برش صفر باشد
پس می‌توانیم خمش خالص داشته باشیم ولی نمی‌توانیم برش خالص داشته باشیم

مثال) ماده را فولاد در نظر می‌گیریم.
(چون باید رابطه‌ای بین E و G داشته باشیم)



ضریب پواسون (داده مسئله) $\nu = 0.3$: برای فولاد

هر وقت به ما ν (ضریب پواسون) را دادند در واقع خواسته‌اند که رابطه‌ی E و G را به ما بدهند که در نتیجه باید برش را محاسبه کرد.

$$U_{ext} = \frac{1}{2} P \Delta$$

$$U_{int} = U_{int}^{M} + U_{int}^{V}$$

$$U_{int} = \frac{1}{6}\frac{P^2 l^3}{EI}$$

Subject
Date

$$U_{int}^{v} = \frac{1}{2} \times 1.2 \int_0^l \frac{P^2}{GA} dx = 0.6 \frac{P^2 l}{GA}$$

$$\Delta = \frac{Pl^3}{3EI} + 1.2 \frac{Pl}{GA}$$

سه روش قبلی (انتگرال گیری، کار سطح و تیر مزدوج) اثر برش را در نظر نمی گرفتند.
(جمله ی $1.2 \frac{Pl}{EA}$ را در نظر نمی گرفتند)

* می خواهیم ببینیم تأثیر برش بر روی Δ چه میزان است و تقریب ما در سه روش قبلی تا کجا قابل اطمینان است.

← برای مقطع مرجع مستطیل (برای سایر مقطع ها نیز تقریباً همین است) (برای سایر مواد نیز تغییر آن چندانی نخواهد داشت)

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{E}{2.6}$$

$$\frac{U_{int}^{v}}{U_{int}^{m}} = \frac{0.6 \frac{P^2 l}{\frac{E}{2.6} bh}}{\frac{1}{6} \cdot \frac{P^2 l^3}{E \times \frac{1}{12} bh^3}} = \underbrace{0.3 \times 2.6}_{0.78} \left(\frac{h}{l}\right)^2$$

- برای یک تیر معمولی انرژی برشی در مقابل انرژی خمشی ناچیز است (دارای order مقدار مثلاً 0.01 است)
- برای " " که نسبت $\left(\frac{h}{l}\right)$ کوچک است سهم برش در تغییر شکل ناچیز است.
- اگر تیری ارتفاع جان (h) زیاد باشد سهم برش (نسبت $\frac{h}{l}$ کم) قابل توجه می شود.

← برای تیری که انرژی برشی در آن هم نسبت تیر برنولی است تیر برنولی است که نسبت $\frac{h}{l}$ در آن کم است و انرژی برشی در آن هم نسبت
" " " " است تیر تیموشنکو
(نسبت $\frac{h}{l}$ بالا و نیاز به وارد کردن در محاسبات)

- اگر بار زیاد باشد جان تیر را افزایش می دهند در کشتی ها (شاه تیر) یا (تیر تیموشنکو) زیاد است.
- در پل ها تیر تیموشنکو زیاد است.

- در این درس به تیر تیموشنکو پرداخته نمی شود.

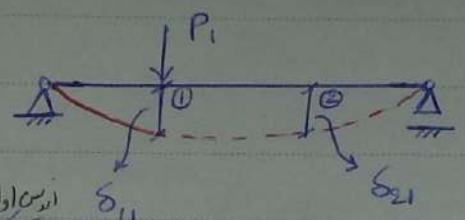
Subject
Date

روش انرژی

قانون تقابل بتی - ماکسول ← (برای سازه‌های خطی)

می‌خواهیم مشکلات روش انرژی (چند بار نمی‌توانیم وارد کنیم، در ابتدای غیر تام نمی‌توانیم محاسبه کنیم $P \to \delta$ می‌دهد) حل کنیم

(نمی‌توانیم (صورت داشتن بیش از یک بار δ را محاسبه کنیم و δ را فقط برای نقطه اعمال بار می‌توانیم محاسبه کنیم)



کار خارجی

$$U = \frac{1}{2} P_1 \delta_{11}$$

در واقع باید U

ابتدا به سازه بار P_1 را اعمال می‌کنیم (صعودیاً به صورت تدریجی)

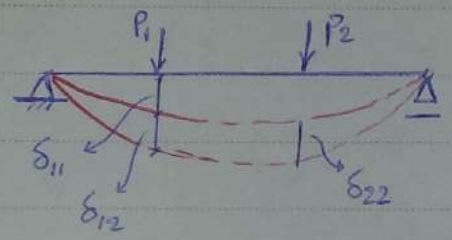
اندیس اول

محل اندازه‌گیری جابه‌جایی

محل اعمال بار

اندیس دوم

بار P_2 را اضافه می‌کنیم پس تغییر شکل جدید داریم، چون سازه خطی است تغییر شکل مرحله دوم ربطی به مرحله اول ندارد.

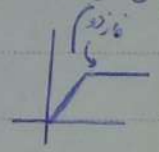


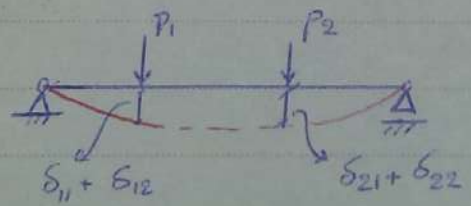
اگر بار از صفر وارد شود، $\frac{1}{2}$ می‌شود، در مرحله دوم فاز که نیروی P_2 را اضافه می‌کنیم نیروی 1 به نهایت خود رسیده (کامل است) پس ضریب $\frac{1}{2}$ نمی‌شود.

$$U = P_1 \delta_{12} + \frac{1}{2} P_2 \delta_{22}$$

کامل برابر جمع دو U بالا می‌باشد.

سازه مبدای P_1 تغییر شکل داده، حال اگر بار P_2 را به صورت تدریجی اعمال کنیم و بخواهیم کار نیروهای خارجی را بدهیم، P_1 به نهایت خود رسیده و کامل وارد می‌شود.





در این حالت دو نیرو را همزمان وارد می‌کنیم.

در این حالت P_1 و P_2 هر دو به صورت تدریجی وارد می‌شوند تا به نهایت خود برسند پس هر دو $\frac{1}{2}$ می‌شوند.

$$U = \frac{1}{2} P_1 (\delta_{11} + \delta_{12}) + \frac{1}{2} P_2 (\delta_{22} + \delta_{21})$$

(به ازای هر دو حالت) (یعنی تغییر شکل نهایی)

آیا بدست آمده برابرند؟ ←

سازه خطی است یعنی ترتیب بارگذاری در نتیجه بتی تأثیر است پس تغییر شکل سازه یعنی δ ثابت است. اگر δ را به δ تبدیل و در EI ضرب کنیم M بدست می‌آید. پس M بدست می‌آید که برابر است. از آنجا برای نتیجه می‌شود که انرژی‌های داخلی برابر است و در نتیجه انرژی‌های خارجی برابر است.

برای هر دو حالت

چون انرژی‌های داخلی با خارجی برابرند

Subject
Date

تساوی زیر را می‌نویسیم:

$$\frac{1}{2}P_1\delta_{11}+\frac{1}{2}P_2\delta_{22}+P_1\delta_{12}=\frac{1}{2}P_1\delta_{11}+\frac{1}{2}P_1\delta_{12}+\frac{1}{2}P_2\delta_{22}+\frac{1}{2}P_2\delta_{21}$$

قانون تقابل بتی - ماکسول

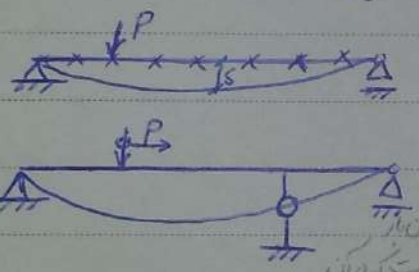
$$P_1\delta_{12}=P_2\delta_{21}$$

جابه‌جایی نقطه‌ی یک ناشی از بار نقطه‌ی دو ضرب در بار یک برابر جابه‌جایی نقطه‌ی دو در اثر بار یک ضرب در بار دو (تقریباً)

فرض می‌کنیم $P_1=P_2 \Rightarrow \delta_{12}=\delta_{21}$ ← نتیجه

اگر جای بارگذاری و اندازه‌گیری را عوض کنیم عدد خوانده شده عوض نمی‌شود. (چه در نقطه A نیرو وارد کنیم و در B اندازه‌گیری کنیم و چه در B نیرو وارد کنیم و در A اندازه‌گیری کنیم نتیجه یکسان است).

مثلاً می‌خواهیم تغییر شکل تیر را تحت یک بار مشخص اندازه بگیریم. برای این کار، می‌توان در تمام نقاط (یا نهایت نقطه) gage گذاشت و بار را ثابت در نظر گرفت و تغییر شکل را محاسبه کرد.



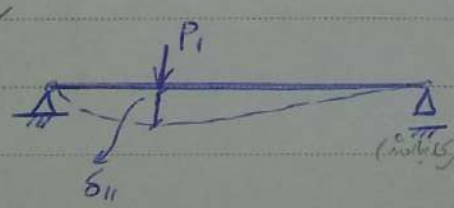
ولی کار بهتر این است که یک gage در یک نقطه ثابت قرار دهیم و بار را متحرک کنیم (خودمان مدام موقعیت آن را تغییر دهیم.)

(در واقع این یک gage باید در محلی که قرار بود ثابت باشد قرار گیرد و هر جا که بار از محل بار نشان می‌دهد برای اندازه‌گیری جابه‌جایی است که در آن نقطه رخ می‌دهد.)

(روش بالا مشروط به خطی بودن سازه است)

روش بار واحد

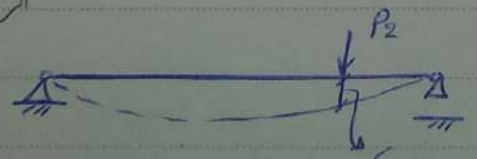
اگر بر سازه فقط بار P_1 اعمال شود



M_1: لنگر ناشی از بار یک در سازه ($M_1(x)$) (در صورتی که تنها اعمال شود و بارهای دیگری نباشد)

$$U=\frac{1}{2}P_1\delta_{11}=\frac{1}{2}\int\frac{M_1^2}{EI}dx$$

اگر بر سازه فقط بار P_2 اعمال شود

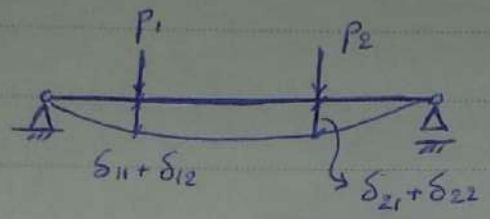


$$U=\frac{1}{2}P_2\delta_{22}=\frac{1}{2}\int\frac{M_2^2}{EI}dx$$

M_2: لنگر ناشی از بار دو در سازه ($M_2(x)$) (در صورتی که تنها اعمال شود و بارهای دیگری نباشد)

Subject
Date

سازه را تحت بار یک و دو به صورت همزمان قرار می‌دهیم.



کار ناشی از نیروهای خارجی

$$U=\frac{1}{2}P_1(\delta_{11}+\delta_{12})+\frac{1}{2}P_2(\delta_{22}+\delta_{21})=\frac{1}{2}\int\frac{(m_1+m_2)^2}{EI}dx$$

بر اساس قانون بتی ماکسول برابر هستند.

$$\frac{1}{2}\cancel{P_1\delta_{11}}+\underbrace{\frac{1}{2}P_1\delta_{12}}_{\frac{1}{2}P_2\delta_{21}}+\frac{1}{2}P_2\delta_{21}+\frac{1}{2}\cancel{P_2\delta_{22}}=\cancel{\frac{1}{2}\int\frac{m_1^2}{EI}dx}+\frac{1}{2}\cancel{\int\frac{m_2^2}{EI}dx}+\int\frac{m_1m_2}{EI}dx$$

$$P_2\delta_{21}=\int\frac{m_1m_2}{EI}dx$$

روش انرژی برای محاسبه بار همزمان

یک بار، بار را در نقطه یک گذاشته m_1 را محاسبه می‌کنیم و یک بار بار را در نقطه دو گذاشته m_2 را بدست می‌آوریم P_2 را هم که داریم پس δ_{21} بدست می‌آید.

فرض: $P_2=1 \Rightarrow \delta_{21}=\int\frac{m_1m_2}{EI}dx$ (گذر بار واحد در نقطه 2 (بدون شماره))

(زیرا به جای یک بار: $\delta_{22}+\delta_{21}$ ✓)

اندیس‌ها را می‌توان حذف کرد (m_1: گذر بار خارجی)

تاکنون فقط می‌توانستیم δ را برای محل اعمال بار محاسبه کنیم اما با استفاده از این فرمول می‌توان δ را برای نقطه‌ای دیگر سازه به ازای آن بار بدست آورد.

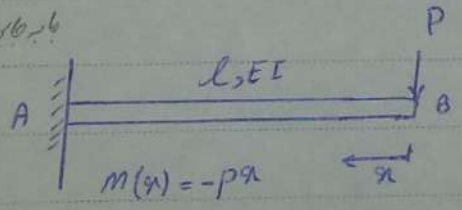
$$\delta=\int\frac{m\bar{m}}{EI}dx \quad , \quad \theta=\int\frac{m\bar{m}}{EI}dx$$

گذر بار خارجی — گذر بار واحد — گذر بار واحد

برای محاسبه δ بار واحد قرار می‌دهیم و برای محاسبه θ گذر واحد قرار می‌دهیم.

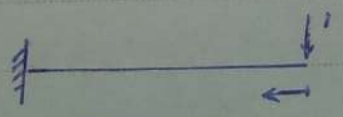
استفاده از روش بار واحد برای محاسبه‌ی جابه‌جایی نقطه مورد نظر

مثال) می‌خواهیم تغییر شکل سازه را محاسبه کنیم.



$m(x)=-Px$

ابتدا باید گشتاور ناشی از بار خارجی را محاسبه کنیم.



$\bar{m}(x)=-x$

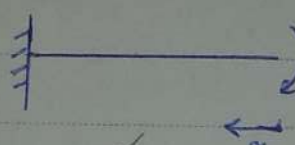
مبدأ را در هر دو طرف می‌توان در نظر گرفت ولی سمت راست در نظر می‌گیریم.

← در نقطه‌ای که می‌خواهیم به جابه‌جایی را می‌خواهیم یک بار واحد قرار می‌دهیم. (جهت بار اختیاری است)

Subject
Date

$$\Delta_B = \int \frac{M\bar{m}}{EI}\,dx = \int_0^{l} \frac{(-Px)(-x)}{EI}\,dx = \frac{Px^3}{3EI}\Big|_0^{l} = \frac{Pl^3}{3EI}$$

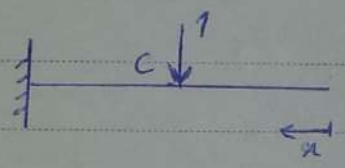
می‌خواهیم دوران را در نقطه انتهایی بدست آوریم پس در آنجا لنگر واحد قرار می‌دهیم جهت این لنگر اختیاری است. (ساعتگرد یا پادساعتگرد)



$$\theta_B = \int \frac{M\bar{m}}{EI}\,dx = \int_0^{l} \frac{(-Px)(-1)}{EI}\,dx = \frac{Pl^2}{2EI}$$

در روش بار واحد، جهت مثبت جهت بار واحد است. (مثلاً در اینجا اگر لنگر واحد ساعتگرد باشد، در صورتی که θ هم ساعتگرد باشد مثبت می‌شود.)

در این روش جهت مثبت، جهت بار واحد است. اگر بار واحد (یا جفت لنگر واحد) به سمت پایین باشد جهت مثبت به سمت پایین است.



$$\bar{m}(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < \frac{l}{2} \\ -\left(x - \frac{l}{2}\right) & \frac{l}{2} < x < l \end{cases}$$

از 0 تا $\frac{l}{2}$ که صفر است مقدار انتگرال صفر است.

$$\Delta_C = \int_{l/2}^{l} \frac{(-Px)\left(-\left(x - \frac{l}{2}\right)\right)}{EI}\,dx = \frac{P}{EI}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2 l}{4}\right)\Big|_{\frac{l}{2}}^{l}$$

$$= \frac{Pl^3}{EI}\left[\underbrace{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)}_{\frac{1}{12}} - \underbrace{\left(\frac{1}{24} - \frac{1}{6}\right)}_{\frac{-1}{48}}\right]$$

$$= \frac{3Pl^3}{48EI}$$

$\int \frac{M\bar{m}}{EI}dx$

لنگر بار خارجی

در استفاده از فرمول بالا، تابع M را در تابع $\bar{m}$ ضرب می‌کنیم و انتگرال آن را محاسبه می‌کنیم. تابع M می‌تواند درجه‌ای باشد (دو، سه و ...)

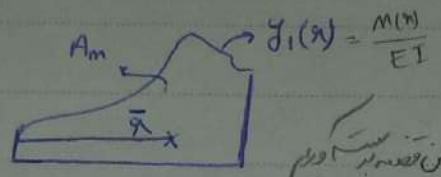
تابع $\bar{m}$ درجه یک است چون بار آن ثابت است. (برای θ که $\bar{m}$ درجه صفر است)

محاسبه‌ی این انتگرال دشوار است. پس قضیه مور - برنشچاگین را بیان می‌کنیم.

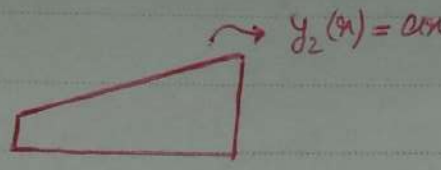
←

Subject
Date

قضیه مور - برشچالین



اگر تابع دلخواهی را در یک تابع خطی ضرب کنیم می‌توانیم حاصل انتگرال حاصل ضرب را از این قضیه بدست آوریم
(یکی نماینده $\frac{M}{EI}$ و دیگری نماینده $\bar{m}$ است).



انتگرال یک تابع دلخواه در یک تابع خطی

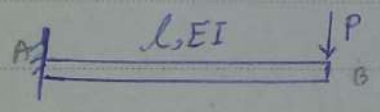
$$\int y_1(x) \cdot \underbrace{y_2(x)}_{\text{تابع خطی}} dx = \int y_1(x)(ax+b)\,dx = a\underbrace{\int y_1(x)\,x\,dx}_{A_m \times \bar{x}} + b\underbrace{\int y_1(x)\,dx}_{A_m}$$

$$= A_m(a\bar{x}+b) = A_m \times \underbrace{y_2(\bar{x})}_{\text{مرکز سطح ذوزنقه}}$$

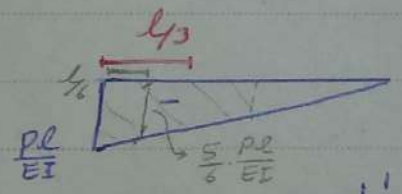
پس با محاسبه مساحت زیر نمودار $\frac{M}{EI}$ و مرکز سطح آن می‌توان انتگرال فرمول را محاسبه کرد.

شرط استفاده از قضیه بالا، ← صفحه بعد

مثال)

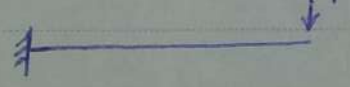


y_2 حتماً باید خطی باشد.

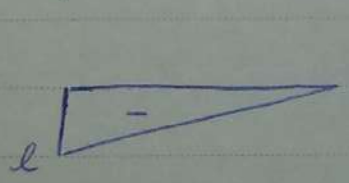


شکل ①

نمودار $\frac{M}{EI}$ را می‌کشیم.



مرکز ثقل شکل ۱ را یافته، در شکل ۲ قرار می‌دهیم و مقدار شکل ۲ را می‌یابیم.



شکل ②

اگر مساحت زیر نمودار $\frac{M}{EI}$ منفی بود، اضافه می‌شود.

$$\Delta_{B\,1\times2} = \left(-\frac{Pl}{EI} \times \frac{l}{2}\right) \times \frac{-2}{3}l = \frac{Pl^3}{3EI}$$

شکل یک ضرب در دو

مرکز ثقل شکل اول را یافته در دوم قرار می‌دهیم و مقدار آن را می‌یابیم.

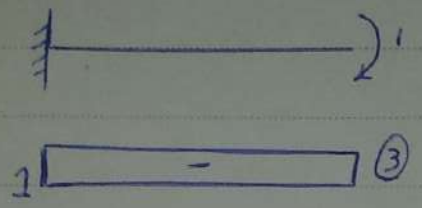
روش بار واحد برای یافتن جابجایی یک نقطه از سازه:

۱- رسم نمودار $\frac{M}{EI}$ ۲- یافتن مرکز سطح زیر نمودار $\frac{M}{EI}$ تلاقی مورد نظر ۳- قرار دادن بار واحد ۴- رسم نمودار لنگر بار واحد ۵- استفاده از قضیه سطح الممان

Subject

Date

برای محاسبه دوران در نقطه مورد نظر، لنگر متمرکز به اندازه ۱ یک را در آن نقطه قرار می‌دهیم.

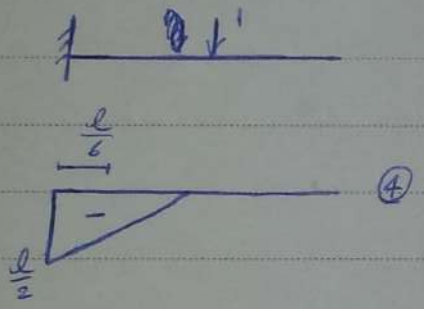


نمودار لنگر

چون نمودار ③ ثابت است، دیگر نیروی ندارد مرکز سطح را به روی آن انتقال دهیم.

$$\underset{1\times 3}{\theta_B} = -\frac{Pl}{EI}\times\frac{l}{2}\times(-1) = \frac{Pl^2}{2EI}$$

برای محاسبه جابجایی در وسط:



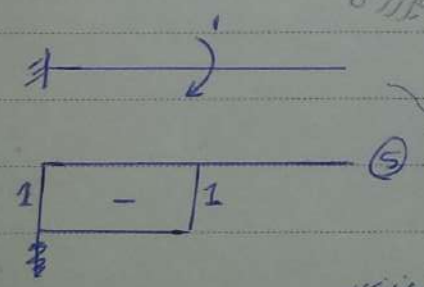
انتگرال فرمول برای قسمت های پیوسته قابل محاسبه است.

اگر پیوسته نبود باید قسمت قسمت محاسبه شود.

← (فواصلی که توابع در آن ضرب می‌شوند باید پیوسته باشند)

← چون شکل ۳ و 4 هر دو خطی هستند پس می‌توان هر کدام را که می‌خواهیم m فرض کنیم. (برای راحتی در محاسبه) (تا دیگر مرکز (در صورتی که نمودار M و m هر دو خطی بودند برای راحتی در محاسبه می‌توانیم هر کدام را که خواستیم m فرض کنیم تا دیگر مرکز انتقال صورت را لازم نداشته باشیم)

دوران در نقطه C



$$\underset{1\times 4}{\Delta_C} = -\frac{l}{2}\times\frac{l}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{-5}{6}\frac{Pl}{EI} = \frac{5}{48}\frac{Pl^3}{EI}$$

$$\underset{1\times 5}{\theta_C} = -\frac{1}{2}\left(\frac{Pl}{EI}+\frac{Pl}{2EI}\right)\times\frac{l}{2}\times(-1) = \frac{3}{8}\cdot\frac{Pl^2}{EI}$$

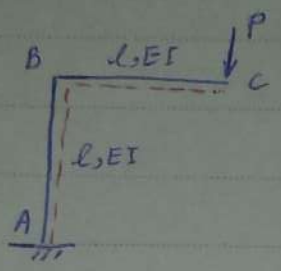
$$= \left(-1\times\frac{l}{2}\right)\times\left(\frac{-3}{4}\frac{Pl}{EI}\right) = \frac{3Pl^2}{8EI}$$

در اینجا نیاز به جابجایی شکل‌ها نیست.

Subject
Date

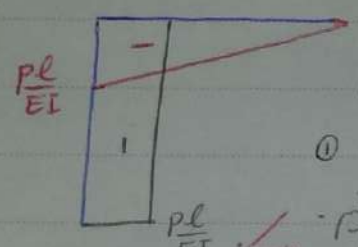
استفاده از روش بار واحد برای قاب

مثال برای قاب) (چون می‌خواهیم نشان دهیم که این روش هیچ محدودیتی ندارد)



در روش بار واحد برای قاب ابتدا تعیین تار پاسخ و سپس رسم نمودار لنگر $\frac{M}{EI}$

مثلاً اگر بخواهیم وسط BC را بدست آوریم فرض می‌کنیم که مساحت مقطع راست را بدست آوردیم و یا خمش بیت و در مقدار M بار واحد را برای مرکز سطح آن حاصل کنیم



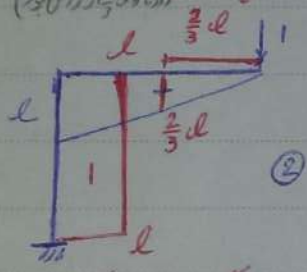
(مرکز سطح در قسمت $\frac{M}{EI}$)

نکته مهم: تفاوتی ندارد که $\bar{M}$ را از کدام سمت در نظر بگیریم. (چون مقدار نمودار لنگر بار واحد در آن نقطه را می‌خواهیم)

① در سازه‌هایی مثل قاب که نمودار لنگر چند شکستگی دارد، کافی است مساحت هر قسمت مورد نظر از $\frac{M}{EI}$ را بیابیم و مقدار نمودار لنگر بار واحد برای مرکز سطح آن را محاسبه کنیم و تقسیم مورد را برای هر قسمت نوشته و در آخر با هم جمع کنیم.

برای یافتن جابه‌جایی قائم در نقطه C باید یک بار قائم در این نقطه قرار دهیم.

(در واقع دوران $\frac{2}{3}l$ از راس بود)



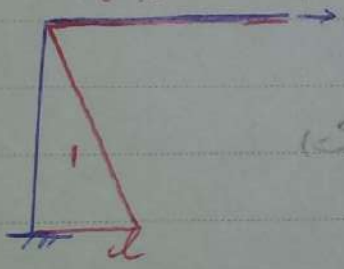
②

$$\underset{1\times 2}{\Delta_{C_V}} = -\frac{1}{2}\frac{Pl}{EI}\times l\times -\frac{2}{3}l + \frac{-Pl}{EI}\times l\times(-l) = \frac{4}{3}\frac{Pl^3}{EI}$$

برای یافتن جابه‌جایی یک نقطه در هر راستایی کافی است که یک بار عمودی واحد در آن راستا قرار دهیم.

(اگر جابه‌جایی در دو راستای عمود بر هم را بدست آوریم، جابه‌جایی‌ها را می‌توانیم بیابیم)

بار محوری گشتاور سازه ایجاد نمی‌کند



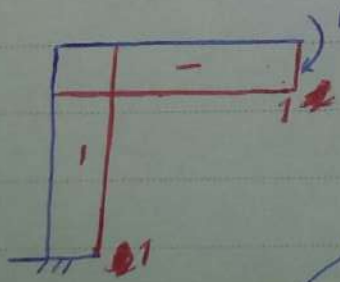
③

$$\underset{1\times 3}{\Delta_{C_H}} = -\frac{1}{2}l\times l\times\frac{-Pl}{EI} = \frac{Pl^3}{2EI}$$

(شکل را جابه‌جا کردیم) (یکی مستطیل و یکی مثلث بود ولی ایراد ندارد)

(روش کلی سطح نمی‌توانست جابه‌جایی افقی را محاسبه کند)

برای یافتن دوران در C:



④

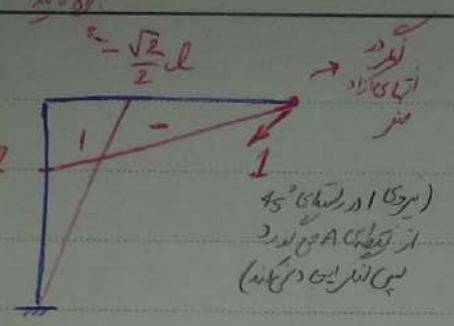
$$\underset{1\times 4}{\theta_C} = \frac{Pl}{EI}\times\frac{l}{2}\times(-1) + \frac{-Pl}{EI}\times l\times(-1) = \frac{3}{2}\frac{Pl^2}{EI}$$

ممکن است به هر دلیلی، جابه‌جایی یک نقطه را در یک راستای مشخص بخواهیم بدست آوریم.

←

Subject
Date

نشان می‌دهد 45°



(راستا مهم است اما جهت مهم نیست)

می‌توان در هر دو جهت در نظر گرفت.

راستا در اولویت اول و جهت در اولویت دوم است.

$$\Delta_{C_{1\times 5}} = -\frac{Pl}{EI}\times\frac{l}{2}\times\left(-\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}l\right)+\frac{-1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}l\times l\times\frac{-Pl}{EI}=\frac{5}{12}\frac{\sqrt{2}Pl^3}{EI}$$

(جابه‌جایی نقطه در راستای 45°)

(برای مثال اگر یک دکل را با یک کابل مهار کنیم، جابه‌جایی نقطه در جهت کابل مهم است تا بدانیم کابل کشیده می‌شود یا نه)

چون روش‌های دیگر نمی‌توانستند تغییر شکل محوری را محاسبه کنند.

تغییر شکل خرپا

(در این نقطه‌ها چون غیر محوری است، فقط می‌توان از روش انرژی استفاده کرد.)

در فرمول Δ در خرپا، به جای M، از P استفاده می‌کنیم و به جای EI از EA استفاده می‌کنیم (فرمول تغییر شکل محوری $\Delta=\frac{PL}{EA}$)

برای تیر $\Delta=\int\frac{M\bar{m}}{EI}dx$

P: بار محوری در عضو از ای وارد شده بار خارجی به خرپا

$\bar{P}$: بار محوری در عضو به ازای واحد بار گذاشته شده در نقطه‌ی مورد نظر برای محاسبه جابه‌جایی

چون غیر محوری نشی از بار به مراتب از نیروی محوری ناشی از فنر بیشتر است پس اثبات در نظر نمی‌گیریم

برای خرپا (برای هر عضو) $\Delta=\int\frac{P\bar{P}}{EA}dx=\frac{P\bar{P}l}{EA}$

نسبت محوری

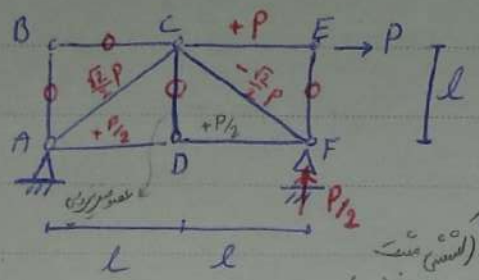
خرپا یک عضو نیستند بلکه تعداد زیادی عضو هستند. پس برای همه آن‌ها باید جمع شوند.

$$\Delta=\sum_{i=1}^{n}\frac{P_i\bar{P}_i l_i}{(EA)_i}$$

$\frac{\sqrt{2}}{2} F_{AC} = \frac{P}{2}$

Subject
Date

مثال)



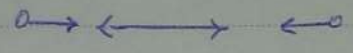
دقت: مثبت و منفی کششی یا فشاری بودن اعضای خرپا باید لحاظ شود

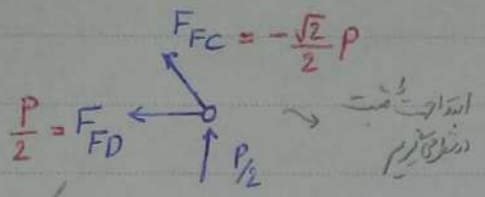
(کششی مثبت و فشاری منفی)

(فاصله‌های بزرگ را با خرپا می‌پوشانند.)

نیرو به سمت داخل گره منفی، نیرو از گره به سمت بیرون مثبت است.

(به سمت نیرو مثلاً چپ یا راست بودن کاری نداریم)





ابتدا جهت مثبت در نظر می‌گیریم

گره C متعادل نیست (هندسه متعادل است ولی نیروهای داخلی متعادل نیست)

گره D باید در راستای y تعادل داشته باشد پس: $\frac{\sqrt{2}}{2}P$

برای یافتن تغییر شکل خرپا:

۱- یافتن نیروهای تک‌تک اعضا به ازای بار اندازی خارجی

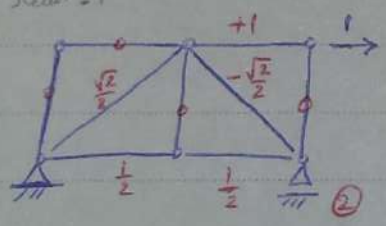
۲- قرار دادن بار واحد در نقطه‌ای مورد نظر برای یافتن جابجایی

۳- یافتن نیروهای محوری اعضا به ازای بار واحد

۴- استفاده از فرمول $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i \bar{P}_i l_i}{(EA)_i}$

اگر جابجایی نقطه E را بخواهیم:

معمولاً در خرپاها مشابه داریم، یکی را حساب می‌کنیم و برای بقیه استفاده می‌کنیم.



$$\Delta_{\substack{E \\ 1\times 2}} = \frac{P \times 1 \times l}{EA} + 2\,\frac{\frac{P}{2} \times \frac{1}{2} \times l}{EA} + 2\,\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}P \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{2}\,l}{EA}$$

$$= \frac{Pl}{EA}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

برای حالت وارد شدن هم زمان دو بار به سازه؟

روش انرژی هم سازه‌ی خمشی و هم سازه‌ی خرپایی با خصوصیت بار محوری را پاسخ می‌دهد.

روش انرژی و روش بار واحد را تا اینجا بررسی کردیم.

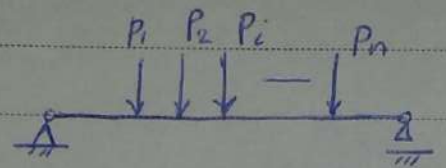
Subject
Date

روش کاستیلیانو

این روش از روش انرژی بار واحد قدیمی تر است.

برای این روش اثبات های مختلفی وجود دارد.

ساده برای مثال



قضیه اول

* تعداد بارها که بی نهایت برود ← بار گسترده

لنگر ناشی از بار واحد

$$M(x) = P_1 \bar{M}_1 + P_2 \bar{M}_2 + \dots + P_i \bar{M}_i + \dots + P_n \bar{M}_n$$

M لنگر ناشی از بار واحد در نقطه i ام بار در نقطه i ام

انرژی ناشی از بار خمشی $\quad U = \frac{1}{2}\int \frac{M(x)^2}{EI}\,dx$

از انرژی نسبت به بار مشتق می گیریم

$$\frac{\partial U}{\partial P_i} = \frac{\partial U}{\partial M} \cdot \frac{\partial M}{\partial P_i}$$

چون انتگرال بر حسب x و مشتق ما بر حسب M پس انتگرال اثری در مشتق ندارد

فرمول روش بار واحد بدست آمد.

$$= \int \frac{M}{EI} \cdot \bar{M}_i\,dx = \delta_i$$

قضیه اول:

$$\frac{\partial U}{\partial P_i} = \delta_i$$

مشتق جزئی اول انرژی داخلی نسبت به هر نیرویی که به سیستم موثر است، برابر تغییر مکان الاستیک نقطه اثر نیروی در امتداد نیرو می باشد.
(شامل کوپل و دوران زاویه ای نیرو می باشد)

پس مشتق انرژی نسبت به بار برابر است با تغییر شکل (در اثر بار)

قضیه دوم:

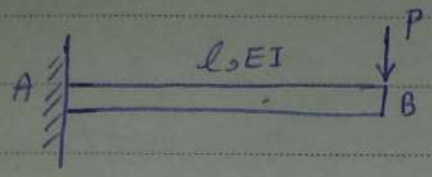
$$\frac{\partial U}{\partial \delta_i} = P_i$$

← U را معمولاً به صورت تابعی از بار می نویسیم و روش بالا کاربرد کمتری دارد.

نکته: با وجود روش بار واحد، مزیتی برای این روش نمی توان قائل شد اما در بعضی جاها به جای روش بار واحد از این روش باید استفاده کرد.

Subject
Date

مثال)



$$U = \frac{1}{6} \cdot \frac{P^2 l^3}{EI}$$

برای یافتن جابه‌جایی در نقطه نسبت به نیروی اعمالی در آن نقطه مشتق می‌گیریم.

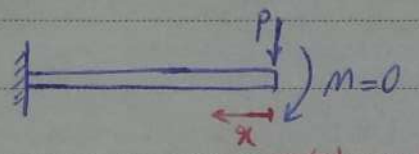
$$\Delta_B = \frac{\partial U}{\partial P}\Big|_{P=P} = \frac{Pl^3}{3EI}$$

نوشتیم Δ_B چون P در نقطه‌ی B اعمال می‌شود.

اگر در آن نقطه نیرویی وجود نداشت یک نیروی فرضی با جهت دلخواه قرار می‌دهیم. (یا از بیست می‌گیریم و بعد از محاسبه مشتق مقدار آن نیرو را برابر صفر قرار می‌دهیم)

اگر دوران نقطه‌ی B را بخواهیم (θ_B) باید از لنگر نقطه‌ی B مشتق بگیریم. در اینجا نداریم پس لنگر فرضی m را قرار می‌دهیم، محاسبات را انجام می‌دهیم و بعد مقدار m را صفر قرار می‌دهیم.

(اگر در سازه لنگری در نقطه B داشتیم مقدار آن را قرار می‌دهیم) در رابطه مشتق



$$m(x) = -Px - m$$

در روش کاستیلیانو: ابتدا انرژی U به ازای بار یا لنگر برای یافتن جابه‌جایی یا دوران آن سپس محاسبه مشتق و بعد مقدار گذاری

$$\theta_B = ?$$

$$\theta_B = \frac{\partial U}{\partial m}\Big|_{m=0}$$

اگر در نقطه‌ی B لنگری داشتیم مقدار آن را قرار می‌دهیم.

$$U = \frac{1}{2}\int \frac{(-Px - m)^2}{EI}\,dx = \frac{1}{2EI}\int_0^l (P^2x^2 + m^2 + 2Pmx)\,dx$$

$$= \frac{1}{2EI}\left[\frac{P^2 l^3}{3} + m^2 l + Pml^2\right]$$

$$\frac{\partial U}{\partial m} = \frac{1}{2EI}\left[0 + 2ml + Pl^2\right]$$

$$\theta_B = \frac{\partial U}{\partial m}\Big|_{m=0} = \frac{Pl^2}{2EI}$$

← این روش زمانی که تعداد بارگذاری افزایش می‌یابد، باعث سختی محاسبه m^2 می‌شود. پس روش بار واحد که از مساحت سطح استفاده می‌کرد بهتر است.

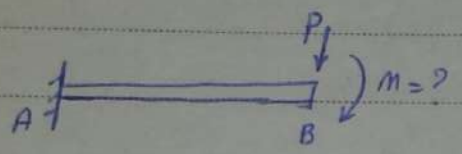
Subject
Date

کاربرد مهم قضیه کاستیلیانو.

سیستم های کنترلی، سیستم های مکانیکی برقی هستند. برای مثال تخت آمبولانس در بیمارستان از طریق جک های هیدرولیکی کنترل آن ثابت می شود.

چیزهایی که مقدار انرژی لازم برای گسیختگی سیستم است. پس برای جلوگیری از گسیختگی سیستم باید انرژی را از طریق توزیع نیرو و منسجم کردن آن کاهش داد. از طریق قضیه کاستیلیانو می توان انرژی داخلی سازه را حداقل کرد. از روش کاستیلیانو برای کنترل سازه استفاده می شود.

مثال) در سازه ی داده شده مقدار لنگر را به گونه ای تعیین نمایید که انرژی داخلی سازه حداقل شود.



به ازای این m قرار است که U مینیمم شود پس $\frac{\partial U}{\partial m}$ به ازای این m باید صفر شود.

$$\frac{\partial U}{\partial m} = \theta_B \qquad U_{min} \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial m} = 0$$

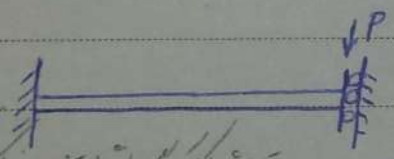
$\theta_B = 0$

باید به اندازه ای به سازه لنگر وارد کنیم که دوران B صفر شود.
پس دانشمندها باید جلوی دوران را بگیرند.

$$U_{min} \rightarrow \theta_B = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial m} = 0 \Rightarrow 2mL + Pl^2 = 0 \Rightarrow m = -\frac{1}{2}Pl$$

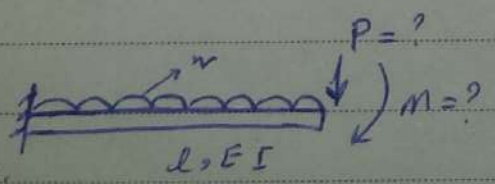
پس ($\theta_B = 0$) معادل این است که سازه به صورت زیر درآید:



دقت شود که تکیه گاه برشی استفاده نمی کنیم بلکه با لنگر کنترل می کنیم

(از طریق حل این سازه ی نامعین نیز می توان به m رسید که در فصل های بعد بررسی می شود.)

مثال) در سازه ی داده شده مقدار P و m را به گونه ای تعیین نمایید که انرژی داخلی حداقل شود.



$$M(x) = -Px - m - \frac{wx^2}{2}$$

برای مینیمم کردن انرژی باید مشتق U نسبت به هر نیرو که قرار است باعث جدایی انرژی شود برابر صفر قرار داده شود.

برای یک سازه ی ایمن انرژی هم باید مینیمم شود و هم این که پخش شود تا تا یک اینجا جلو دهد.

Subject
Date

$$U = \frac{1}{2}\int \frac{P^2x^2 + m^2 + w^2x^4/4 + 2Pxm + Pwx^3 + mwx^2}{EI}\,dx$$

$$U = \frac{1}{2EI}\left[\frac{P^2l^3}{3} + m^2 l + \frac{w^2l^5}{20} + Pml^2 + \frac{Pwl^4}{4} + mwl^3/3\right]$$

باید نسبت تابع نسبت به یک یک متغیرها برابر صفر قرار داده شود.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial P} = 0 \Rightarrow \dfrac{2Pl^3}{3} + 0 + 0 + ml^2 + \dfrac{wl^4}{4} + 0 = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial U}{\partial m} = 0 \Rightarrow 0 + 2ml + 0 + Pl^2 + 0 + wl^3/3 = 0 \end{cases}$$

(مثلاً) دو معادله و دو مجهول را به صورت ماتریسی حل می‌کنیم:

ماتریس ضرایب باید متقارن باشد

$$\begin{bmatrix} 2l^3/3 & l^2 \\ l^2 & 2l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P \\ m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -wl^4/4 \\ -wl^3/3 \end{Bmatrix}$$

می‌توانست تقارن بهم نخورد ولی لمه چیز دیگر باشد (جای P و m عوض شود)

(به صورتی که معادله اول برای m و مجهول اول m و معادله دوم برای P و مجهول دوم P باشد یا برعکس انتظار تقارن داریم.

وقتی ماتریس ضرایب را به طور معکوس بریم جای دو درایه قطر اصلی را عوض می‌کنیم و دو درایه دیگر را در منفی ضرب می‌کنیم و یک بر دوی دترمینان را نیز در ماتریس ضرب می‌کنیم.

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} P \\ m \end{Bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{\frac{1}{3}l^4}}_{\text{یک بر دوی دترمینان}} \begin{bmatrix} 2l & -l^2 \\ -l^2 & 2l^3/3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -wl^4/4 \\ -wl^3/3 \end{Bmatrix}$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{6} \xrightarrow{\times 3} -\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4} - \frac{2}{3} = \frac{3-8}{36} = \frac{1}{36}$$

$$= \begin{Bmatrix} -wl/2 \\ wl^2/12 \end{Bmatrix}$$

مساوی صفر قرار می‌دهیم برای صفر کردن

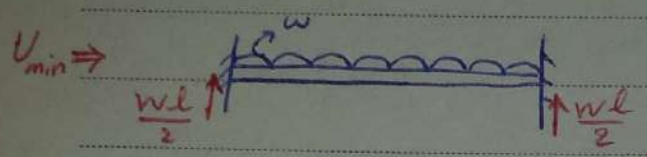
$$\frac{\partial U}{\partial P} = \Delta_B = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial m} = \theta_B = 0$$

روش دوم برای کنترل

Subject
Date

پس U_{min} معادل این است که سازه مشابه دو سر گیردار تحمل کند (ما سازه را دو سر گیردار نمی کنیم و سازه را با بار و لنگر کنترل می کنیم)



سازه متقارن و واکنش های تکیه گاهی نصف هستند

از روش کاستیانو برای محاسبه تغییر شکل سازه کم استفاده می شود (اما برای کنترل از آن استفاده می شود.

خاتمه بخش محاسبه تغییر شکل سازه ها

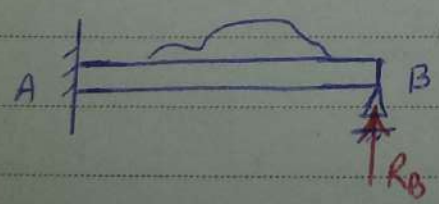
می خواهیم به تحلیل و بررسی سازه های نامعین بپردازیم. بیش از ۹۰٪ از سازه های ساخته شده به صورت نامعین بوده و درجه ی نامعینی بالایی دارند.

برای سازه های با درجه نامعینی بالا از رایانه (کامپیوتر) استفاده می شود.

سازه های نامعین

تحلیل سازه های یک درجه نامعین

- بیش از دو درجه نامعین را برای امتحان بررسی نخواهیم کرد.
- نامعینی به معنای بیشتر بودن مجهولات از معادلات می باشد.
- برای حل سازه های نامعین دو روش برخی و سختی و یا نیرو و جابه جایی وجود دارد.



یکی از واکنش ها اضافه است. (یعنی از معادلات تعادل بدست نمی آید)

برای حل سازه های یک درجه نامعین باید یکی از واکنش های تکیه گاهی را تعیین کنیم را حذف کنیم.

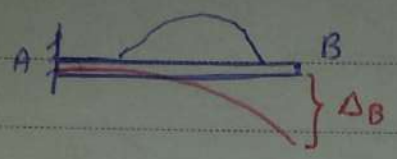
در راستای R_A را می توانیم حذف کنیم. (پس اضافه نیست)

وقتی می گوییم کدام واکنش اضافه است از بین واکنش های تکیه گاهی که می توانیم تعیین کنیم.

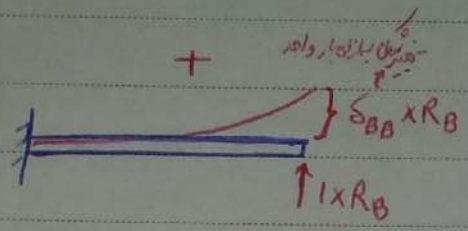
Subject
Date

111

نیروی R_B یعنی تکیه گاه B را حذف می کنیم.



- تغییر شکلی را حذف می کنیم که متناظر با نیروی حذف شده است.



- تکیه گاه را حذف کردیم پس باید جابه جایی در راستای تکیه گاه Δ_B را محاسبه کنیم. محاسبه θ_B فایده ای ندارد. چون تکیه گاه غلتکی بود و اجازه دوران می داد اما اجازه جابه جایی قائم نمی داد.
- اگر لنگر را حذف کرده بودیم می بایست θ را برای انطباق حذف شده محاسبه می کردیم.
- R_B را از حالت تکیه گاه خارج کرده و به صورت نیرو در آوردیم.

باخود R_B برابر است.

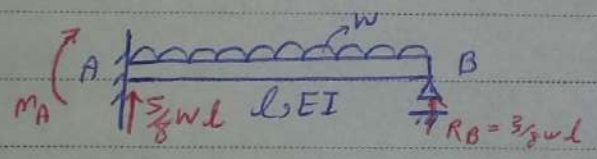
در واقع، ابتدا سازه را بدون نیروی حذفی رسم کرده و تغییر شکلی که در صورت نبود آن بوجود می آمد محاسبه می شود. سپس کل بارهای خارجی حذف شده و به جای نیرو و یا لنگر حذفی، نیروی واحد یا لنگر واحد قرار داده می شود و تغییر شکل محاسبه می شود. از ضرب این تغییر شکل در نیروی حذفی و جمع آن با تغییر شکل حالت بدون نیروی حذفی باید صفر شود.

- دو سازه ی بالا با سازه ی قبل برابرند پس جمع جابه جایی آن ها باید صفر شود تا با سازه ی قبل برابر شود.

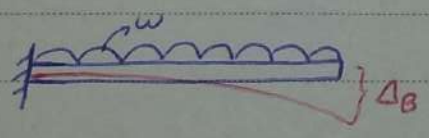
معادله از جنس تغییر شکل $\Delta_B + R_B \delta_{BB} = 0$ معادله سازگاری تغییر شکل

مهم: معادله سازگاری مشکل کمبود معادله را حل می کند و با حل معادلات تعادل و این معادله به جواب می رسیم.
این که اول سازگاری را حل کنیم و بعد در سایر معادلات تعادل قرار دهیم یا برعکس به دلخواه ماست.

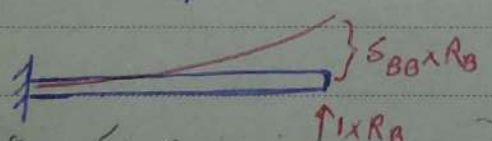
مثال) تغییر شکل تیر یک سر گیردار یک سر مفصل را محاسبه کنید.



$\equiv$



+



دو محاسبه Δ_B و δ_{BB} را باید انجام دهیم.
یکی از روش های محاسبه تغییر شکل (از سه مورد) را باید انجام دهیم.
روش بار واحد از نظر میزان حجم محاسبات از همه کمتر می باشد.

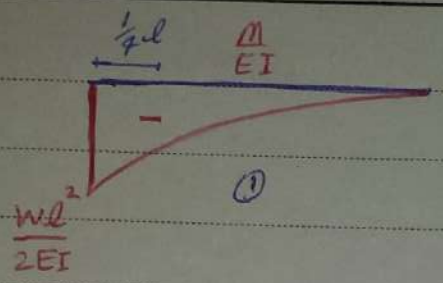
برای محاسبه ی این جابه جایی، این نیروی واحد جاری نیست و نمودار $\frac{M}{EI}$ برای آن رسم می شود و بعد از وارد کردن بار واحد جاری استفاده می شود.

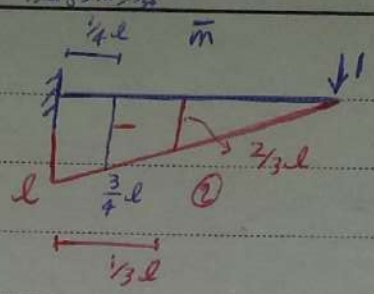
$\Delta_B + R_B \delta_{BB} = 0$

PAPCO

Subject
Date

نمودار $\bar{m}$ را رسم کنید.



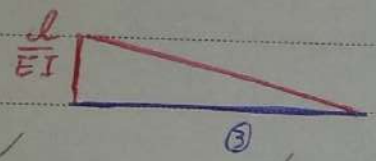


برای سازه اول

$$\underset{1\times 2}{\Delta_B} = -\frac{1}{3}\,\frac{wl^2}{2EI}\times l\times\left(\frac{-3}{4}l\right)=\frac{wl^4}{8EI}$$

حال می‌خواهیم تغییر شکلی به ازای بار واحد را محاسبه کنیم. پس نمودار لنگر آن را می‌کشیم.

برای سازه دوم



دقت شود که برای هر دو سازه بار واحد مجازی یکسان (هم جهت) انتخاب شود. در غیر این صورت معادله سازگاری معنی نمی‌شود.

$$\underset{2\times 3}{\delta_{BB}} = \frac{1}{2}\,\frac{l}{EI}\times l\times \frac{2}{3}l = \frac{-l^3}{3EI}$$

منفی به خاطر این که یکی از علامت‌ها با دیگری برابر است.

ضرب دو علامت مساحت در هم برابر است با $\frac{l^3}{3EI}$

$$\frac{wl^4}{8EI} + R_B\left(-l^3/3EI\right)=0$$

$$R_B = 3/8\, wl$$

می‌توانیم باقی مجهولات را نیز از روش سازگاری بدست آوریم ولی برای سادگی از معادله تعادل استفاده می‌کنیم.

$$R_{Ay} = 5/8\, wl \quad \leftarrow \sum F_y = 0 \text{ از}$$

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \Rightarrow M_A + wl^2/2 - \frac{3}{8}wl\times l = 0$$

جهت لنگر خارجی (لنگر تکیه‌گاهی) دلخواه است

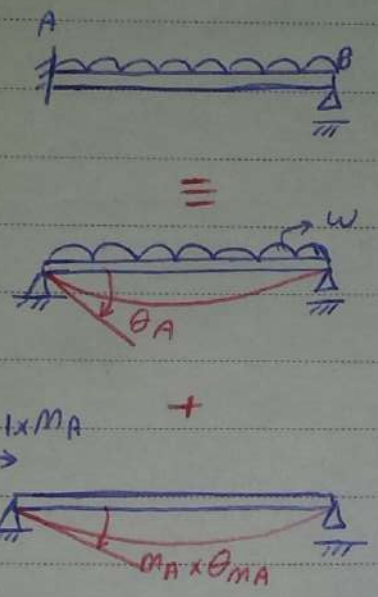
$$M_A = -wl^2/8$$

سازه تعیین شد و تمام نیروهای آن بدست آمد. با داشتن M_A و سایر نیروها می‌توان نمودار لنگر و برش را نیز رسم کرد.

برای نمایش این که نتیجه مستقل از انتخاب نیرویی که می‌خواهیم حذف کنیم است، مسئله را از زاویه دیگر حل می‌کنیم.

Subject
Date

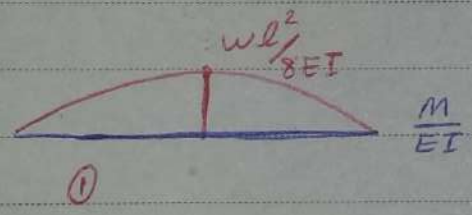
یا باید مؤلفه قائم A و یا دوران را حذف کنیم. حذف نیرو ترجیح شده پس لنگر را حذف می‌کنیم.



در مرحله اول باید θ_A ناشی از بار خارجی را محاسبه کنیم
در مرحله دوم باید θ_A ناشی از بار واحد را حساب کنیم.
چون θ مثل Δ کوچک و بزرگ ندارد، θ ناشی از بار واحد را بصورت θ_{M_A} نشان می‌دهیم.

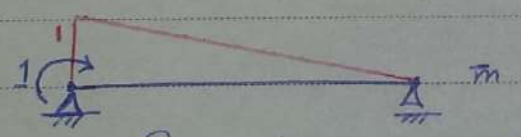
$$\theta_A + M_A\times\theta_{M_A} = 0$$

دوران ناشی از لنگر واحد.



برای سازه اول)

برای محاسبه دوران باید لنگر واحد مجازی قرار دهیم



گشتاور متعادل بین گرانش و وسط که برشیات مقدار وسط $\frac{1}{2}$ را می‌باشد.

$$\underset{1\times2}{\theta_A} = \frac{2}{3}\times\frac{l}{2}\times\frac{wl^2}{8EI}\times2\times\frac{1}{2} = \frac{wl^3}{24EI}$$

برای سازه دوم)

برای بار واقعی بر EI تقسیم می‌کنیم اگر لنگر مجازی بود بر EI تقسیم نمی‌کردیم.

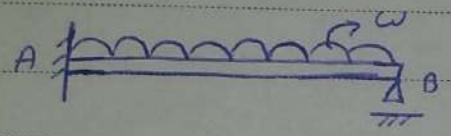
$$\underset{2\times3}{\theta_{M_A}} = \frac{1}{2}\times\frac{l}{EI}\times\frac{2}{3}\times1 = \frac{l}{3EI}$$

Subject
Date

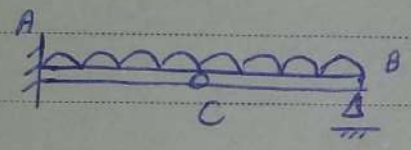
$$\frac{wl^3}{24EI} + M_A \times \frac{l}{3EI} = 0 \Rightarrow M_A = -\frac{1}{8} w l^2$$

مثبت و منفی به خاطر جهت انحنا می است اما قدر مطلق جواب ها با هم برابر است.
برای تیر دو سر گیردار است

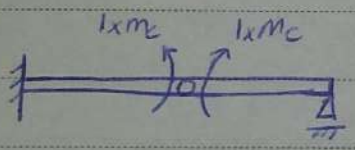
پس نشان دادیم که این که کدام را فرض کنیم در نتیجه بی تاثیر است ولی در حجم محاسبات اثر گذار است



≡



+



*

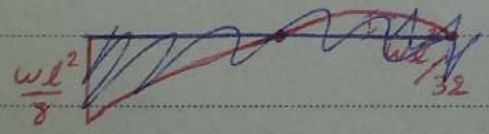
برای این که یک سازه را معین کنیم علاوه بر این که می توانیم به نیروهای تکیه گاهی دست بزنیم می توانیم به هندسه دست بزنیم
مثلاً در اینجا یک مفصل اضافه می کنیم

مفصل این شرط که لنگر آن صفر است را به ما می دهد

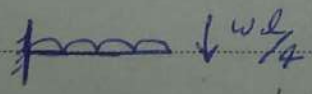
قبل از اضافه کردن مفصل دوران نقطه قبل و بعد C باهم برابر بود
اختلاف دوران آن ها صفر می باشد

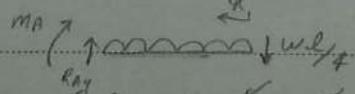
$$\underset{\text{دوران نسبی}}{\theta_C} + M_C \times \underset{\text{دوران نسبی}}{\theta_{M_C}} = 0$$

برای سازه اول)



لنگر در B صفر است
بخش BC مشابه تیر دو سر مفصل است پس نمودار لنگر
مشابه آن خواهد داشت



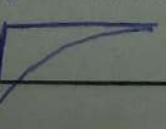


$$M(x) = -\frac{wl}{4}x - \frac{wx^2}{2}$$

مثالی که بار گسترده داریم به این که آیا منحنی لنگر درجه خطی می شود یا نه تا بتوانیم از فرمول های مساحت و مرکز سطح استفاده کنیم تو ه شود.

در صورتی که فقط wl/4 را در نظر بگیریم

این دو نمودار را ترکیب می کنیم چون فرمول های

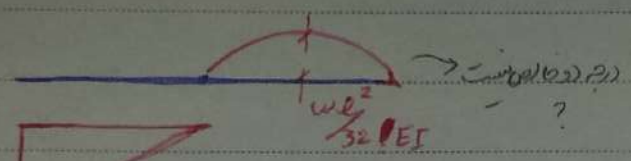


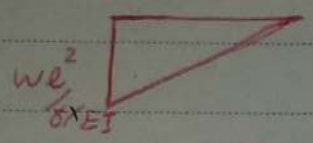
در صورتی که فقط بار گسترده را در نظر بگیریم

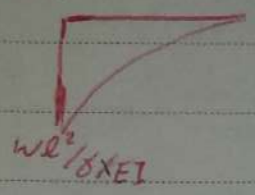
یافتن مرکز سطح برای درجه 2 خالی است اما
در اینجا اگر ترکیب کنیم درجه دو خالی نمی شود
پس هر دو نمودار را زیر هم می کشیم

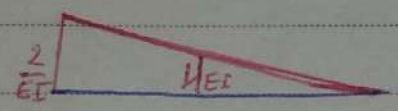
PARCO

Subject
Date

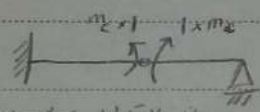






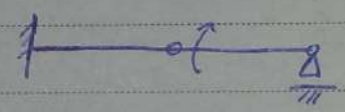


نمودار برش ثابت پس نمودار لنگر خطی است.

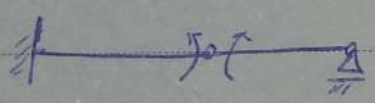


میله در حال تعادل است پس در واقع این معنی را می‌دهد که لنگر داخلی در این نقطه ۱ است.

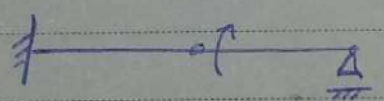
می‌خواهیم دوران نسبی را حساب کنیم می‌توانیم:



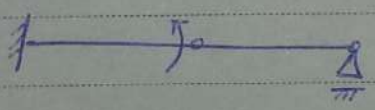
دوران را برای هر کدام جداگانه محاسبه و بعد اختلاف را بدست آوریم:



=

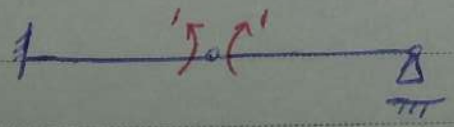


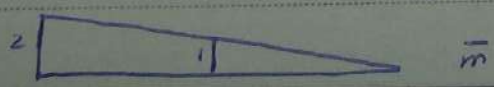
+



چون باید حاصل دوران‌ها با هم جمع شود، از طریق جمع آثار می‌توان هر دو را روی یک میله قرار داد و محاسبه را یکبار انجام داد.

پس: برای محاسبه دوران مجازی:





Subject

Date

چون هر دو لنگر مجازی را بالای پره‌ی سازه قرار داده‌ایم پس از دو طرف بدست می‌آید θ مثبت می‌شود.

$$\underset{1\times3}{\theta_C} = \frac{2}{3}\,\frac{wl^2}{32EI}\times\frac{l}{2}\times\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{l}{2}\times\frac{wl^2}{8EI}\times\frac{5}{6}\times2 - \frac{1}{3}\times\frac{l}{2}\times\frac{wl^2}{8EI}\times\frac{7}{8}\times2$$

$$= \frac{wl^3}{EI}\left(\frac{1}{192} - \frac{10}{192} - \frac{7}{192}\right) = \frac{-wl^3}{12EI}$$

برای مثبت نشان کردن تغییر شکل آن برابر است

$$\theta_{M_C} = \frac{4}{3}\cdot\frac{l}{EI}$$

نوشتن معادله سازگاری:

$$\frac{-wl^3}{12EI} + M_C\times\frac{4}{3}\,\frac{l}{EI} = 0$$

$$M_C = \frac{wl^2}{16}$$

$$\Sigma M_C = 0 \Rightarrow R_B\times\frac{l}{2} = \frac{wl^2}{16} + \frac{wl^2}{8}$$

$$\Rightarrow R_B = \frac{3}{8}wl$$

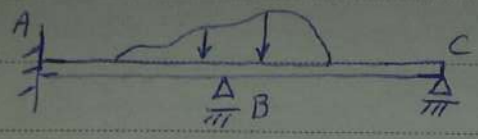
از بین تمام انتخاب‌های موجود، انتخاب ما باید کمترین حجم را داشته باشد و بتوانیم از دانسته‌های قبلی استفاده کنیم.

سازه‌های نامعین

می‌خواهیم به بررسی سازه‌های دو درجه نامعینی بپردازیم. سه درجه نامعینی را بررسی نمی‌کنیم چون این روش حجم محاسبات را برای درجات نامعینی زیاد افزایش می‌دهد.

Subject
Date

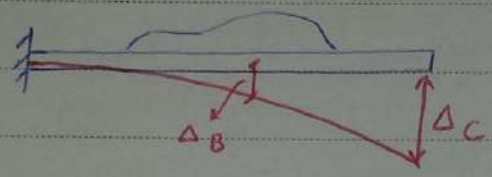
سازه‌ی با دو درجه نامعینی



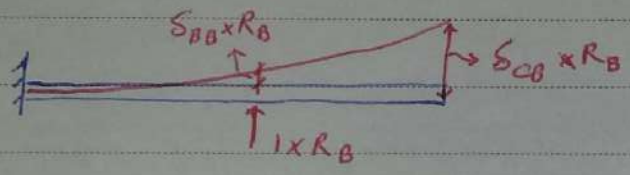
باید دو مورد از عوامل نامعین را انتخاب و برداریم

|||

در سازه‌های با دو درجه نامعینی باید دو مورد از عوامل نامعین را انتخاب و برداریم

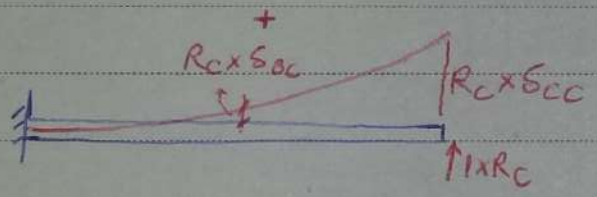


+



δ_{BB}: جابه‌جایی نقطه‌ی B به ازای بار واحد در نقطه B

+



در سازه‌های با دو درجه نامعینی، نیاز به دو معادله‌ی سازگاری داریم پس دو عامل را باید حذف کنیم

R_B اولی آمده و بعد R_C

مربوط به نقطه B: $\Delta_B + R_B \delta_{BB} + R_C \delta_{BC} = 0$

R_C اولی آمده و بعد R_B

مربوط به نقطه C: $\Delta_C + R_B \delta_{CB} + R_C \delta_{CC} = 0$

چون نقطه B مفصلی است پس جمع تمام جابه‌جایی‌های بالا باید صفر باشد

می‌توانیم جابه‌جا بنویسیم اما بهتر است (ترتیب R_B و R_C را حفظ کنیم) اما برای کنترل بهتر است منظم بنویسیم

در واقع در معادله‌ی سازگاری جابه‌جایی یا دوران نقطه‌ای صفر یا ثابت است

ماتریس نرمی

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \delta_{BB} & \delta_{BC} \\ \delta_{CB} & \delta_{CC} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_B \\ R_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\Delta_B \\ -\Delta_C \end{Bmatrix}$$

δ: جابه‌جایی به ازای بار واحد ⇐ تعریف نرمی است

نرمی: جابه‌جایی سازه به ازای بار واحد

δ_{BC} و δ_{CB} براساس قانون بتی ماکسول برابر هستند $\delta_{CB} = \delta_{BC}$

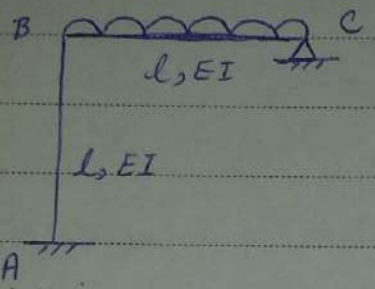
فواید: فقط یکی را حساب می‌کنیم

ماتریس نرمی متقارن است پس اگر حل کردیم و ماتریس نرمی نامتقارن شد اشتباه حل کرده‌ایم (کنترل)

(نسبت به قطر اعداد متقارن، ماتریس با ترانهاده‌اش برابر باشد)

Subject
Date

مثال) برای قاب با بار گسترده



باید دو تا از درجات نامعینی را رفع کنیم

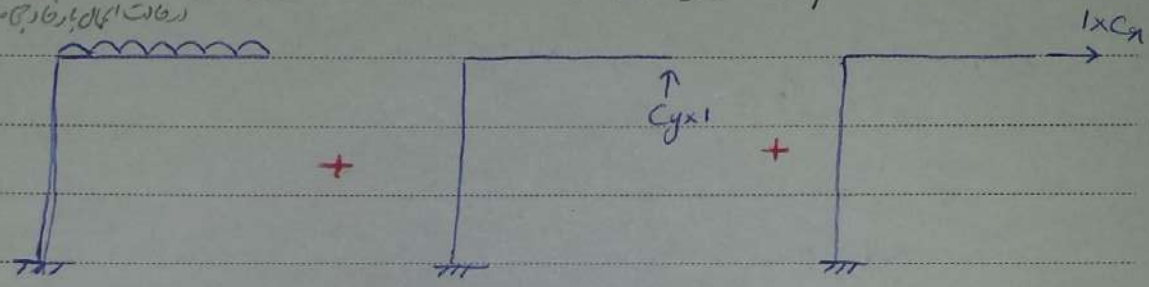
در سازه نامعین: ۱- تعیین درجه نامعینی (۱ یا ۲ یا ۳)

۲- حذف از عوامل نامعینی به تعداد درجه نامعینی

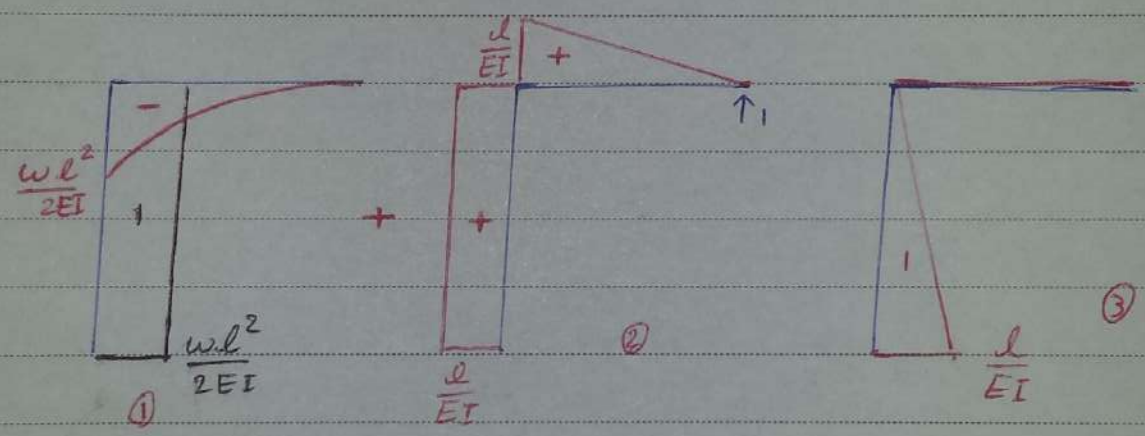
۳- رسم سازه‌ها و نوشتن معادله سازگاری

در مرحله اول بعد از حذف دو عامل نامعینی، این جا بدون تغاوت نامعینی و در ابتدای آن نیروها در حالت اعمال بار خارجی محاسبه شود.

سازه را در سه مرحله حل می‌کنیم



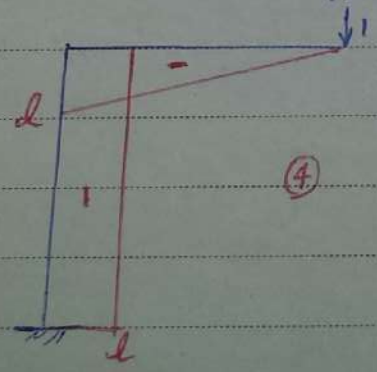
نمودار لنگر همه را نیاز داریم.



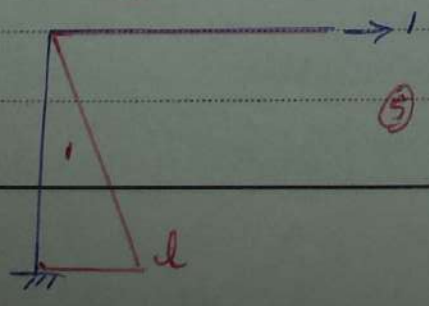
این سه نمودار، نمودار بار واقعی هستند. نمودار بار واقعی همیشه بر EI تقسیم می‌شود.

باید جابجایی در جهت بارهای حذف شده را محاسبه کنیم پس در اینجا باید دو بار واقعی و نمودی قرار دهیم.

جابجایی قائم را می‌خواهیم پس یک بار قائم قرار می‌دهیم



چون بارها واقعی نیستند بر EI تقسیم می‌شوند.



Subject
Date

Δ_{CH} افقی

$$\underset{1\times5}{\Delta_{CH}} = -l \times l/2 \times \frac{-wl^2}{2EI} = \frac{wl^4}{4EI}$$

$$\underset{1\times4}{\Delta_{CV}} = -\frac{1}{3}\frac{wl^2}{2EI} \times l \times \frac{-3}{4}l + \frac{-wl^2}{2EI} \times l \times (-l) = \frac{5}{8}\frac{wl^4}{EI}$$

برای محاسبه‌ی δ ها می‌رویم. باید اثر C_y را یک بار در جهت افقی و یک بار در جهت قائم (5,4) را بررسی کنیم.

جابه‌جایی افقی بعلت بار C_y

$$\delta_H^{C_y} = \underset{2\times5}{\delta_{H,C_y}} = -l \times l/2 \times \left(l/EI\right) = \frac{-l^3}{2EI}$$

افقی

$$\underset{2\times4}{\delta_{V,C_y}} = -\frac{l^3}{3EI} + \frac{-l^3}{EI} = -\frac{4}{3}\frac{l^3}{EI}$$

مثلث در مثلث (در امتحان این گونه نوشته نمی‌شود)

مستطیل در مستطیل

یک مثلث و یک مستطیل

حال اثر C_x در جهت قائم و افقی را می‌خواهیم بررسی کنیم:

مثلث در مثلث (منفی در منفی)

$$\underset{3\times5}{\delta_{H,C_x}} = \frac{l^3}{3EI}$$

$$\underset{3\times4}{\delta_{V,C_x}} = \frac{-l}{EI} \times \frac{l}{2} \times (-l) = \frac{l^3}{2EI}$$

معادله‌ی اول را می‌نویسیم برای جابه‌جایی افقی و معادله‌ی دوم را برای جهت Z فاز جابه‌جایی خودکار می‌نویسیم

قرارداد: اگر معادله برای مجهول جهت x است، x اول می‌آید.

نیروی در جهت

ترتیب معادلات با ترتیب مجهولات باید یکسان باشد

$$\Delta_{CH} + \delta_{H,C_x} \times C_x + \delta_{H,C_y} \times C_y = 0$$

$$\Delta_{CV} + \delta_{V,C_x} \times C_x + \delta_{V,C_y} \times C_y = 0$$

$$\frac{wl^4}{4EI} + \frac{l^3}{3EI} \times C_x + \left(\frac{-l^3}{2EI}\right) \times C_y = 0$$

$$\frac{5}{8} \cdot \frac{wl^4}{EI} + \frac{l^3}{2EI} \times C_x + \left(-\frac{4}{3} \cdot \frac{l^3}{EI}\right) C_y = 0$$

Subject
Date

حال به فرم ماتریسی می‌بریم:

$$\begin{array}{cc} \text{ضریب } C_x & \text{ضریب } C_y \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} l^3/3EI & -l^3/2EI \\ -l^3/2EI & +\frac{4}{3}\frac{l^3}{EI} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_x \\ C_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{wl^4}{4EI} \\ +\frac{5}{8}\frac{wl^4}{EI} \end{Bmatrix}$$

عادت بر این است که روی قطر عدد منفی نباید داشته باشیم. اگر روی قطر عدد منفی بدست آمد ایراد فیزیکی وجود ندارد و فقط مربوط به جهت هاست پس آن خط را در منفی ضرب می‌کنیم.

؟ در این جا در ② C_y رو به بالا و در ④ رو به پایین است.

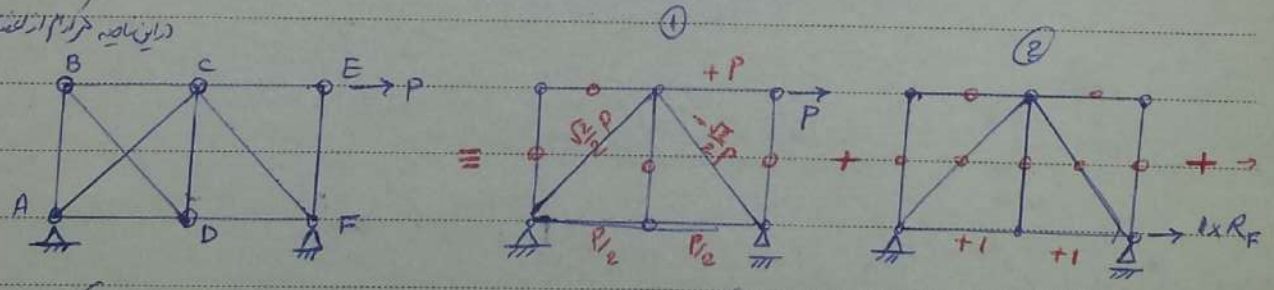
برای حل، l^3 ها و EI ها را می‌توان به راست برد.

$$\begin{Bmatrix} C_x \\ C_y \end{Bmatrix} = \frac{\frac{EI}{l^3}}{\frac{1}{3}\times\frac{4}{3}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 4/3 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -wl^4/4EI \\ +\frac{5}{8}\cdot\frac{wl^4}{EI} \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{36}{16-9} \begin{bmatrix} 4/3 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} \end{Bmatrix} wl$$

* خرپاها هم می‌توانند نامعین باشند. خرپا دو نوع نامعینی داخلی و خارجی دارد. در مثال خرپا هم زمان هر دو نوع نامعینی را دارا می‌باشد.

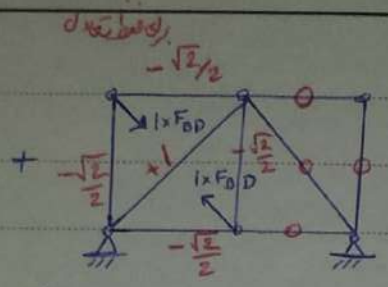
در این ناحیه هر کدام از المان‌ها می‌توان حذف کرد.



در خرپاها هنگامی که نامعینی داخلی است باید عضو حذف کنیم و هنگامی که نامعینی خارجی است باید واکنش تکیه‌گاهی را حذف کنیم. (برای درجات نامعینی داخلی زیاد مثلاً ۲ تا ، حذف دو عضو ممکن است موجب ناپایداری شود و دومی کم کاربرد است)

برای خرپا معمولاً دو عضو را کم نمی‌کنند و واکنش تکیه‌گاهی حذف می‌کنند.

Subject
Date

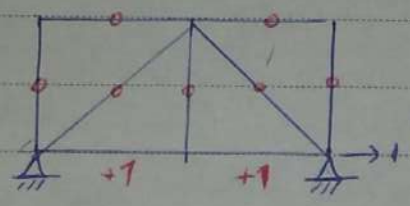


③

عضو BD که حذف کرده‌ایم یک نیرو است
که یا به صورت کششی و یا به صورت فشاری است.
عضوی از خرپا را که حذف می‌کنیم به صورت کششی در نظر می‌گیریم.
یا فشاری
دقت شود که یک نیرو است ولی چون متعلق به دو عضو است
در دو جا دیده می‌شود.
در مرحله بعد باید سازه بالا را تحلیل کنیم

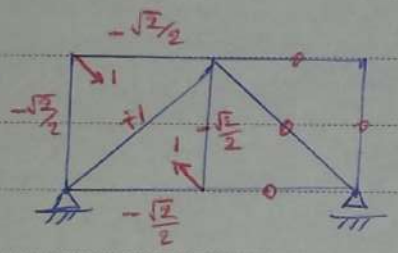
دو نیروی مساوی و در خلاف جهت هم پس واکنش‌های تکیه‌گاهی صفر می‌شوند.
می‌توان با مقطع زدن حل کرد و یا از تقارن و... استدلال کرد.

④



حال باید تغییر شکل سازه در جهت بارهای حذف شده را محاسبه کرد.
می‌خواهیم کشیدگی یا فشردگی را محاسبه کنیم پس از دو بار استفاده می‌کنیم
(دو بار در خلاف هم و یا نمودیت شبیه به هم)
نیروی افقی را حذف کردیم پس بار افقی را می‌گذاریم

⑤



می‌توان پس از جزئیات ۱ و ۴ را یکی کشید و صرفاً نگاه کنید

ابتدا باید اثر بار خارجی در جهت افقی و سپس در جهت BD را بررسی کنیم.

$$\underset{1\times 4}{\Delta_{FH}} = 2\,\frac{\frac{P}{2}\times 1\times l}{EA} = \frac{Pl}{EA} \qquad \underset{1\times 5}{\Delta_{BD}} = \frac{1\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times P\times\sqrt{2}\,l}{EA} + \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{P}{2}\times l}{EA} = \frac{Pl}{EA}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

حال اثر R_F را محاسبه می‌کنیم.

اثر بار افقی در جهت افق $\quad \underset{2\times 4}{\Delta_H^{R_F}} = 2\cdot\frac{1\times 1\times l}{EA} = \frac{2l}{EA}$

اثر بار افقی در جهت BD $\quad \underset{2\times 5}{\Delta_{BD}^{R_F}} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}\times 1\times l}{EA} = -\frac{\sqrt{2}\,l}{2EA}$

PAPCO

Subject
Date

$$\Delta_{H\,3\times4}^{F_{BD}} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}\times 1\times l}{EA} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{l}{EA}$$

$$\Delta_{BD\,3\times5}^{F_{BD}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times l}{EA} + \frac{1\times 1\times\sqrt{2}\,l}{EA} = \frac{l}{EA}\left(2+\sqrt{2}\right)$$

جابه‌جایی افقی بعلت بار R_F یعنی جابه‌جایی افقی

$$\Delta_H + \Delta_H^{R_F}\times R_F + \Delta_H^{F_{BD}}\times F_{BD} = 0$$

$$\Delta_{BD} + \Delta_{BD}^{R_F}\times R_F + \Delta_{BD}^{F_{BD}} F_{BD} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2l/EA & -\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{l}{EA} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{l}{EA} & \frac{l}{EA}\left(2+\sqrt{2}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_F \\ F_{BD} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{Pl}{EA} \\ \frac{Pl}{EA}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{4}\right) \end{Bmatrix}$$

روش شیب - افت Slope - Deflection (روش سختی) یا طبیعی

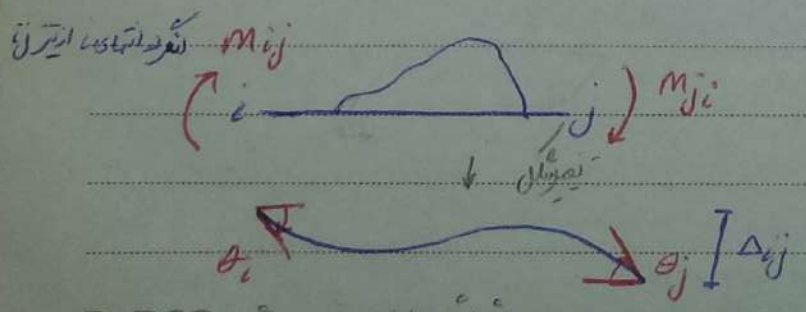
در روش شیب افت

منظور از شیب دوران و منظور از افت جابه‌جایی است.

روش شیب افت روشی کلی برای بررسی تیرها و قاب‌های نامعین می‌باشد.

عضو i را بدون توجه به این که به چه تکیه‌گاهی متصل است بیرون آورده و مطالعه می‌کنیم.

برای بارهای وارده نقطه‌ای i دوران و جابه‌جایی خواهند داشت.



اگر دو سر تیر نسبت به هم جابه‌جا شوند جابه‌جایی مطلق مهم نیست

بلکه نسبی مهم است (Δ_{ij} با Δ_{ji} فرقی ندارد)

در روش شیب افت، جهت مثبت

- جهت مثبت را جهت عقربه‌های ساعت در نظر گرفته‌ایم. (قرارداد در روش شیب افت)

لنگر انتهایی عضو را جهت عقربه‌های ساعت در نظر گرفته‌ایم. (برای هر عضو)

PAPCO

Subject
Date

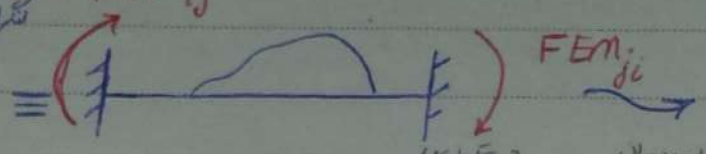
رابطه‌ی شیب افت، رابطه‌ای برای گرادیان‌ها بصورت چرخشی حاصل می‌باشد.

θ_i، θ_j و Δ بارگذاری

لنگر بوجود آمده، در اثر بارگذاری و دوران دو انتها و جابه‌جایی نسبی Δ_{ij} است. می‌خواهیم اثر هر کدام را بررسی کنیم پس اثر بقیه را باید صفر کنیم.

(fixed end moment) FEM_{ij}
لنگر انتهای گیردار

بررسی اثر بارگذاری:



جهت گرادیان‌ها جهت عقربه‌های ساعت در نظر گرفته‌ایم.

اثر جابه‌جایی و دوران را صفر کردیم. جداول

اگر بخواهیم اثر بارگذاری را بررسی کنیم دو دو انتها باید جابه‌جایی و دوران داشته باشیم پس دو انتها را گیردار می‌کنیم. به گونه‌ای که در اثر بارگذاری در دو انتها یک سازه‌ی ۳ درجه نامعین داریم. بوجود می‌آید لنگر انتهای گیردار FEM می‌گویند.

نحوه‌ی محاسبه‌ی این سازه (سازه‌ی دو سر گیردار)

در جداول انتهای کتاب آورده شده است.

جداول انتهای کتاب، برای بارگذاری سازه، FEM آن را به ما می‌دهند.

+

گرادیان دوران برای دوران θ_i

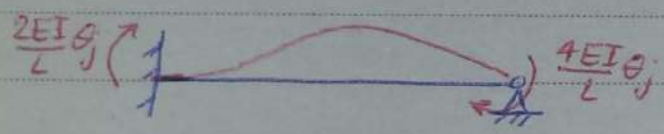
(بعداً اثبات می‌شود)

بررسی اثر θ_i:

برای چرخاندن به میزان θ_i به چه لنگری نیاز داریم.

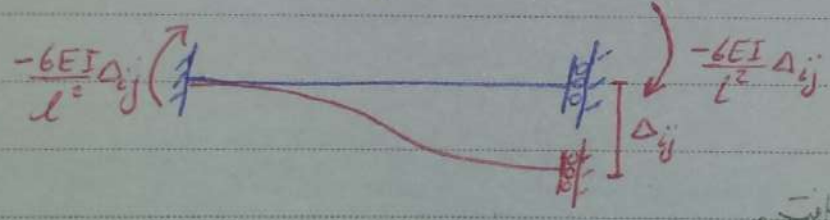
+

بررسی اثر θ_j



+

بررسی اثر Δ:



می‌خواهیم نسبت به هم دوران نکنند ولی بتوانند جابه‌جا شوند.

روش تعیین علامت Δ: در روش شیب افت.

یعنی دوران خط واصل نقاط انتها و انتها

اگر دوران تیر فرضی در جهت عقربه ساعت Δ مثبت

" " " " " " " منفی

خط فرضی که بعد از انتها وصل می‌کند

(در Δ_{ij} با Δ_{ji} هم‌جهت هستند)

هر کدام را که ثابت بگیریم فرض کنیم که تیری چرخیده، دیگری در جهت عقربه ساعت چرخیده پس Δ برای هر دو مثبت

Subject
Date

سازه درجه نامعین است.

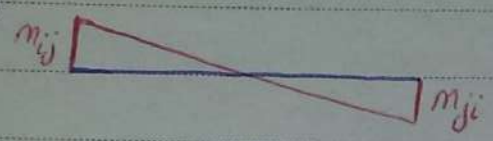
می خواهیم اثر θ_i را بررسی کنیم. (البته تغییر شکل چون خمشی است (نقطه های ابتدا و انتها ثابت هستند) و نیرو در راستای افق نداریم می توان گفت سازه فقط یک درجه نامعین است.)

از روش تیر مزدوج استفاده می کنیم.

(استفاده اتکاری از روش تیر مزدوج)

(سازه نامعین ولی پایدار است، به دنبال یافتن θ_i هستیم)

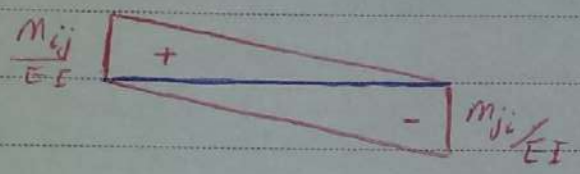
در مقطع، گشتاور خارجی با داخلی برابر



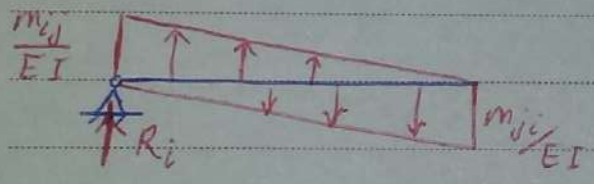
چون در طول تیر بار نداشته نمودار لنگر خطی است

ساده سازی

به جای این که دنبال تابعی که صفر است بگردیم و مرکز سطح را بیابیم از خط معادل زیر استفاده می کنیم.



نمودار لنگر را روی تیر مزدوج قرار می دهیم.



سازه در حالت کلی (بدون بار) ناپایدار است ولی با توجه به بارگذاری آن به صورت خاص پایدار شود.

سازه مقاومت دورانی ندارد پس باید لنگر آن صفر شود.

(تیر مزدوج سازه پایدار باید پایدار شود)

موقع دوران ساعتگرد در نظر می گیریم.

$$+\circlearrowleft \sum M_{\theta_i} = 0 \Rightarrow M_{ij}/EI \times l/2 \times l/3 - M_{ji}/EI \times l/2 \times \frac{2}{3}l = 0$$

$$M_{ij} = 2M_{ji}$$

برش در تیر فرضی با دوران در تیر اصلی برابر است پس باید R_i را بیابیم

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow R_i + M_{ij}/EI \times l/2 - \underbrace{M_{ji}/EI}_{\frac{1}{2}M_{ij}} \times l/2 = 0$$

Subject
Date

$$R_i = \theta_i = \frac{-1}{4} M_{ij}/EI \times l$$

در جهت عقربه ساعت — در خلاف جهت عقربه ساعت

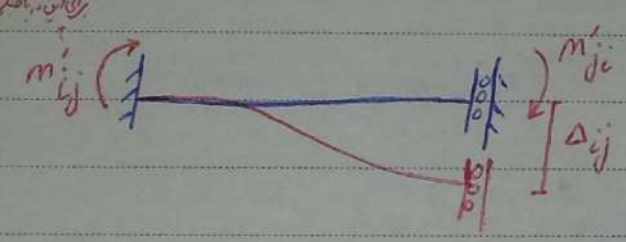
$$M_{ij} = -\frac{4EI}{l}\theta_i$$

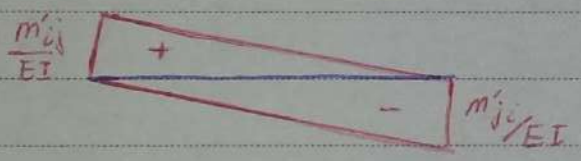
$$M_{ji} = -\frac{2EI}{l}\theta_i$$

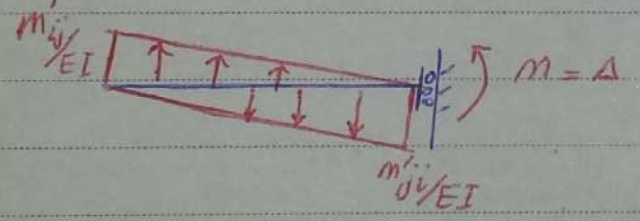
در روش تیر مزدوج جهت مثبت دوران خلاف جهت عقربه های ساعت بود. ولی ما جهت عقربه ساعت را مثبت در نظر گرفته بودیم.
پس مقادیر فوق را برای استفاده در روش شیب افت در منفی ضرب می کنیم.

- مساله در اثر گذاری M ها دچار تغییر شکل شده است. می خواهیم رابطه ی Δ و M ها را بیابیم.

برای این که با قطعه ها اشتباه نشود







در جهت قائم پایدار نیست مگر این که ΣF_y صفر شود

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow M'_{ij} = M'_{ji}$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_j = 0 \Rightarrow \Delta + M'_{ji}/EI \times l/2 \times l/3 - M'_{ij}/EI \times l/2 \times \frac{2}{3}l = 0$$

جهت مثبت روابط رو به بالا و جهت قرارداد ما به سمت پایین است پس در منفی ضرب می کنیم.

$$\Delta = \frac{M'_{ij}}{EI} \times \frac{l^2}{6} \Rightarrow M'_{ij} = \frac{6EI}{l^2}\Delta_{ij}$$

اصلاح جهت (در اینجا مثبت در نظر گرفته شده بود در صورتی که پایین آمده بود)

$$M'_{ij} = M'_{ji} = \frac{-6EI}{l^2} \cdot \Delta_{ij}$$

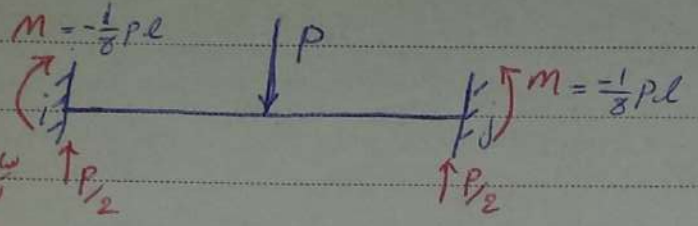
M_2 — M_1 که در اینجا پادساعتگرد است. مثبت بود پس Δ که هم علامت آن است باید در منفی ضرب شود

الزامات روابط شیب - افت باید در روابط ای ال اس شود.

Subject
Date

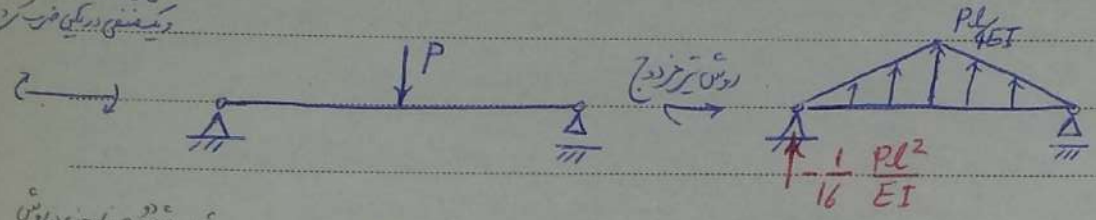
بررسی FEM برای بار متمرکز P در وسط تیر

مثال) یک سازه تحت بار متمرکز در وسط می‌خواهیم FEM را بدست آوریم.

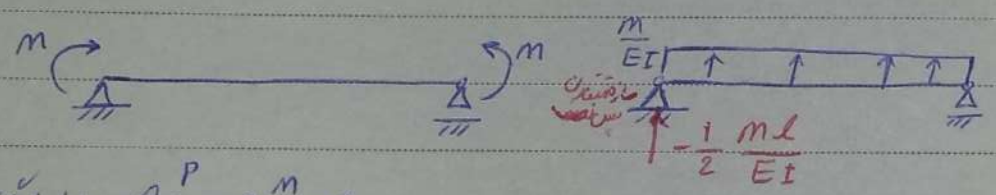


سازه متقارن بین لنگرها و نیروها متقارن می‌توان لنگرها را به صورت متقارن در طرف بین جهت قرار داد. می‌توان حالت سمت راست را در ۲ ضرب کرد.

شکل معادل دو سازه است. یکی تحت بار P و سازه دیگر تحت بار M



شکل روش درجه یعنی در روش تیر مزدوج در سازه اصلی در واقع اضافه کردیم



$$\theta_i^P + \theta_i^M = 0$$

رابطه سازگاری چون در حقیقت نقطه i بردار است و دوران ندارد.

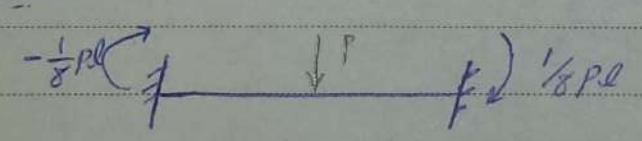
نمی‌توانیم از داده‌های تیر مزدوج سازه‌های نیروی تکیه‌گاهی برابر دوران است.

$$-\frac{1}{16}\frac{Pl^2}{EI} - \frac{1}{2}\frac{Ml}{EI} = 0 \Rightarrow M = -\frac{1}{8}Pl$$

M در نقطه i بدست آوردیم.

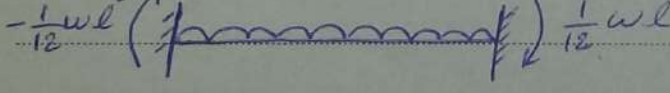
M که بدست آوردیم در جهت عقربه ساعت بود ولی در دیاگرام منفی است پس اگر بخواهیم برای جداول بزنیم: (البته چیزها در جهت عقربه‌های ساعت بیان کرده‌اند)

برای بار متمرکز P در وسط FEM چپ $-\frac{1}{8}Pl$ و FEM راست $\frac{1}{8}Pl$ می‌شود.

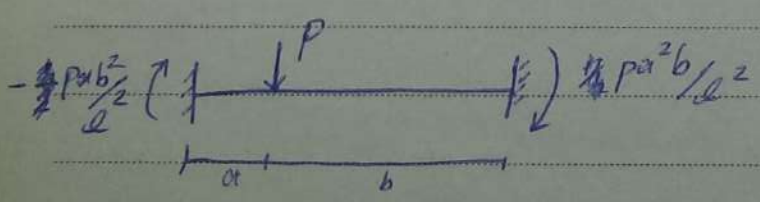


حال اگر بار گسترده قرار دهیم:

برای بار گسترده یکنواخت



اگر بار P قرار دهیم ولی در وسط نباشد



Subject
Date

هر چه تا کنون انجام داده بودیم را یکجا جمع می‌کنیم:

$$M_{ij} = FEM_{ij} + \frac{4EI}{L}\theta_i + \frac{2EI}{L}\theta_j - \frac{6EI}{L^2}\Delta_{ij}$$

$$= FEM_{ij} + \frac{2EI}{L}\left(2\theta_i + \theta_j - 3\Delta_{ij}/L\right)$$ رابطه‌ی شیب افت

(از این به بعد می‌توان در برنامه‌های کامپیوتری استفاده کرد چون به قضاوت مهندسی نیاز ندارد)

از این رابطه برای تحلیل سازه‌ها استفاده می‌کنیم.

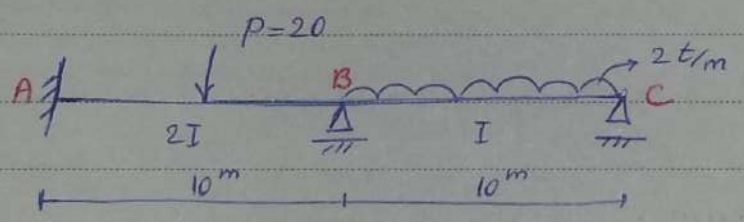
رابطه‌ی شیب افت بیان شد. می‌خواهیم به کاربرد آن بپردازیم:

$$M_{ij} = FEM_{ij} + \frac{2EI}{L}\left(2\theta_i + \theta_j - 3\Delta_{ij}/L\right)$$

(در بعضی کتاب‌ها)

دقت شود که این رابطه را برای انتهای i نیز می‌توان نوشت

مثال) سازه را تحلیل کرده و تغییر شکل و نیروهای داخلی را بدست آورید.



- از بدست آوردن نیروهای گره‌ای نیروهای داخلی بدست می‌آید (استاتیک و بررسی می‌شود)

می‌خواهیم این تیر دو دهانه را با روش شیب افت تحلیل کنیم

A: انتهای سمت چپ

عضو AB

$$M_{AB} = -\frac{1}{8}20\times10 + \frac{2E(2I)}{10}\left(2\theta_A + \theta_B - 3\frac{\Delta_{AB}}{10}\right)$$

B انتهای سمت راست

$$M_{BA} = \frac{1}{8}20\times10 + \frac{2E(2I)}{10}\left(2\theta_B + \theta_A - 3\frac{\Delta_{AB}}{10}\right)$$

یک بار رابطه را برای A و بار دیگر برای B می‌نویسیم.

- اولین کار این است که رابطه‌ی شیب افت را برای تک تک اعضا می‌نویسیم.
- اعضا را با A و B و ... مشخص می‌کنیم (در کامپیوتر با اعداد مشخص می‌کنند).
- معمولاً نسبت EI ها را می‌دهند.
- Δ_{AB} و Δ_{BA} یکی هستند و جهت آن‌ها برحسب دوران مشخص می‌شود و به بالا و پایین بودن ربطی ندارد.

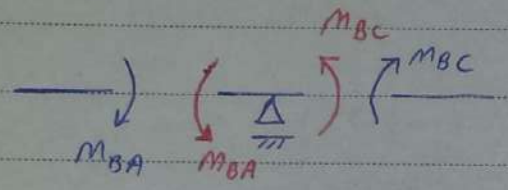
Subject
Date

به سراغ عضو BC می‌رویم :

$$BC\begin{cases} M_{BC} = -\frac{1}{12}\times 2\times 10^2 + \frac{2EI}{10}\left(2\theta_B + \theta_C - 3\Delta_{BC}/l\right) \\ M_{CB} = +\frac{1}{12}\,2\times 10^2 + \frac{2EI}{l}\left(2\theta_C + \theta_B - 3\Delta_{BC}/10\right) \end{cases}$$

- هیچ قضاوت منطقی انجام ندادیم و اگر برنامه بود هیچ if منطقی نیاز نداشتیم.
- گام دوم و سوم می‌توانند با هم جابه‌جا شوند (اتفاقی نمی‌افتد) (گام دوم نوشتن معادلات تعادل و اعمال شرایط مرزی هستند که می‌توانند جابه‌جا شوند)
- ابتدا نوشتن معادلات تعادل : معادلاتی که نوشته‌ایم همه از جنس لنگر هستند پس باید تعادل را از لحاظ لنگر بررسی کنیم.

نقطه‌ی B را باز کردیم :

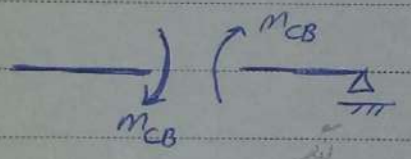


(تعادل مورد بررسی A و B و C هستند و باید برای آن‌ها بررسی انجام شود.)

$$M_{BC} + M_{BA} = 0$$

اگر به نقطه‌ی B گشتاورهای وارد می‌شد معادله لحاظ می‌کردیم

$\Sigma M_C = 0$



$\Rightarrow M_{CB} = 0$

دو مجهول θ_B و θ_C پس دو معادله تعادل می‌نویسیم

یک معادله تعادل برای نقطه B و یک معادله تعادل برای نقطه C نوشتیم

معادله تعادل برای A نمی‌نویسیم چون فقط مجهول M_A را اضافه می‌کند.

ادامه گام دوم

$M_{BC} + M_{BA} = 0$

$$\underbrace{\frac{1}{8}\,20\times 10}_{25} - \underbrace{\frac{1}{12}\,2\times 10^2}_{16.66} + \frac{2EI}{10}\left(6\theta_B + 2\cancelto{0}{\theta_A} + \theta_C - 6\cancelto{0}{\frac{\Delta_{AB}}{10}} - 3\cancelto{0}{\Delta_{BC}/10}\right) = 0$$

$$\frac{1}{12}\times 2\times 10^2 + \frac{2EI}{10}\left(2\theta_C + \theta_B - 3\cancelto{0}{\Delta_{BC}/10}\right) = 0$$

گام سوم : اعمال شرایط مرزی یعنی از تغییر شکل‌هایی که در نظر گرفته‌ایم هر کدام صفر است آن را حذف کنیم

شرایط مرزی

$\theta_A = 0$ و $\Delta_{AB} = 0$ و $\Delta_{BC} = 0$

انتهای A و B نسبت به هم جابه‌جا نمی‌شوند

می‌توانستیم شرایط مرزی را در رابطه مرحله اول اعمال کنیم

Subject
Date

حال نهایتا باید معادلات را حل کنیم.

$$\frac{2EI}{10}\underbrace{\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}_{K}\underbrace{\begin{Bmatrix} \theta_B \\ \theta_C \end{Bmatrix}}_{\Delta}=\underbrace{\begin{Bmatrix} -8.34 \\ -16.66 \end{Bmatrix}}_{f}$$

ماتریس سختی — تغییر شکل‌ها — نامعلوم (نیروها)

مشابه رابطه $f = K\Delta$ (سختی)

چون مجهول

فرم افرادی که با ماتریس سختی کار کنند وجود ندارد و همه‌ی برنامه‌ها از ماتریس سختی استفاده می‌کنند.

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} \theta_B \\ \theta_C \end{Bmatrix} = \frac{\frac{5}{EI}}{6\times 2-1^2}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -8.34 \\ -16.66 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} 0.009/EI \\ \frac{-41.64}{EI} \end{Bmatrix}$$

دقت شود که EI خیلی بزرگ است پس θ به شدت کاهش می‌یابد.

پس از محاسبه‌ی ماتریس مجهولات، لنگرهای انتهایی را محاسبه می‌کنیم و سپس از طریق رسم دیاگرام آزاد واکنش‌ها را نیز بدست می‌آوریم و برش و معادله لنگر حول تقاطع

حال به سراغ محاسبه‌ی لنگرها می‌رویم:

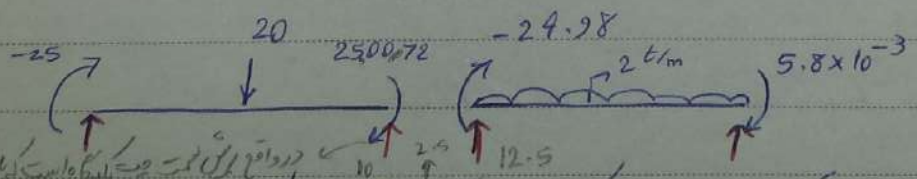
$$M_{AB} = -25 + \frac{4EI}{10}\left(0 + \frac{0.009}{EI} - 0\right) \cong -25$$

$$M_{BA} = 25 + \frac{4EI}{10}\left(2\times\frac{0.009}{EI} + 0 - 0\right) = 25.0072$$

$$M_{BC} = -16.66 + \frac{2EI}{10}\left(2\times 0.009/EI - \frac{41.64}{EI} - 0\right) = -24.98$$

$$M_{CB} = 16.66 + \frac{2EI}{10}\left(\frac{-2\times 41.64}{EI} + \frac{0.009}{EI} - 0\right) = 5.8\times 10^{-3}$$

به علت خطای رند کردن و قطع کردن و اینکه تعداد رقم‌های اعشاری کمی در نظر گرفتیم، به صفر کاملا نزدیک نشدیم.



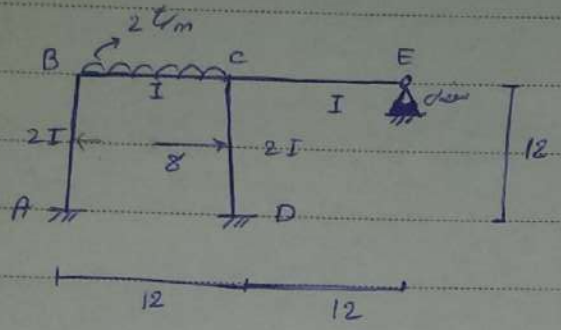
در واقع برش سمت چپ یکی کاهش است که باید در مرکز تکیه‌گاه پرش می‌کند

حال می‌توان با لنگر نوشتن حول تقاطع واکنش‌ها را نیز بدست آورده و نمودار لنگر و برش را رسم کرد.

Subject
Date

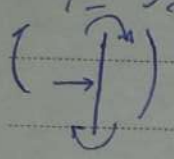
برای این روش فرض می‌کنند که سازه چند درجه آزادی داشته باشد (فقط ماتریس را بزرگتر می‌کند)
برای روش شیب افت (درجه نامعینی (درجه آزادی)) مهم نیست و تنها باعث بزرگتر شدن ماتریس می‌شود.

مثال)



4 مجهول داریم باید رابطه‌ی شیب افت را برای تک تک اعضا بنویسیم پس 8 رابطه باید بنویسیم.

AB : مثل این که یک عضو افقی داشته‌ایم ( ) و آن را 90° در جهت عقربه‌های ساعت چرخانده‌ایم



(برای نوشتن FEM از اعضای افقی چرخیده شده استفاده می‌کنیم)
اگر نیرو در سمت دیگر بود جهت چرخش پادساعتگرد بود (برای فهمیدن علامت M ها) (همیشه افقی در جهت قائم است)

$$AB\begin{cases} M_{AB} = 0 + \frac{2E(2I)}{12}\left(2\cancelto{0}{\theta_A} + \theta_B - 3\cancelto{0}{\Delta_{AB}}/12\right) \\ M_{BA} = 0 + \frac{2E(2I)}{12}\left(2\theta_B + \cancelto{0}{\theta_A} - 3\cancelto{0}{\Delta_{AB}}/12\right) \end{cases}$$

$$BC\begin{cases} M_{BC} = \frac{-1}{12}\times 2\times 12^2 + \frac{2EI}{12}\left(2\theta_B + \theta_C - 3\cancelto{0}{\Delta_{BC}}/12\right) \\ M_{CB} = \frac{1}{12}\times 2\times 12^2 + \frac{2EI}{12}\left(2\theta_C + \theta_B - 3\cancelto{0}{\Delta_{BC}}/12\right) \end{cases}$$

$$CD\begin{cases} M_{DC} = -\frac{1}{8}\times 8\times 12 + \frac{2E(2I)}{12}\left(2\cancelto{0}{\theta_D} + \theta_C - 3\cancelto{0}{\Delta_{DC}}/12\right) \\ M_{CD} = +\frac{1}{8}\times 8\times 12 + \frac{2E(2I)}{12}\left(2\theta_C + \cancelto{0}{\theta_D} - 3\cancelto{0}{\Delta_{DC}}/12\right) \end{cases}$$

$$CE\begin{cases} M_{CE} = 0 + \frac{2EI}{12}\left(2\theta_C + \theta_E - 3\cancelto{0}{\Delta_{CE}}/12\right) \\ M_{EC} = 0 + \frac{2EI}{12}\left(2\theta_E + \theta_C - 3\cancelto{0}{\Delta_{EC}}/12\right) \end{cases}$$

شرایط مرزی $\theta_A = \theta_D = 0$

$\Delta_{AB} = \Delta_{BC} = \Delta_{CE} = \Delta_{DC} = 0$

جابجایی (Δ) اصلاً نداریم.

سازه‌ای که Δ داشته باشد دارای حل متفاوت است

Subject
Date

تعادل را برای ۳ نقطه باید بنویسیم.

سه مجهول θ_B و θ_C و θ_E داریم پس باید معادله‌ی تعادل لنگر را برای سه نقطه‌ی B و C و E بررسی کنیم.

نقطه B $\quad M_{BA} + M_{BC} = 0$

نقطه C $\quad M_{CB} + M_{CE} + M_{CD} = 0$

نقطه E $\quad M_{EC} = 0$

دقت شود که حق نداریم در اینجا اندیس ها را جابه‌جا کنیم

$$-24 + \frac{2EI}{12}\left(6\theta_B + \theta_C\right) = 0$$

$$36 + \frac{2EI}{12}\left(8\theta_C + \theta_B + \theta_E\right) = 0$$

$$0 + \frac{2EI}{12}\left(2\theta_E + \theta_C\right) = 0$$

می‌توانیم از معادله‌ی سوم

سه معادله و سه مجهول داریم. دستگاه

نرم‌افزارها همه از روش حذفی برای حل استفاده می‌کنند.

ترتیب معادلات با ترتیب مجهولات باید یکسان باشد

$$\frac{2EI}{I}\begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 1 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \theta_B \\ \theta_C \\ \theta_E \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 24 \\ -36 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

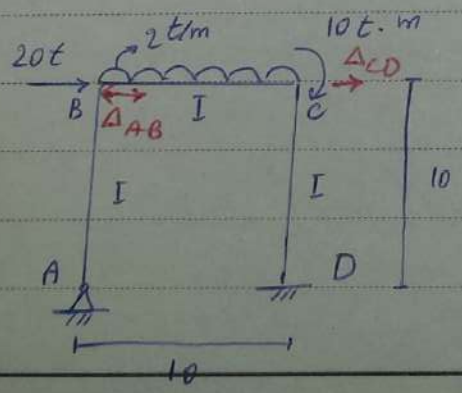
ماتریس سختی همواره متقارن، روی قطر اصلی عدد منفی نخواهیم داشت (اگر داشتیم سطر را درستی ضرب می‌کنیم)

در میان ماتریس سختی بزرگتر از صفر است

پس اصول روش شیب افت برای هر درجه آزادی دلخواه ثابت است.

مسئله‌ای که Δ داشته باشد با بدون Δ متفاوت است.

می‌خواهیم به بررسی مثالی بپردازیم که Δ داشته باشد



مثال)

در شیب افت تغییر شکل دهانه‌ها یکسان نداریم و تنها جابه‌جایی در راستای قائم داریم.

Subject
Date

اینجا باید در اعمال شرایط مرزی دقت کرد.

تمام Δ ها را می‌نویسیم.

(اگر بار روی گره وارد شود متعلق به گره است و متعلق به هیچ عضوی نیست)

بار 20t روی گره است و متعلق به هیچ عضوی نیست

در اینجا در نظر گرفتیم که Δ_{AB} مثبت است (از شکل مسئله مشخص است که سمت راست بالاتر است)

$$AB\begin{cases} m_{AB} = 0 + \frac{2EI}{10}\left(2\theta_A + \theta_B - 3\Delta_{AB}/10\right) \\ m_{BA} = 0 + \frac{2EI}{10}\left(2\theta_B + \theta_A - 3\Delta_{AB}/10\right) \end{cases}$$

باید تصمیم گرفت که آیا Δ_{AB} را کاملاً محاسبه کرده و قرار دهیم (جهت چرخش) و یا این که کاملاً آخری بنویسیم و کلاً مجهول در نظر بگیریم و تعداد را به عهده روش بگذاریم.

عضو BC دو انتهایش در راستای قائم جابجایی ندارند پس Δ آن‌ها صفر است

$$BC\begin{cases} m_{BC} = -\frac{1}{12}\times 2\times 10^2 + 2EI/10\left(2\theta_B + \theta_C - 0\right) \\ m_{CB} = \frac{1}{12}\times 2\times 10^2 + 2EI/10\left(2\theta_C + \theta_B\right) \end{cases}$$

$$CD\begin{cases} m_{CD} = 0 + \frac{2EI}{10}\left(2\theta_C + \cancel{\theta_D}^{\,0} - 3\Delta_{CD}/10\right) \\ m_{DC} = 0 + \frac{2EI}{10}\left(2\cancel{\theta_D}^{\,0} + \theta_C - 3\Delta_{CD}/10\right) \end{cases}$$

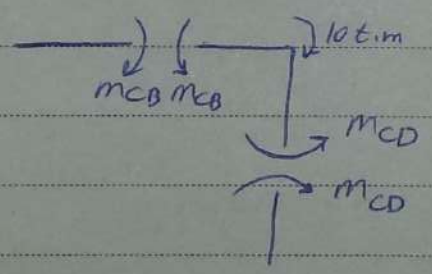
یک سری از اطلاعات هندسی را همین جا اعمال می‌کنیم

معادلات تعادل:

A: $m_{AB} = 0$

B: $m_{BA} + m_{BC} = 0$

C:



مجهولات زیادند. فعلاً سه معادله تعادل می‌توانیم بنویسیم که آن‌ها را برای B و C می‌نویسیم

نوشتن معادله تعادل برای D کار بیهوده است

$+\circlearrowleft \sum M_C = 0 \Rightarrow m_{CD} + m_{CB} - 10 = 0$

اگر در نقطه‌ای لنگر متمرکز داشتیم، لنگر متمرکز وارد رابطه‌ی تعادل می‌شود.

تعادل (لنگر)

در نسبت: اگر لنگر در جهت عقربه‌های ساعت بود با علامت منفی وارد معادله می‌شود (خارجی)

روش شیب افت با نقطه‌ای انتها کار دارد

Subject
Date

سه معادله‌ی تعادل و پنج مجهول داریم. پس یا باید یک رابطه‌ی دیگر بیابیم یا رابطه‌ای بین مجهولات بیابیم.

$$\Delta_{AB} = \Delta_{CD} = \Delta$$ نمی‌خواهیم انعطاف یا فشردگی داشته باشیم

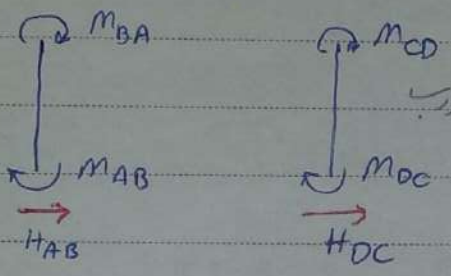
← 4 معادله و پنج مجهول رسیدیم. (وقتی سازه‌ها Δ دارند باید به دنبال معادله‌ی برش باشیم)

در سازه‌هایی که Δ دارند (دو فعال) معادله برش می‌نویسند. ۷ نیروی برشی تمام اعضای دارای Δ را تعیین می‌کنند.

CD و AB در اینجا Δ دارند. آن‌ها را بیرون می‌آوریم (اگر با گذر در داشته آن هم وارد می‌شود.)

برای نوشتن معادله‌ی برش، غالباً نیروی برشی اعضای دارای Δ را تعیین می‌کنند

معادله‌ی برش می‌تواند ΣF_x یا ΣF_y و یا حتی ΣF در یک جهت مورب برای کل سازه باشد.



چون می‌خواهیم نیروی المان در عضو را حساب کنیم جهت استاتیکی برای ما مهم نیست

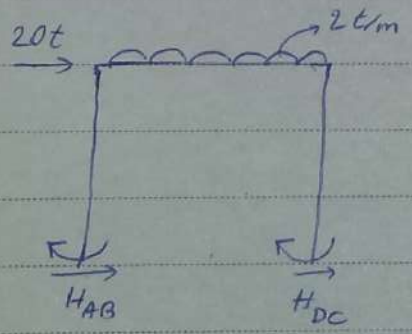
$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = 0 \Rightarrow M_{AB} + M_{BA} - H_{AB} \times l = 0$$

$$H_{AB} = \frac{M_{BA} + M_{AB}}{l}$$

$$H_{DC} = \frac{M_{DC} + M_{CD}}{l}$$ می‌تواند طول‌ها با هم مساوی نباشد

حال کل سازه را بررسی می‌کنیم:

گشتاورها را چون نیاز نداریم وارد نمی‌کنیم



معادله‌ی نیروی Σ را در مان جهت Δ می‌نویسیم (که H را از آن تعیین کنیم محاسبه کردیم)

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow \underbrace{H_{AB} + H_{DC} + 20 = 0}_{\text{معادله برش}}$$

(در سازه‌هایی که دارای Δ (حرکت جانبی) هستند این کار را باید انجام دهیم)

H‌ها در نهایت برحسب M نوشته می‌شوند که M هم در نهایت برحسب θ و Δ نوشته می‌شود.

Subject
Date

معادله اول شاخه

$$0 + \frac{2EI}{10}\left(2\theta_A + \theta_B - 3\Delta/10\right) = 0$$

معادله دوم

$$-16.66 + \frac{2EI}{10}\left(4\theta_B + \theta_A + \theta_C - 3\Delta/10\right) = 0$$

$$16.66 + \frac{2EI}{10}\left(4\theta_C + \theta_B - 3\Delta/10\right) - 10 = 0$$

دو طرف معادله برش را در 10 (طول) ضرب می‌کنیم تا مخرج‌ها از بین برود

معادله برش

$$0 + \frac{2EI}{L}\left(3\theta_A + 3\theta_B + 3\theta_C - 12\Delta/10\right) + 200 = 0$$

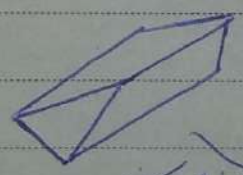
چهار معادله و چهار مجهول

$$2\frac{EI}{L}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 4 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 4 & -3 \\ -3 & -3 & -3 & +12 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \\ \theta_C \\ \Delta/10 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 16.66 \\ -6.66 \\ +200 \end{Bmatrix}$$

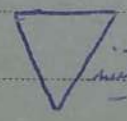
میدان Δ را مجهول گذاشت
یا $\Delta/10$ را مجهول گذاشت که
از بین دوران است.

روی قطر اصلی نباید عدد منفی داشته باشیم
اگر باشد آن سطر را در یک منفی ضرب می‌کنیم

تا اینجا در روش شیب افت، اعضا عمود بر هم بودند پس یکی Δ داشت و دیگری نداشت. ولی در واقعیت اعضای توانند نسبت به هم زاویه داشته باشند.



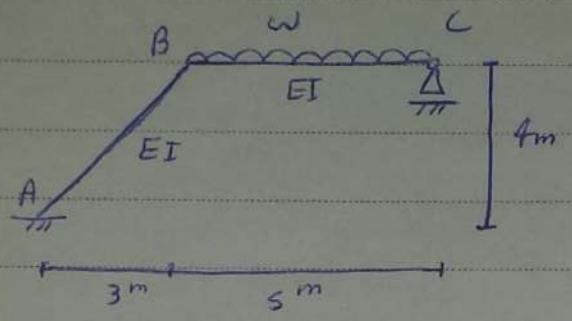
اگر بخواهیم یک مرحله این کشتی را بررسی کنیم



اعضا بر هم عمود نیستند

PAPCO

Subject
Date



عضو AB می‌تواند در راستای عمود بر خود Δ داشته باشد

" BC " " " " " " " .

اعضا وقتی بر هم عمود نیستند معمولاً بین Δ های آن‌ها رابطه وجود دارد.

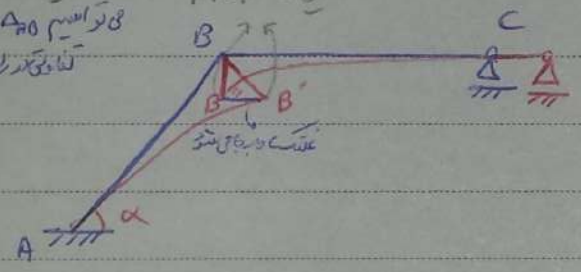
می‌خواهیم این رابطه را بیابیم و مسئله را حل کنیم.

وقتی اعضا بر هم عمود نیستند باید رابطه‌ی هندسی بین Δ های آن‌ها را بدست آوریم.

برای این کار معمولاً روی نقطه مطالعه انجام می‌دهند. اجازه می‌دهیم که هر کدام به طور مستقل Δ خود را داشته باشند.

این دو نقطه باید بر هم منطبق شوند.

می‌توانیم Δ_{AB} را بسمت چپ هم بکشیم تا وقتی که رابطه ایجاد نمی‌شود.

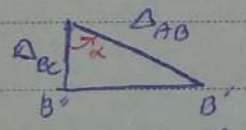


نقطه‌ی A، Δ ندارد پس B را بررسی می‌کنیم

صفحه باید حرکت صورت گیرد تا B' بر B منطبق شود

← جهت Δ ای که در نظر می‌گیریم اهمیتی ندارد

از هم جدا کرده، Δ ها را به طور مستقل می‌کشیم. هندسه باید به صورتی تغییر کند که Δ ها بر هم منطبق شود.



$$\Delta_{BC} = \Delta_{AB} \times \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = 0.6 \Rightarrow \Delta_{BC} = 0.6\,\Delta_{AB}$$

طبق علامت شیب افت

$$\Delta_{BC} = -0.6\,\Delta_{AB}$$

یا به همین صورت دارد رابطه‌ی ما را می‌کنیم، یا اینکه منفی BC را در شیب افت ضرب کرده و بعد رابطه‌ی هندسی را بدست می‌آوریم.

این رابطه هندسی است و برای تبدیل رابطه در رابطه شیب افت باید علامت آن تعیین شود

بدون پیدا کردن این رابطه نمی‌توانیم مسئله را کامل حل کنیم

حال از روش شیب افت استفاده می‌کنیم.

اسکلت درجه‌ی مثال ما با مقدار جهت معلوم Δ ها را وارد نموده است

$$AB \begin{cases} M_{AB} = 0 + \frac{2EI}{5}\left(2\cancel{\theta_A}^{\,0} + \theta_B - 3\Delta_{AB}/5\right) \\ M_{BA} = 0 + \frac{2EI}{5}\left(2\theta_B + \cancel{\theta_A}^{\,0} - 3\Delta_{AB}/5\right) \end{cases}$$

دقت: با توجه به جهتی که انتخاب کرده‌ایم Δ مثبت است

(Δ یک اندازه و یک جهت دارد)

Subject
Date

Δ_{BC} در خلاف جهت عقربه ساعت پس منفی است.

$$BC\begin{cases} M_{BC} = -\frac{1}{12}wl^2 + \frac{2EI}{5}\left(2\theta_B + \theta_C + 3\frac{\overset{0.6\Delta_{AB}}{\Delta_{BC}}}{5}\right) \\ M_{CB} = +\frac{1}{12}wl^2 + \frac{2EI}{5}\left(2\theta_C + \theta_B + 3\frac{\Delta_{BC}}{5}\right) \end{cases}$$

پس شرایط مرزی را اعمال می‌کنیم
پس نوشتن معادلات تعادل:

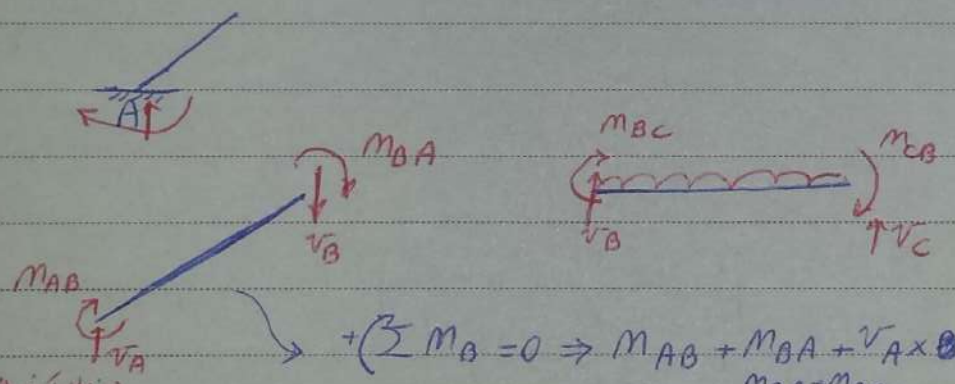
B نقطه : $M_{BA} + M_{BC} = 0$

C نقطه : $M_{CB} = 0$

دو معادله‌ی تعادل داریم

Δ_{BC} و Δ_{AB} یک مجهول محسوب می‌شوند. پس سه مجهول (Δ و θ_C و θ_B) و دو معادله داریم.
سازه‌ها وقتی از حالت عمودی خارج می‌شوند باید به دنبال معادله‌ی برش باشیم.

در نقطه‌ی A مؤلفه افقی نداریم (چون هیچ نیروی افقی به سازه وارد نمی‌شود)



$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 \Rightarrow M_{AB} + M_{BA} + V_A \times 3 = 0$$
$$\Rightarrow V_A = -\frac{M_{BA} + M_{AB}}{3}$$

(بنظر این که نیروها در جهت عمود ساعتگرد هستند ما آنها را می‌توانستیم به سمت بالا بگذاریم
جهت V هیچ محدودیتی ندارد.)

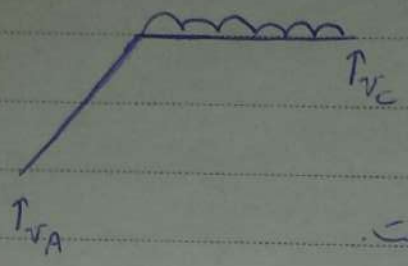
حال عضو BC را بیرون می‌کشیم:

$$\text{عضو } BC \Rightarrow +\circlearrowleft \sum M_B = 0 \Rightarrow M_{BC} + M_{CB} + \frac{wl^2}{2} - V_C \times 5 = 0$$
$$V_C = \frac{1}{5}\left(M_{BC} + M_{CB} + wl^2/2\right)$$

M_{CB} صفر است. اگر دقت کنیم از طرفی می‌افتد اما مارتین سختی نامتقارن می‌شود. پس وارد نمی‌کنیم (در مقاله دقت نمی‌کنم)

Subject
Date

فقط نیروها را نشان داده‌ایم:



معادله برش

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow V_A + V_C - wl = 0$$

معادله برش می‌تواند ΣF_x یا ΣF_y و یا حتی ΣF در یک جهت مورب باشد.

در مورد اعضای غیرعمود باید در یافتن معادله برش دقت بیشتری کرد.

یافتن Δ ها و نوشتن معادله‌ی برش تنها تفاوت اعضای غیرعمود نسبت به اعضای عمود است.

$$-\frac{1}{3}\left(M_{AB}+M_{BA}\right)+\frac{1}{5}\left(M_{BC}+M_{CB}+\frac{wl^2}{2}\right)-wl=0$$

$$-\frac{1}{12}wl^2+\frac{2EI}{5}\left(3\theta_B+3\theta_C-12\frac{\Delta_{AB}}{5}\right)=0$$

$$\frac{1}{12}wl^2+\frac{2EI}{5}\left(2\theta_C+\theta_B+1.8\,\Delta_{AB}/5\right)=0$$

رابطه‌ی بعدی برای نوشتن رابطه‌ی * است که باید در 15 ضرب می‌کنیم.

$$0+\frac{2EI}{5}\left(24\theta_B+9\theta_C+40.8\frac{\Delta_{AB}}{5}\right)-3\frac{wl^2}{2}+15\,wl=0$$

می‌توانیم l را جایگذاری کنیم: $-37.5+75=37.5$

دقت شود که در امتحان ماتریس حتماً متقارن تحویل داده شود.

$$\frac{2EI}{5}\begin{bmatrix}3 & 1 & -1.2\\ 1 & 2 & 1.8\\ -6 & \pm 9 & 40.8\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\theta_B\\ \theta_C\\ \Delta_{AB}/5\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\frac{1}{12}wl^2\\ -\frac{1}{12}wl^2\\ \pm 37.5w\end{Bmatrix}\times\frac{1}{5}$$

$\times\frac{1}{5}$

~~چون سطر سطر منفی نباید با منفی سطر را در منفی ضرب کنیم~~

~~ترتیب در منفی ضرب می‌شود در مجهولات~~

ماتریس ناقص‌تان پس برش‌ها و ماتریس

در معادله‌ی برش ما در 15 ضرب کنیم

اگر کل معادله سوم را در $\frac{1}{5}$ ضرب کنیم، ماتریس متقارن می‌شود.

از طریق شرط تقارن، اشتباهات مشخص می‌شود

ماتریس

برای سه درجه آزادی مشابه بالا، حل ماتریس ضرورتی ندارد. (برای دو درجه آزادی حتماً حل شود)

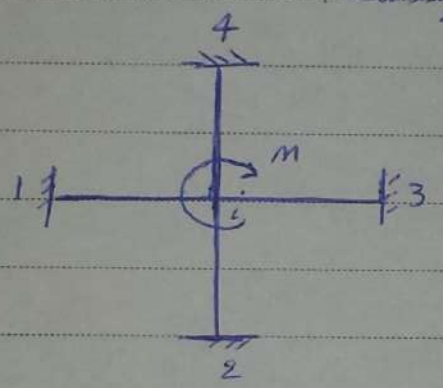
Subject
Date

اگر تعداد درجات آزادی زیاد بود و نمی توانستیم ماتریس فریب را بدست آوریم از روش های تکراری استفاده می کنیم
این روش ها مراحل را آسان می کنند ولی تعداد آن ها را زیاد می کنند.

روش پخش لنگر از روش های تکراری است.

روش پخش لنگر

اگر به چند سازه که یک نقطه ی مشترک دارند لنگر وارد شود سهم هر یک چقدر است؟



بر اساس نسبت سختی ها لنگر بین آن ها توزیع می شود.

$$M_{i1} = \overset{\text{اگر وجود دارد } FEM}{0} + \frac{2EI}{l_{i1}}\left(2\theta_i + \overset{0}{\cancel{\theta_1}} - 3\overset{0}{\cancel{\psi_{i1}}}\right)$$

به خاطر گیردار بودن

$$M_{i2} = 0 + \frac{2EI}{l_{i2}}\left(2\theta_i + 0 + 0\right)$$

$$\vdots$$

$$M_{i4} = 0 + \frac{2EI}{l_{i4}}\left(2\theta_i + 0 + 0\right)$$

مرحله بعد: جمع لنگرهای داخلی برابر است با لنگر خارجی $\sum_{j=1}^{4} M_{ij} = M_{i1} + M_{i2} + M_{i3} + M_{i4} = M$

تعریف: (برای ساده شدن قرار می دهیم) $\frac{EI}{l} = K$ (برای هر کدام از اعضا متفاوت می شود)

$$M = 4K_1\theta_i + 4K_2\theta_i + 4K_3\theta_i + 4K_4\theta_i$$
$$= 4\sum K \cdot \theta_i$$

$$\theta_i = \frac{M}{4\sum K}$$

با داشتن θ_i می توانیم لنگر هر کدام از اعضا را محاسبه کنیم.

Subject
Date

$$M_{i1} = 4K_1\theta_i = 4K_1 \frac{M}{4\Sigma K} = \frac{K_1}{\Sigma K} M$$

فقط فقط

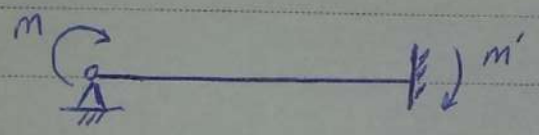
$\frac{K_1}{\Sigma K}$ ← ضریب توزیع (لنگر) D

همواره نشان می‌دهند با

اگر لنگری به مجموعه‌ای از اعضا وارد شود به نسبت سختی بین آن‌ها تقسیم می‌شود. ($K \overset{\uparrow}{=} \frac{EI}{L}$)

$$M_{i1} = D_1 M \quad , \quad M_{i2} = D_2 M$$

برای تیر مشبوک (مقطع ثابت)



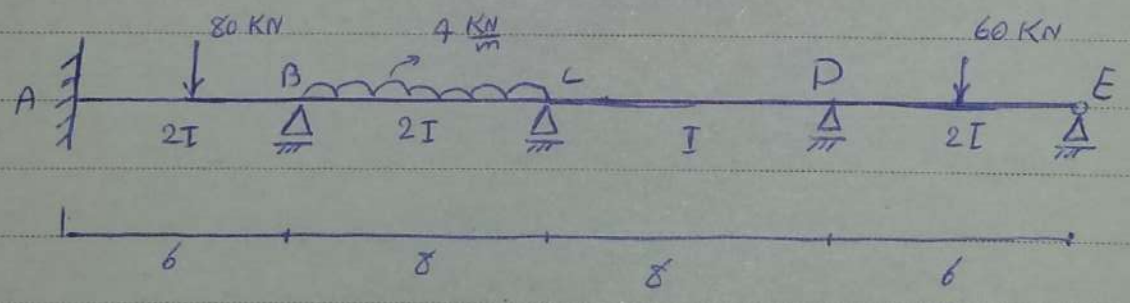
اگر در یک تکیه‌گاه M وارد کنیم در تکیه‌گاه دیگر M' وارد می‌شود (لنگر سمت آن) وارد می‌شود.

$$M' = \frac{1}{2} M$$

ضریب انتقال

روش پخش لنگر:

ضریب توزیع و ضریب انتقال را برای تیرهای مشبوک بیان کردیم.



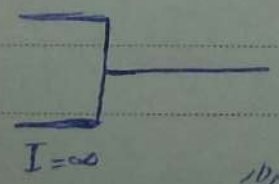
با روش شیب افت ۴ در ۴ می‌شود.

ابتدا باید محاسبات برای D را انجام دهیم

دو تکیه‌گاه خاص E و A داریم که تنها یک عضو آن‌ها وارد شده پس چطور D آن‌ها را بنویسیم؟ (تبصره‌های این روش)

گیردار

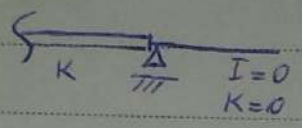
تکیه‌گاه گیردار مثل این است که:



برای تکیه‌گاه گیردار $D = \frac{K}{\Sigma K = \infty} = 0$

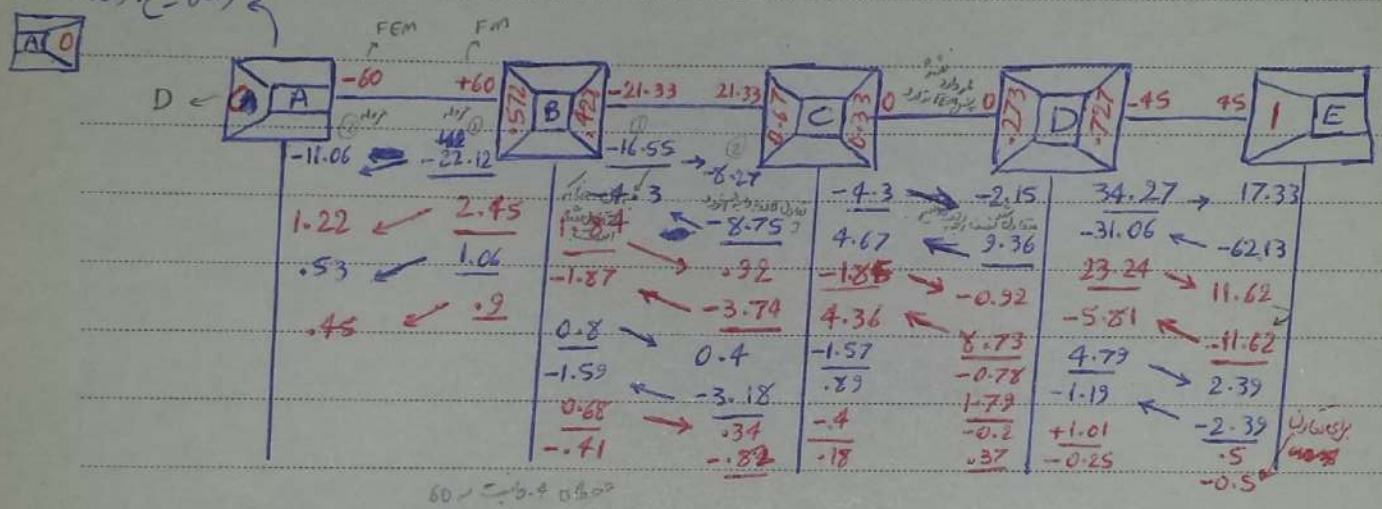
Subject
Date

تکیه‌گاه مفصلی یعنی نقطه‌ای که در برابر دوران هیچ مقاومتی از خود نشان نمی‌دهد پس آنجا $I=0$ است.



برای عضو متصل به تکیه‌گاه مفصلی $D = \frac{K}{\Sigma K} = \frac{K}{K} = 1$

(شکل صحیح: فقط برای زیبایی)



D را برای A و E قرار می‌دهیم. حال باید D را برای سایر نقاط محاسبه کنیم.

دقت: چون اعداد مطلق کار نداریم نسبت‌ها را می‌خواهیم می‌توانیم I را ۱ بنویسیم.

نقطه D:

$$K_{DC} = \frac{I}{8}$$

$$K_{DE} = \frac{2I}{6} = \frac{I}{3}$$

$$D_{DC} = \frac{1/8}{1/8 + 1/3} = 0.273$$

$$D_{DE} = \frac{1/3}{1/8 + 1/3} = 0.727$$

دقت کنید که جمع D ها باید یک شود. پس اعداد را دقیق بنویسید و خود سرد نکنید (مثلاً یک شود)

در نقطه‌ی C چون ها ما بین I و 2I داریم پس نسبت‌ها بدون محاسبه 1/3 و 2/3 می‌شود

Subject
Date

نقطه B

$K_{BA} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$K_{BC} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

سپس D را محاسبه می کنیم.

حال FEM را محاسبه و روی سازه قرار می دهیم. یعنی تصور می کنیم که به صورت مصنوعی کل سازه گیردار است.
(رفع تیرهای مصنوعی)

موقعی به سازه گیردار می گوییم که یک لنگر مانع از دوران آن شود. برای برقراری تعادل و برگرداندن سازه به حالت اصلی به اندازه ی لنگر مصنوعی و در خلاف جهت آن به سازه لنگر وارد می کنیم.

$60 - 21.33 = 38.67$

$$\rightarrow \begin{cases} -38.67 \times 0.428 \\ -38.67 \times .572 \end{cases}$$

حال نصف این لنگر به چپ و راست آن منتقل می شود.

$-11.06 \leftarrow -12.22$ و $-16.55 \rightarrow -8.27$

گره B متعادل شد. پس به سراغ C می رویم. پس از متعادل شدن نصف لنگر را به چپ و راست می دهد.

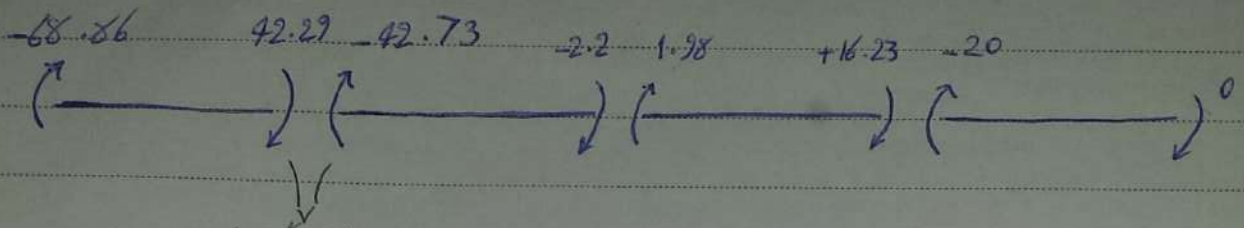
یک دور سازه را متعادل می کنیم. هر گره را که متعادل کنیم گره های بعدی (قبلی) را نامتعادل می کند. این کار را تکرار می کنیم

از B شروع می کنیم. تکیه گاه گیردار نیازی به بررسی ندارد. ؟ $(P=0)$

لنگر نامتعادل در هر بار کوچک و کوچکتر می شود. تعداد مراحل بستگی به میزان خطای دلخواه دارد.

نتیجه نهایی برابر جمع تمام لنگرهای باشد.

Subject
Date



این دو نقطه باید برابر باشند یعنی به عشان صفر شود.
اختلاف خطای عددی را نشان می‌دهد.

← می‌توان از مقدار میانگین این دو عدد استفاده کرد.

این روش به معنی واقعی ارتباطی بین دو کل سازه‌ها را بررسی می‌کند
روش کافی روش عددی دیگری است.

اگر سازه حرکت جانبی داشته باشد این روش ایراد خواهد داشت.