Subject:

Year. Month. Date. ( )

Strenght of Materials — استحکام مصالح

or — مقاومت مصالح / مواد

Mechanics of Materials — مکانیک مواد

E.P. Popov

2nd ed. 1976

ch.1 stress - Axial load — تنش - بارمحوری

ch.2 Strain - Hook's law - Axial load Problem — کرنش، قانون هوک، مسائل بارمحوری

ch.3 Torsion — پیچش

ch.4 Axial force - shear - and Bending moment — نیروی محوری، برشی و لنگر خمشی

ch.5 pure Bending of Beams — خمش خالص تیرها

ch.6 shearing stresses in Beams — تنش های برشی در تیرها

درس استاتیک:

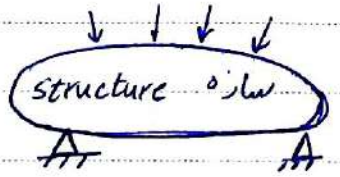
نیرو (بار) ← نیروهای خارجی ← بارخارجی ← عکس العمل های تکیه گاهی — Re-Action

نیروهای داخلی — internal force

در استاتیک این نیروها با استفاده از ۱. معادلات تعادل، ۲. انرژی (کار انرژی) مورد بررسی قرار می گیرند.

می خواهیم بررسی کنیم که در سازه ای با هندسه معلوم، مصالح معلوم، تکیه گاه معلوم و بار خارجی معلوم

چه بر سر سازه می آید یا چه خواهد آمد.



نیروی داخلی کنترل کننده ی شکست است.

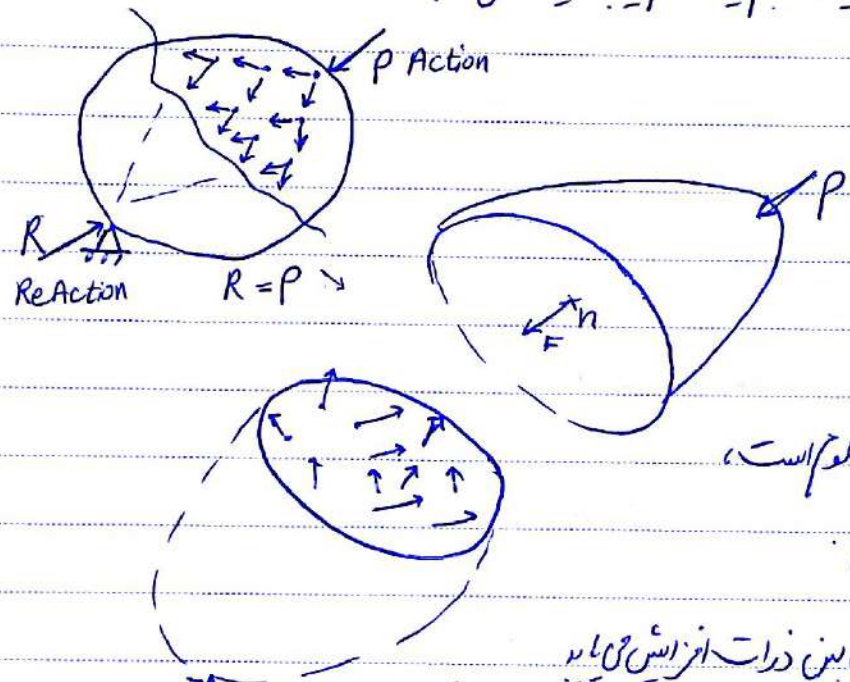
PqPCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

وقتی به جسمی نیرو وارد می‌شود، نیرو به بخشی از اتم‌ها وارد شده که این اتم‌ها نیز به اتم‌های دیگر وارد می‌کنند.

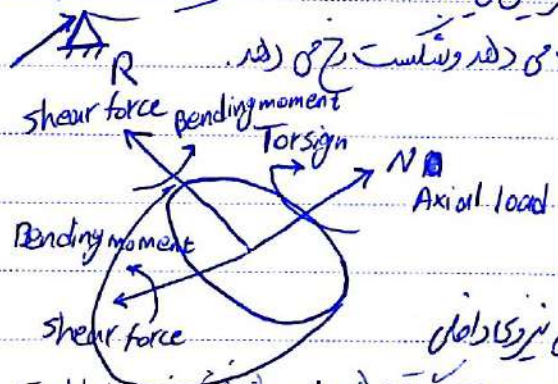
نیروی داخلی، نیرویی است که بین دو جسم یا دو اتم یا به همین شکل وجود دارد



چون نیروهای هر ذره در جهتی نامعلوم است،
برایند آن‌ها را در نظر می‌گیریم.

نیروی خارجی وارد بر سازه

اگر نیروی P بزرگ شود، نیروی بین ذرات افزایش می‌یابد تا جایی که دیگر سازه استحکام خود را از دست می‌دهد و شکست رخ می‌دهد.



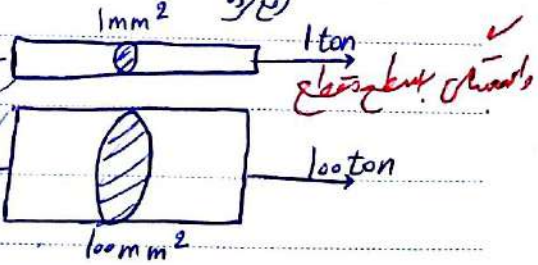
کمیتی به نام تنش تعریف می‌کنیم تا بتوانیم استقامت نیروی داخلی به هندسه را دقیقا با مصالح کار داشته باشیم. به عبارت دیگر تنش هم هندسه و هم مصالح هندسه را دارا است

نیروی داخلی ناشی از بارهای خارجی (به هندسه و بارخارجی بستگی دارد)

اگر مساوی شود شکست رخ می‌دهد.

نیروی داخلی در لحظه شکست (مصالح و هندسه)

شیر مقاومت کردن جسم:



دارای تنش یکسان هستند

تنش: نیروی داخلی در واحد سطح

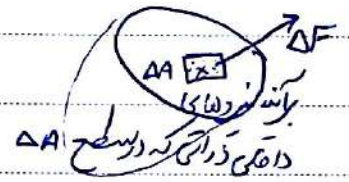
Subject:

Year. Month. Date. ( )

تنش متمرکز از سطح است.

تنش نیروی که (فیزیکی) روی یک ذره است و در واقع نیروی داخلی در یک نقطه (واحد سطح) است

واحد تنش: $\frac{N}{mm^2}$ MPa ، $\frac{lb}{in^2}$ Psi ، $\frac{Kgf}{cm^2}$ at ، $\frac{KN}{m^2}$ KPa ، $\frac{N}{m^2}$ Pa



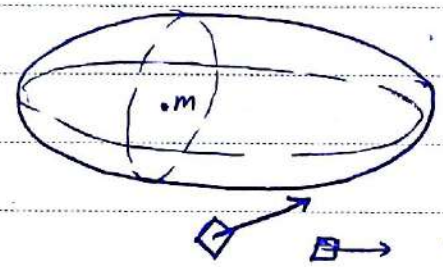
$$\text{تنش} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}$$

نیروی داخلی در واحد سطح

در هر صفحه ای که یک نقطه خاص از جسم باشد، تنش متفاوت خواهد بود چون ذرات محکمی با جهت های نیروی متفاوت در برابر (در صفحه) مختلف با آن عمل میکنند

وجهش فرق می کند.

پس برای یافتن تنش باید صفحه را که روی آن است مشخص شود.



تنش از یک صفحه عمود نیست

برای تنش باید سه فاکتور را بیان کرد.

Scalar	Vector	Stress (tensor 2nd order)
فاکتور 1	2	تنسور رتبه دو
	مقدار	
	جهت	
	صفحه	

تجزیه تنش

در هر نقطه تنش نرمال و افقی داریم. (نرمال = عمود)

تنش عمودی

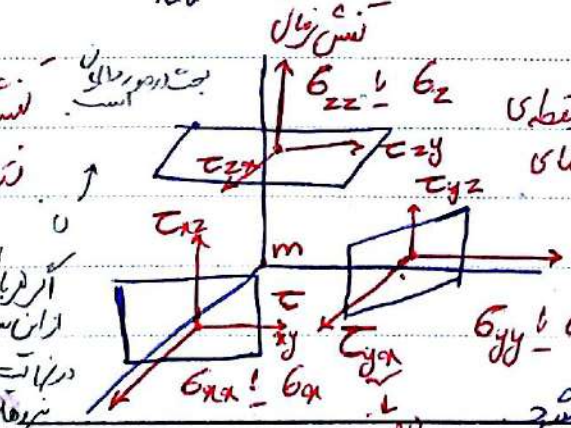
Sigma / Normal

σ

تنش مماسی

τ / Tangential : Shearing

Tau



تنش در یک نقطه با سه مولفه داشته باشید

اگر فقط با نقطه m یا روی یکی از این سه صفحه در نظر گیریم در حالت سه بعدی تمام نیروهای داخلی وارد بر این نقطه را داشته باشیم

تمام این تنش ها در نقطه ی m بوده ولی نرمال های متفاوتی دارند.

بیان تنش ها در یک نقطه:

حالت تنش ها در نقطه m

$\sigma_x = 100$ MPa

$\sigma_y = 20$ MPa

$\sigma_z = 10$ MPa

تنش های مماسی در جهت محورها تجزیه می شوند.

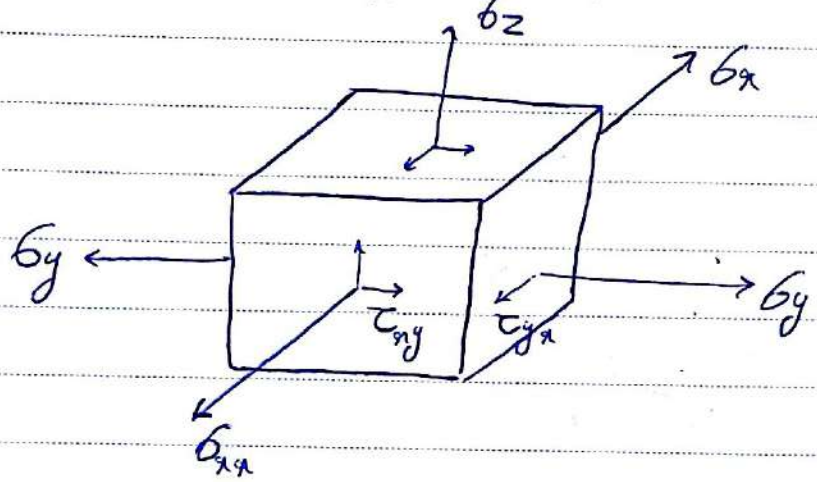
Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

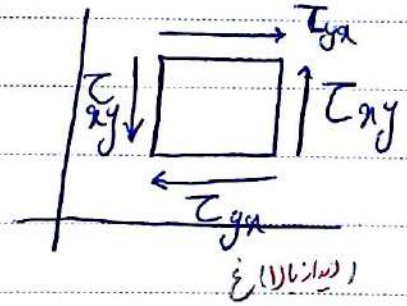
اگر ۹ مولفه‌ی تنش را داشته باشیم، می‌توانیم آن‌ها را برای هر صفحه‌ی دلخواه تصویر کنیم.

برای نمایش تنش‌ها در یک نقطه از این مکعب استفاده می‌کنیم.



حالت خاص دو بعدی

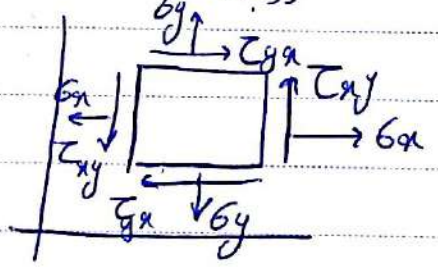
برش خالص (Torsion)



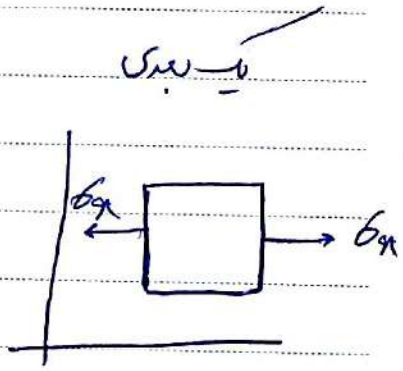
(ادامه‌ی ناراحتی)

مقاومت مصالح ۲

دو بعدی



یک بعدی

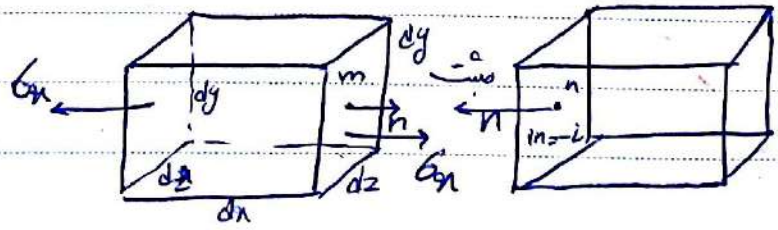


علامت تنش

۱- تنش نرمال

اگر تنش قطعه را می‌کشد علامت آن مثبت و در غیر این صورت (فشاری بودن) علامت تنش منفی است.

(نکته: از علامت محور مختصات استفاده نمی‌کنیم (برای تعیین علامت تنش))



PdPCO

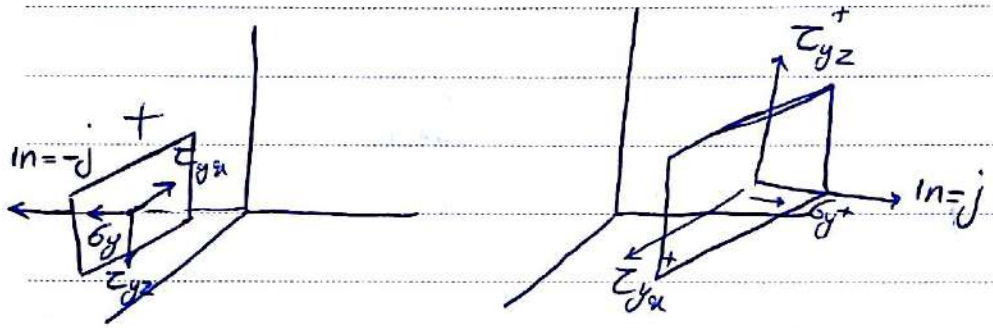
Subject:

Year. Month. Date. ( )

قرارداد دوم (که از آن استفاده می‌کنیم)

اگر بردار نرمال بر صفحه در جهت مثبت x باشد، تنش‌های در جهت مثبت x مثبت

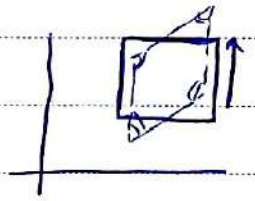
" " " منفی " " " منفی x مثبت



۲ تنش برشی

- تنش برشی باعث تغییر زاویه می‌شود.

اگر باعث بزرگ شدن زاویه شود مثبت (در غیر این صورت منفی)



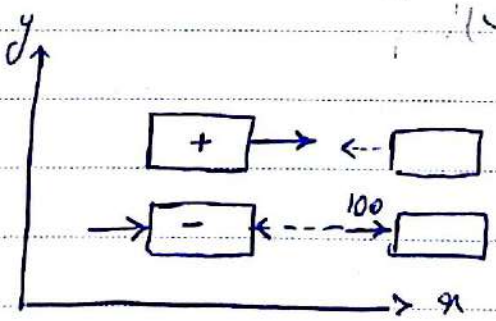
تنش هم معنی با نیروی داخلی است.

$$\text{تنش} = \frac{\text{نیروی داخلی}}{\text{مساحت سطح}} \quad \frac{N}{m^2} = Pa$$

برای نمایش تنش نمی‌توان از محورهای مختصات استفاده کرد، تمامی تنش‌های زیر یک مقدارند (در محور مختصات)

به تنهایی

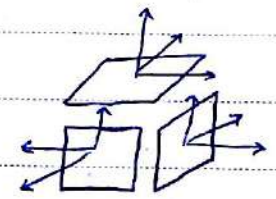
مثلاً تنش می‌تواند جهت مثبت x باشد ولی کشش (مثبت) یا فشاری (منفی) باشد



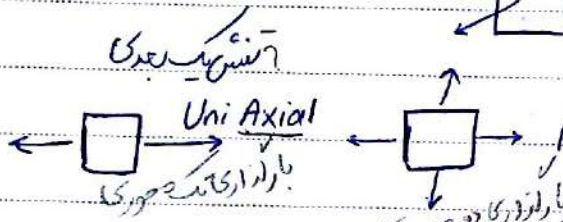
Subject:

Year. Month. Date. ( )

* اگر سه تنش واقع بر صفحه‌ی عمود بر لبه را داشته باشیم، می‌توانیم تنش برآوردی در صفحه دیگری بدست آوریم.



مکعب مستطیل واقع در یک نقطه است.



تنش Bi-Axial در (داشته باشیم)

نیروهای داخلی

- N نیروی خمشی (محوری)
- V نیروی برشی
- T گشتاور پیچشی
- M گشتاور خمشی ← در درس تحلیل سازه

معلوم ← روابط ← تغییر طول (در اثر نیرو) δ، تغییر زاویه (در اثر تنش) γ، تغییر شکل

می‌خواهیم از معلومات به روابطی برای بدست آوردن تنش و تغییر شکل برسیم

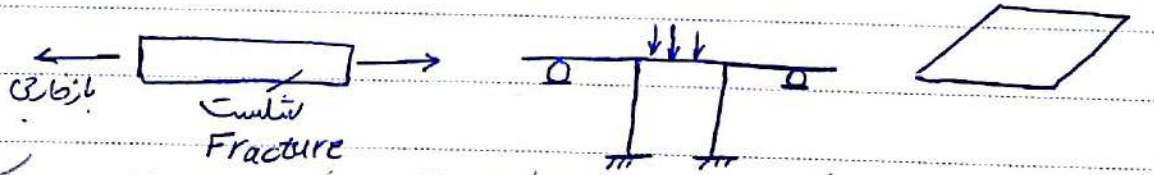
متاومت مصالح 2

☆ چیزهایی که در مقاومت مصالح یک مهندس می‌خواند.

تنش مجاز — ضریب اطمینان

1.7 Allowable stress - Factor of safety

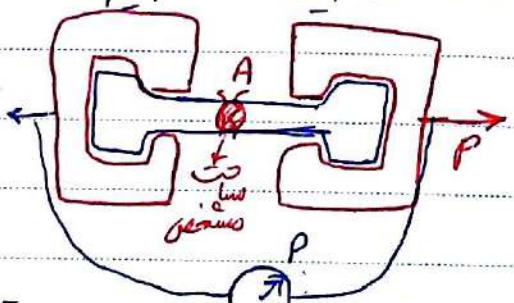
Page 18



برای بهترین حالت طراحی، تنش باید نزدیک به تنش مجاز باشد که از طریق تقسیم تنش در لحظه شکست بر ضریب اطمینان بدست می‌آید.

برای اطمینان از ایمنی، لازم است تنش مجاز را بدانیم که با انجام آزمایش تنش ساده Simple tension test

را به دست آوریم. در این آزمایش نمونه‌ای در شکل در اختیار داریم. (با جنس دلخواه). نمونه را بین دو فک می‌بندیم و فک‌ها را می‌کشیم از نازک قابل تحمل توسط نمونه عبور می‌دهیم.



$P_{\text{لحظه شکست}} = P_{ult}$ ultimate load

$$\sigma_{ult} = \frac{P_{ult}}{A}$$

تنش بدست آمده از آزمایش را بر ضریب اطمینان تقسیم کرده و با تنش مجاز مقایسه می‌کنیم.

$$\sigma_{allowable} = \frac{\sigma_{ult}}{F_s}$$ ضریب اطمینان

PAPCO

روش‌هایی که ضریب اطمینان را تعیین می‌کنند:

ضریب اطمینان مشخص می‌کند که تنش در لحظه شکست تا چند برابر تنش مجاز باشد.
هرچه ایمنی بیشتر باشد، باید ضریب اطمینان نیز بیشتر باشد.

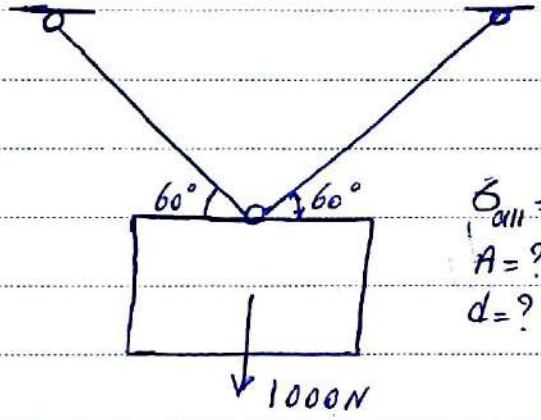
Subject:

Year. Month. Date. ( )

AISC: American Institue of steel construction

AcI : American concrete institue

مثال:

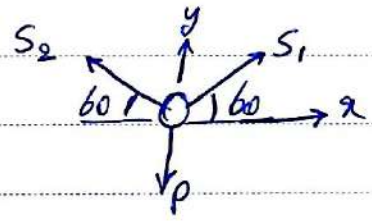


$\sigma_{all} = 10'000 pa$ تنش مجاز (به جنس بستگی دارد.)

$A = ?$ → سطح مقطع میله

$d = ?$ → قطر میله

در اولین گام نیروها را رسم می‌کنیم.
(نیروهای داخلی را محاسبه می‌کنیم.)



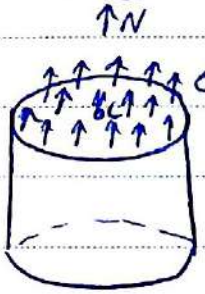
$\Sigma F_x = 0 \rightarrow S_1 \cos 60° - S_2 \cos 60° = 0$

$S_1 = S_2 = S$

$\Sigma F_y = 0 \rightarrow 2 . S . \sin 60 - P = 0$

$S = P = 1000 N$

تنش: نیروی محوری (که عمود بر سطح است) از مرکز سطح نگذرد، در این صورت تنش‌های حاصل به صورت یکنواخت در مقطع توزیع شده‌اند. یعنی:

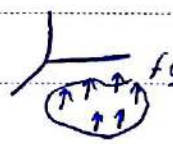


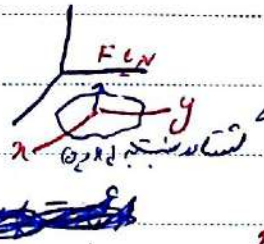
$\sigma = \frac{N}{A}$

$\int \sigma . y . dA = N \times \bar{y}_c = 0$ (یکنواخت) صفر

$\bar{y}_c = 0$

$\sigma \int y . dA = 0$

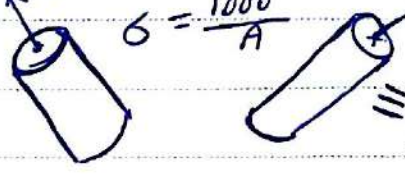




ادامه جواب:

$S_2 = S = P = 1000 N$

$\sigma = \frac{1000}{A}$



$S_1 = S = P = 1000 N$

$\equiv$

$\sigma = \frac{1000}{A}$ تنش موجود (به هندسه بستگی دارد.)

برای جلوگیری از خرابی

$\sigma_{موجود} \leq \sigma_{مجاز}$

$\frac{1000}{A} \leq 10000 \frac{N}{m^2} \rightarrow A \geq 0.1 m^2 = 10^5 mm^2$

$d = 100 mm$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

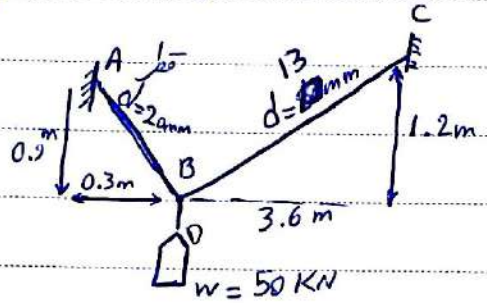
problem 1.13

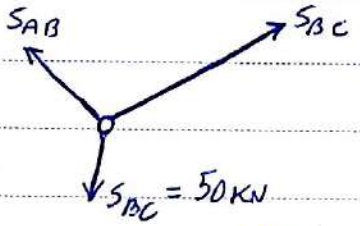
Ans. $\sigma_{AB} = 151$ mpa

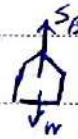
$\sigma_{BC} = ?$

BD , BC , AB

d = 20mm 13 20







$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow S_{BD} = W = 50$ KN

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow -S_{AB} \times \frac{3}{\sqrt{90}} + S_{BC} \frac{3.6}{1.2\sqrt{10}} = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow S_{AB} \frac{9}{3\sqrt{10}} + S_{BC} \frac{1.2}{1.2\sqrt{10}} = 50$$

$$\boxed{S_{AB} = 3 S_{BC}}$$

$$\frac{10}{\sqrt{10}} S_{BC} = 50$$

$$S_{BC} = 5\sqrt{10} \text{ KN}$$

$$S_{AB} = 15\sqrt{10} \text{ KN}$$

$$\sigma_{AB} = \frac{S_{AB}}{A_{AB}} \qquad A_{AB} = \left(\frac{\pi}{4}\right)(20)^2 = 100\pi \text{ mm}^2$$

$$\sigma_{AB} = \frac{15\sqrt{10} \text{ KN}}{100\pi \text{ mm}^2} = \frac{(15\sqrt{10})(1000\text{N})}{(100\pi)(10^{-6})\text{m}^2} = 149 \text{ mpa}$$

$$\sigma_{BC} = \frac{(5\sqrt{10})(1000\text{N})}{(\frac{\pi}{4})(169)\text{mm}^2} = 119.12 \text{ mpa}$$

$$\sigma = \frac{(50)(1000)}{(\frac{\pi}{4})(400)} = 159.15 \text{ mpa}$$

PAPCO

Subject:

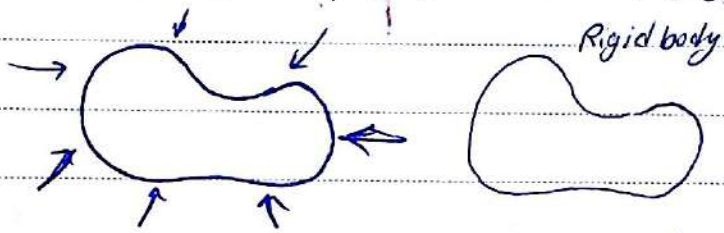
Year. Month. Date. ( )

ch2

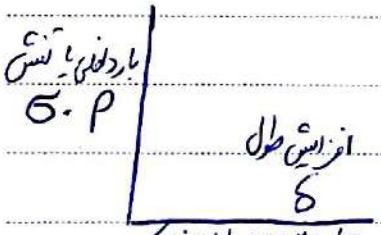
Strain (کرنش) , Hook's law (قانون هوک) , Axial load problem (مسئله بار محوری)

تغییر شکل: وقتی به جسمی نیرو وارد می‌شود، دارای نیرو و تغییر شکل می‌شود.

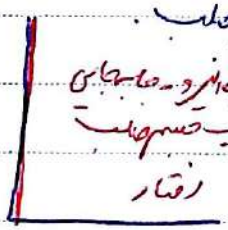
جسم صلب - Rigid: دارای هیچ نیرو و تغییر شکل نمی‌باشد. (ذرات در این اجسام جابه‌جا نمی‌شوند.)



برای نمایش تغییر شکل از نمودار زیر استفاده می‌کنیم: (نمودار نیرو و جابه‌جایی (منحنی رفتار))



برای جسم صلب

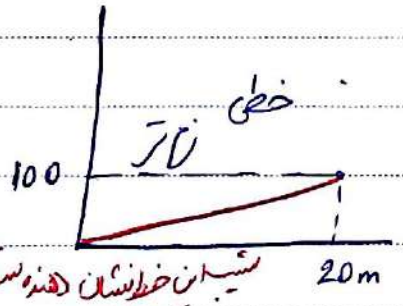


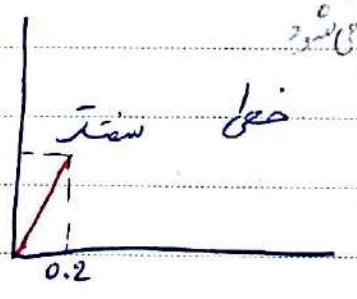
از دو نوع منحنی رفتار یکی بر پایه نیروی خارجی و جابه‌جایی (P-δ) و دیگری بر پایه تنش - کرنش (σ-ε) برای نمایش رفتار جسم استفاده می‌کنیم.

رابطه‌ی رفتار ممکن است خطی یا غیرخطی باشد.

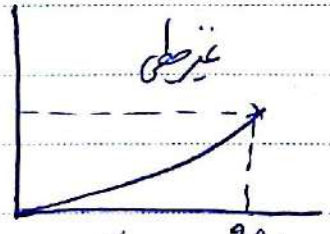
منحنی رفتار معمولاً از حسب تنش - کرنش رسم می‌شود.

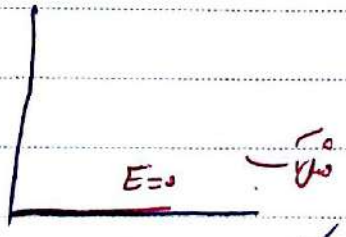
هر چه شیب منحنی زیاد باشد، ماده نرم‌تر و قابلیت تغییر شکل‌پذیری بیشتری دارد.





شیب این خط نشان دهنده سفتی یا نرمی مصالح است.





اگر با صفر شدن نیرو، جابه‌جایی هم برگشت (صفر شد) مصالح را الاستیک، نشان و یا برگشت‌پذیری نامند.

به موادی که این گونه نیستند غیرالاستیک می‌گویند.

جسم به اندازه‌ی اولیه برگشت و جابه‌جایی صفر شد

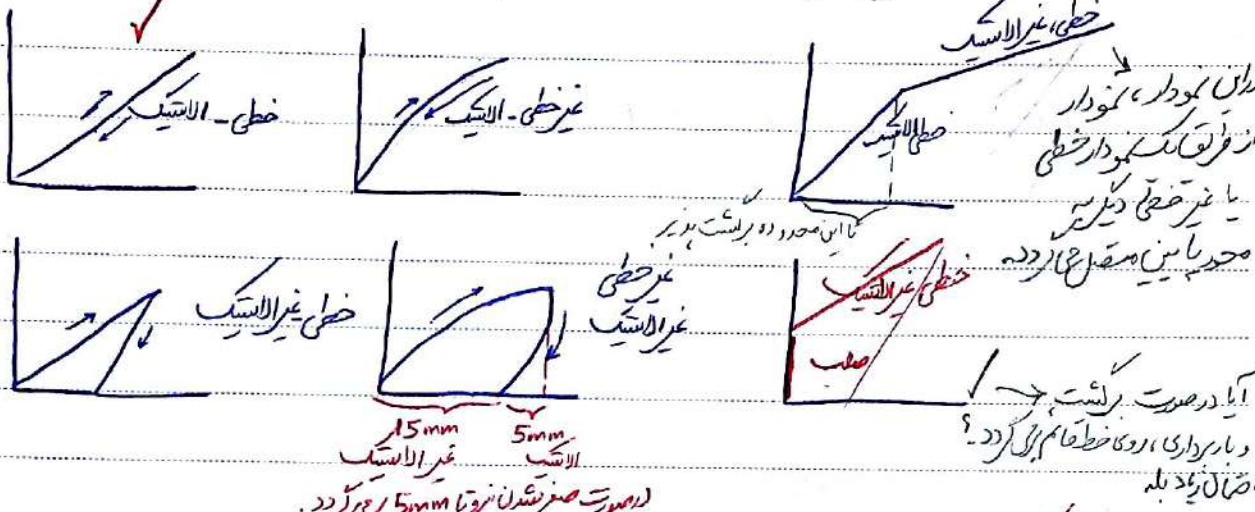
PAPCO

Subject:

Year. Month. Date.

پلاستیک حالت خاصی از غیرالاستیک است که کاملا" برگشت ناپذیر است.

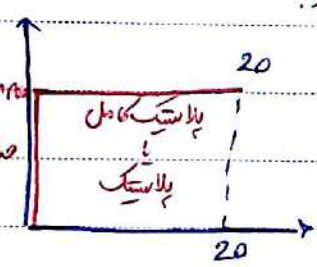
در غیرالاستیک ها در صورت کاهش نیرو جسم کاملا" برگشت می کند و قدرتی از خود دور نمی کند



در این نمودار، نمودار از قرینه نمودار خطی یا غیر خطی دیگر در محدوده پایین متقارن رسم شده

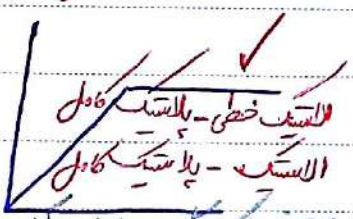
آیا در صورت برگشت، روی خط قبلی برگشت می کند؟ و باربرداری، روی خط قبلی برگشت می کند؟

به احتمال زیاد بله



در صورت صفر شدن نیرو تا 5mm برمی گردد.

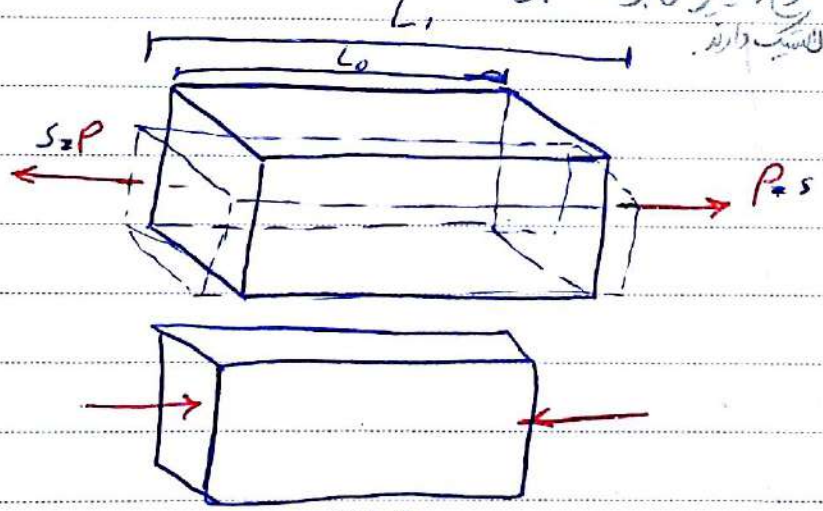
پلاستیک کاملا برگشت ناپذیر است.



پلاستیک نمادی از یک تنش خاص و ثابت شروع به تغییر شکل برگشت ناپذیر می دهد

همه مواد یک محدوده ای (اسمی خیلی کم) الاستیک دارند.

بار محوری:



$$\sigma = \frac{S=P}{A}$$

افزایش طول / طول اولیه = کاهش طول / طول اولیه = کرنش خطی

$$\varepsilon = \frac{L_1 - L_0}{L_0}$$

ε Epsilon — کرنش خطی مهندسی Engineering Strain

ضریب (زاویه خط)

ضریب الاستیسیته (E) برابر است با تنش بر روی کرنش. [σ] Ksi, Mpa

ضریب الاستیسیته هم برای تنش و هم برای فشار کاربرد دارد و در نظر گرفته می شود.

ضریب یانگ، ضریب الاستیسیته Young's modulus

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

واحد ضریب الاستیسیته (E) با تنش یکی است زیرا کرنش واحد ندارد.

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

$$\sigma = E\varepsilon$$

PAPCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

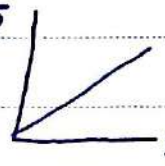
ضریب الاستیسیته

ضریب الاستیسیته برای مواد مختلف یک عدد ثابت است ←

برای مصالح خطی E مواد ثابت است.

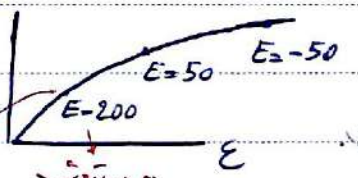
$E_{steel} = 206\ Gpa$

$E_{Aluminium} = 70\ Gpa$



در الاستیک غیر خطی قانون هوک برقرار نیست

برای مصالح غیر خطی E در مکان های مختلف متفاوت است.



E در واقع شیب خط در این نقطه است

ε در این نقطه برابر است از ای تنش σ، کرنش ε داریم که بستگی به آن دا

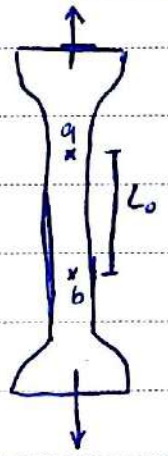
ضریب الاستیسیته برابر شیب خط همان در نمودار تنش کرنش است.

شرح آزمایش کشش ساده برای فولاد:

دو نقطه a و b را روی قطعه علامت گذاری می کنیم. با دقت خیلی کم نیرو را اضافه می کنیم.

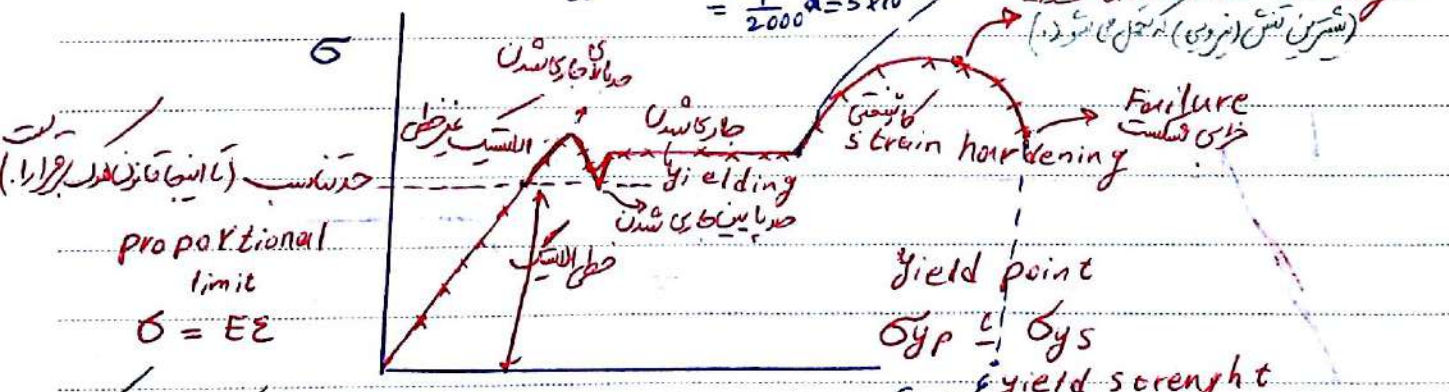
قانون هوک برای بخش الاستیک اتلوی مصالح صادق است که در این ناحیه رابطه ی تنش و کرنش خطی است.

0-10-20-...



P	0	10	20	30 ...
$\sigma = \frac{P}{A}$	0	10	20	...
$L_0 = 20^{mm}$				
L_i	20	20.01	20.02	...
$\varepsilon = \frac{L_i - L_0}{L_0}$	0	$\frac{20.01-20}{20} = \frac{1}{2000}$	$a = 5\times10^{-5}$	...

منحنی واقعی تنش-کرنش واقعی
True-stress strain.



جاری شدن، فولاد مانند پلاستیک رفتار کرده و در ای یک تنش خاص ثابت شروع به تغییر شکل می کند.

در بخش کارسختی فولاد دوباره مقاومت خود را پیدا می آورد



PAPCO

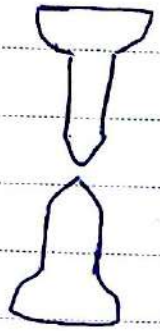
Subject:

Year. Month. Date.

(c)

دوم شکست

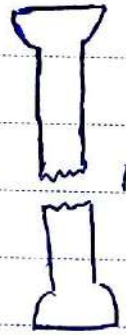
سرانجام قطعه در یک نقطه جدا می‌شود. به مصالحی که (تقریبا) در یک نقطه جدا می‌شوند مصالح نرم (Ductile) می‌گویند.



نرم Ductile

$\varepsilon_F \geq 0.05$ قرارداری

در مصالح ترد، قطعه بدون باریک شدن می‌شکند.



Brittle fracture



مصالح ترد دارای شیب منحنی رفتار زیاد و در نتیجه ε_F کم هستند.

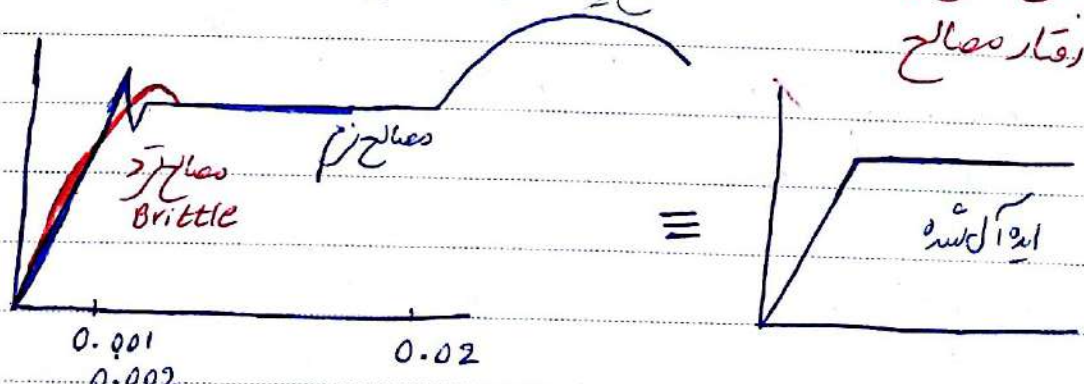
مصالحی نیز در بین ترد و نرم هستند

فنجان و مخروط Cup-and Cone

توضیح این دو نمودار در صفحه بعد

منحنی تنش - کرنش

منحنی رفتار مصالح



PAPCO

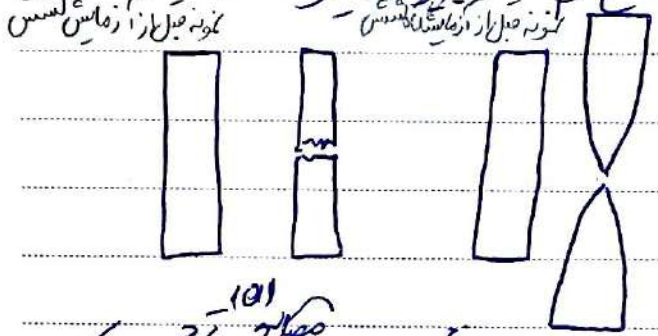
Subject:

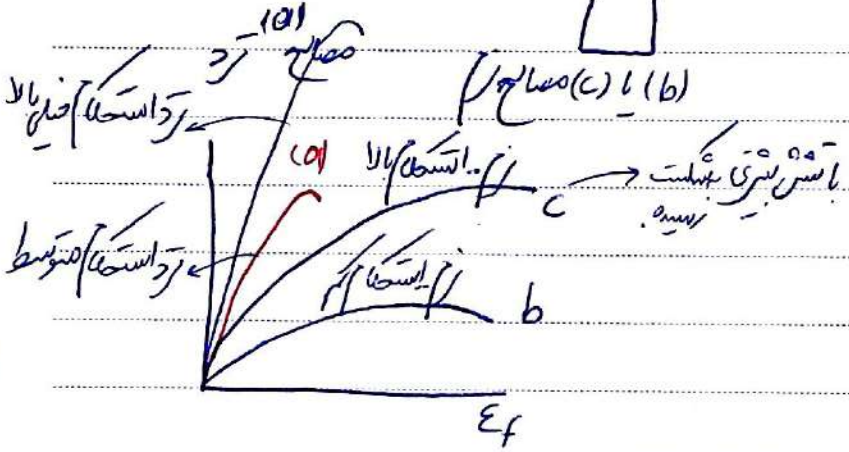
Year. Month. Date. ( )

δ یا $\Delta = L_i - L_0$ تغییر طول / ازدیاد طول

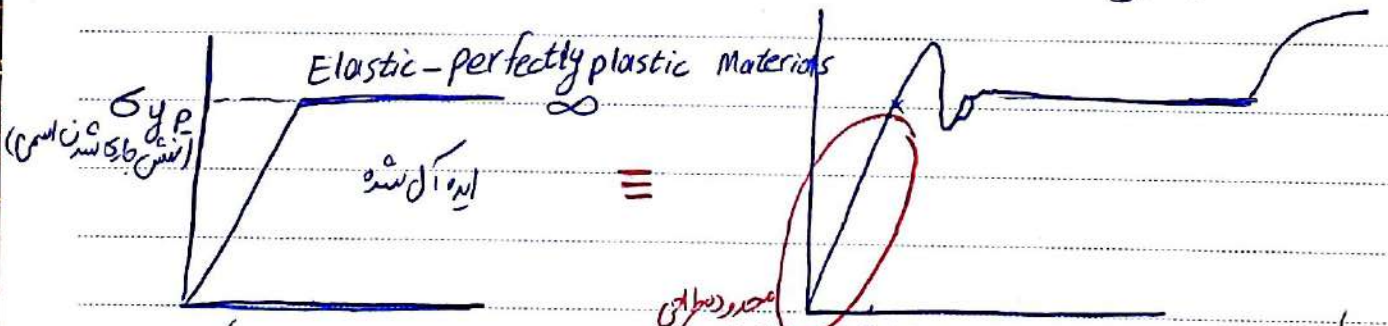
$\varepsilon = \frac{\Delta}{L_0}$

* مصالح ترد دارای کرنش کم یعنی تغییر طول کم، ولی مصالح نرم دارای تغییر طول بیشتر هستند.





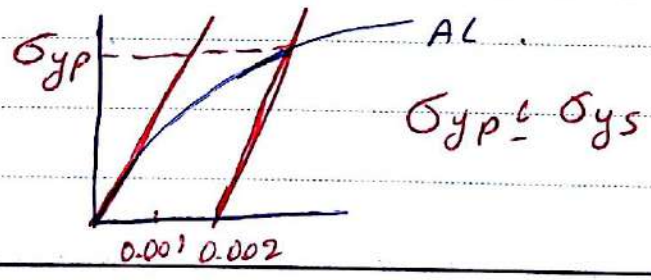
نمودار تنش کرنش برای فولاد



محدوده طراحی فولاد (محدوده ی الاستیک ابتدایی فولاد است که قانون هوک در آن برقرار است)

* موادی هستند که نقطه ی جاری شدن آن ها مشخص نیست

برای این مواد از نقطه ی کرنش صفر خط مماس بر نمودار می کشیم پیش از نقطه 0.001 یا 0.002 خطی به موازات خط مماس رسم می کنیم. محل تقاطع برابر نقطه ای آغاز جاری شدن است.



PqPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

نیروی داخلی را با ای و خارجی را با P نشان می‌دهند.

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad \text{یا} \quad \sigma = E \varepsilon \cdot E$$

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L_0}$$

به دست آوردن تغییر طول (δ) در اثر اعمال نیرو:

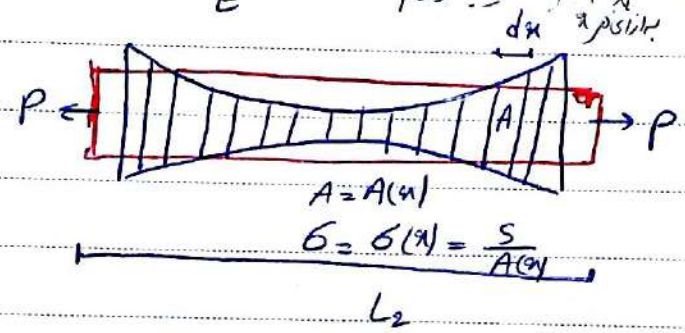
فرض کنید جسم زیر تحت دو نیروی خارجی کششی قرار دارد.

چون تنش در طول شکل زیر به علت تغییر سطح مقطع فرق می‌کند، کرنش هم در هر نقطه فرق می‌کند.

چون در شکل زیر سطح مقطع به ازای هر x متفاوت است پس تنش هم متفاوت بوده و در نتیجه کرنش هم متفاوت است.

$$\varepsilon(x) = \frac{\sigma(x)}{E}$$

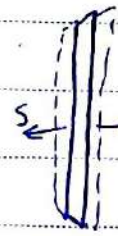
شکل را به المان‌های زیاد تبدیل می‌کنیم



هر یک از این قطعات حجم استوانه‌ای دارند.

المان را بررسی می‌کنیم:

تغییر طول قطعه بالا از جمع تغییر طول یک یک المان‌ها به دست می‌آید.



$$\frac{dx' - dx}{dx} = \varepsilon(x)$$

$$\Delta_{\text{تغییر طول}} = \int_{x=0}^{L} \underbrace{d\delta}_{d'\Delta} = \int_{x=0}^{L} \varepsilon(x) \cdot dx$$

$$\frac{\Delta}{\delta} = \int \varepsilon(x) dx$$

$$= \int \frac{\sigma(x) dx}{E}$$

$$\delta_{\text{تغییر طول}} = \int_0^L \frac{S = P}{EA} dx$$

به طور بسیط تغییر کند ← زمان که سطح مقطع متغیر باشد

حالت خاص: S ثابت، E ثابت، A ثابت $\Rightarrow \delta = \frac{PL}{EA}$ قانون

δ: تغییر طول کل، P: نیروی داخلی بخش برش خورده، L: طول کل، E: ضریب یانگ، A: مساحت سطح مقطع

وقتی جسم از چند بخش با خواص مکانیکی و مساحت تشکیل شده باشد.

$$\delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i L_i}{E_i A_i}$$

وقتی هر بخش به طور مجزا تغییر طول دهد.

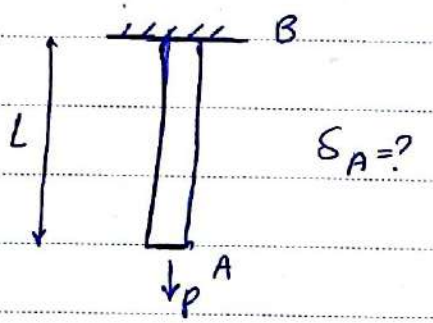
مهم: در فرمول تغییر طول، باید علامت تنش (کششی یا فشاری) منظور شود.

PqPCO

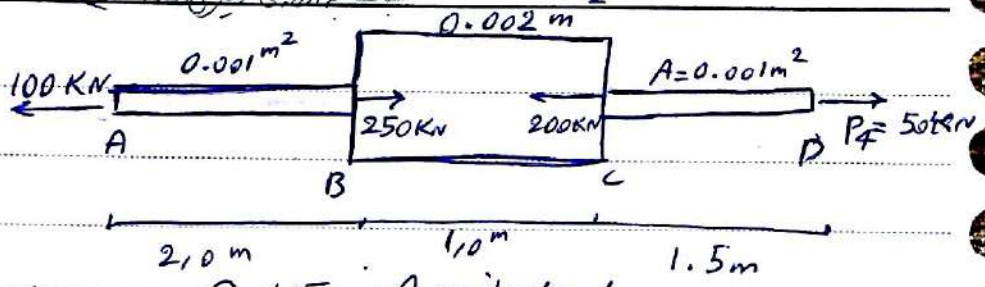
Subject:

Year. Month. Date. ( )

Example

① 

$\delta_A = ?$

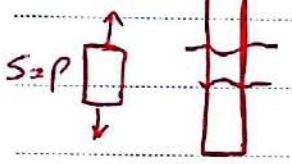
② 

جابه جایی نسبی A نسبت به D

$E = 200\ GPa$

① جابه جایی نقطه A ؟

Fixed support



$\delta_A = \int_0^L \frac{P dx}{EA} = \frac{PL}{EA}$

جابه جایی وطرف نقطه A

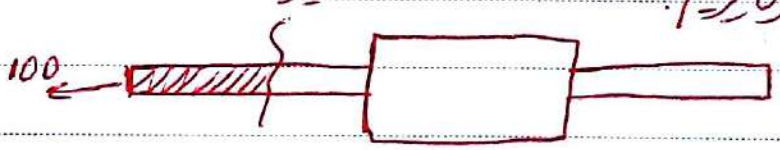
② $\sum F_x = 0$

$-100 + 250 - 200 + 50 = 0$ ✓ تعادل برقرار است.

جابه جایی نسبی $\delta_{D/A} = \delta_{B/A} + \delta_{C/B} + \delta_{D/C}$

D نسبت به A
یا A نسبت به D

اول $\delta_{B/A}$ یک برش را در نظر می گیریم.





$S = 100\ KN \quad L = 2.0\ m$

$A_{AB} = 0.001\ m^2$

باید نیروی داخلی را در رابطه‌ی کوک بگذاریم. پس وقت شود که نیروی 250 در آن رابطه وارد نشود.

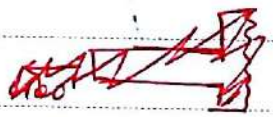
$$\delta_{B/A} = \frac{SL}{EA} = \frac{(100)(1000)^{\frac{N}{m^2}}(2.0)^m}{(200\times10^9)^{\frac{N}{m^2}}(0.001)^{m^2}} = 0.001^m = 1^{mm}$$

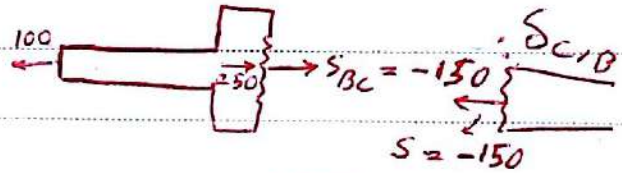
هر نقطه‌ای که فیکس شده نباشد جابه جایی نسبت به آن نقطه رخ می دهد و اگر هیچ نقطه‌ای ثابت نباشد جابه جایی نسبت به نقطه مرکز رخ می دهد

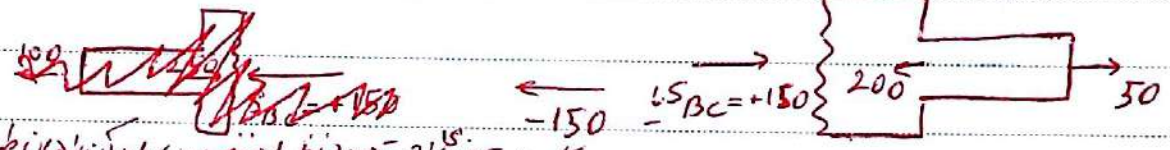
PAPCO

Subject:

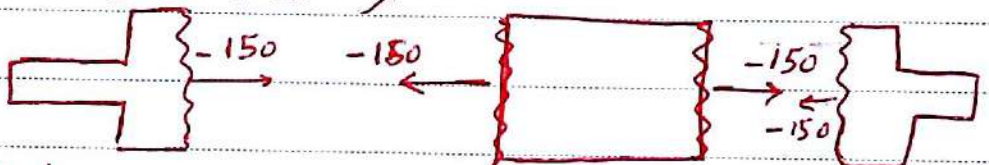
Year. Month. Date. ( )







اگر سازه نیروی ناشی از حرارت مورد نظر ما نبود، باید آن را همان طور فنری در نظر بگیریم.



چون در واقع در حال حاضر است
تنش و تنش وجود دارد.
پس معمولی است

$$\delta_{BC} = \frac{(-150\times10^{3})(1.0)}{(200\times10^{9})(0.002)} = -\frac{15}{4}\times10^{-4}$$

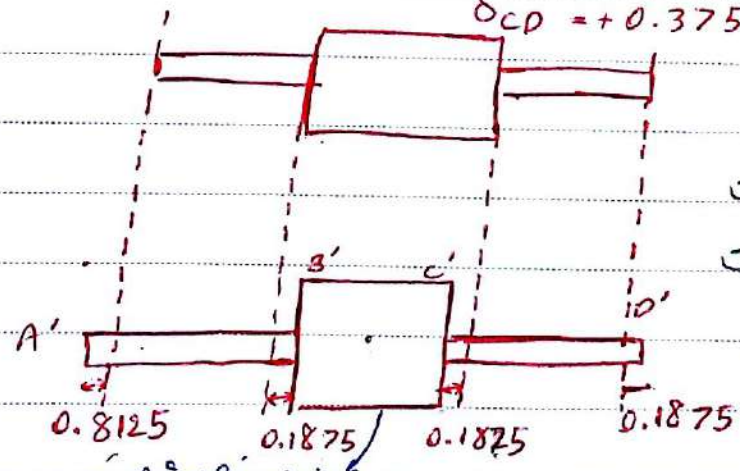
$$= -3.75\times10^{-4}\ m = -0.375\ mm$$





$$\delta_{CD} = \frac{(50\cdot10^{3})(1.5)}{(200\cdot10^{9})(0.001)} = 3.75\times10^{-4}$$

$$\delta_{CD} = +0.375\ mm$$



اگر فرض کنیم نقطه وسط ثابت باشد.
برای بخش CD، چپ برش از راست راست
و چپ از راست چپ برش، تشدید کشان است
چون جسم در حال تعادل است.

این بخش فشرده شده است.

نقطه A می باست 1mm است. بر نقطه B افزایش طول و جابه جایی نشان داده ولی از آن جایی که نقطه B به زمین متصل است، عملاً ثابت است، در نتیجه نقطه A برابر تفاضل 1mm و تغییر مکان B است.

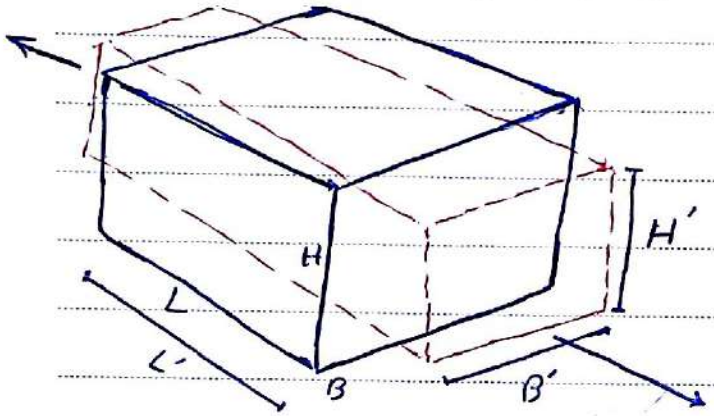
PdPCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

2.7 poisson's Ratio — نسبت پواسون

وقتی به جسمی نیروی محوری اعمال می‌کنیم، هم‌زمان با تغییر طول در راستای نیرو، سایر ابعاد آن نیز دست‌خوش تغییر می‌گردند.



$\varepsilon_x = \frac{L' - L}{L}$ (محوری) کرنش طولی

$\varepsilon_y = \frac{B' - B}{B}$ کرنش عرضی

$\varepsilon_z = \frac{H' - H}{H}$ کرنش عرضی

* وقتی قطعه‌ای در جهت x ها می‌کشیم طول آن افزایش می‌یابد ولی عرض آن کاهش می‌یابد.

چون با هم منفی است، منفی پشت عبارت را می‌گذاریم

$$\nu \text{ (nu)} = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = \left|\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x}\right| = \left|\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x}\right|$$

ضریب پواسون (ضریبی مثبت است)

$\varepsilon_y = \varepsilon_z$ ← هم‌نشان می‌دهند

* اگر ضریب پواسون 0.5 باشد فقط تغییر شکل آنی می‌دهد و تغییر حجم نداریم.

* ضریب پواسون برای کشش و فشار یکسان در نظر گرفته می‌شود.

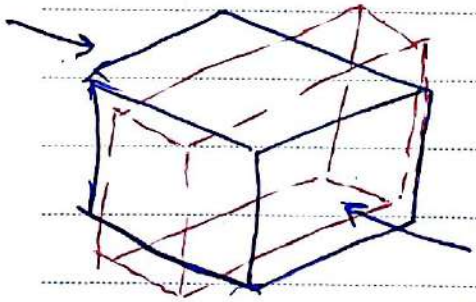
ضریب کشش در کشش و فشار متفاوت است ولی ما این تفاوت را در نظر نمی‌گیریم.

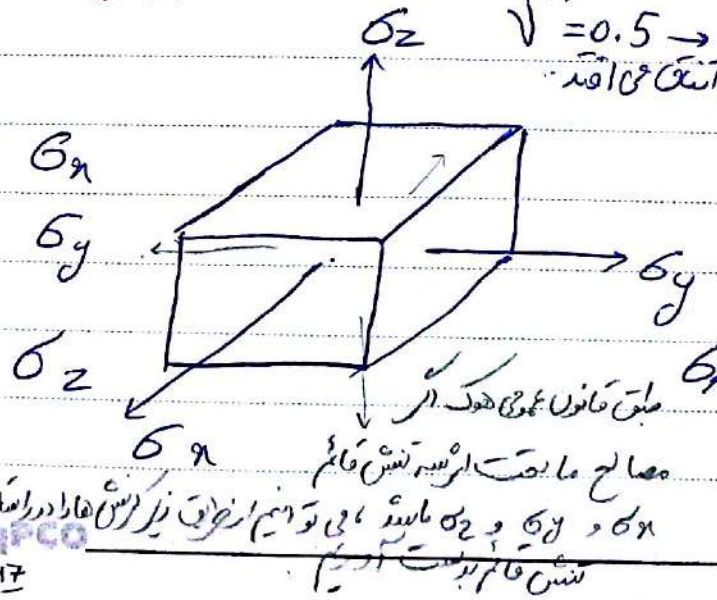
$\nu_{steel} = 0.25 \div 0.3$

$\nu \leq 0.5$ ← شکل هم‌سان

$\nu = 0.5 \rightarrow \Delta V = 0$ همواره

تغییر شکل آنی می‌دهد.



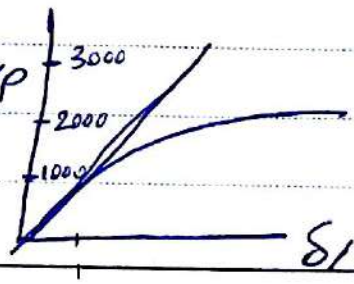


قانون عمومی هوک: (E, ν)

اصل اجتماع آثار

Super position اصل

طبق قانون عمومی هوک اگر مصالح ما تحت اثر سه تنش قائم σx و σy و σz باشد، می‌توانیم از طرق زیر کرنش‌ها را در راستای سه تنش قائم بدست آوریم



PaPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( ).

در صورتی که تنش قائم نداشته باشیم، نسبت پواسون برابر $\nu = -\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_y}$ است

اگر σ_x را از دیم $\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$ ، $\varepsilon_y = -\nu\varepsilon_x = \frac{-\nu\sigma_x}{E}$ ، $\varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x = \frac{-\nu\sigma_x}{E}$

σ_y : $= \frac{-\nu\sigma_y}{E}$ ، $= \frac{\sigma_y}{E}$ ، $= \frac{-\nu\sigma_y}{E}$

σ_z : $= \frac{-\nu\sigma_z}{E}$ ، $= \frac{-\nu\sigma_z}{E}$ ، $= \frac{\sigma_z}{E}$

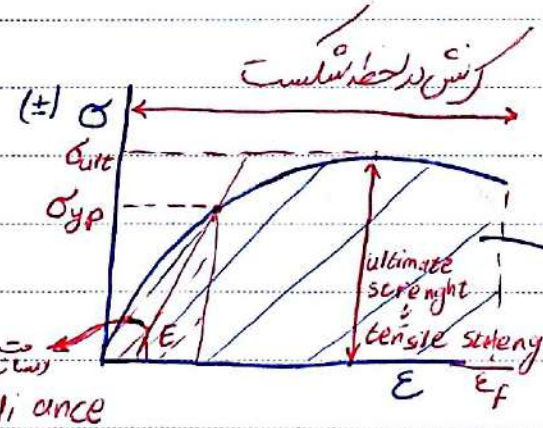
کرنش حاصل در اثر اعمال سه تنش σ_x و σ_y و σ_z :

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu\sigma_z}{E}$$

دقت شود که منفی یا مثبت کشش فشاری منظور شود.

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y - \nu\sigma_x - \nu\sigma_z}{E}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z - \nu\sigma_x - \nu\sigma_y}{E}$$



از روی منحنی تنش کرنش می توان ضریب الاستیسیته را بدست آورد.

انرژی جذب شده تا شکست / حجم ملی

تنش - کرنش

سطح زیر نمودار را بیابید کار یا همان انرژی است.

E : ضریب الاستیسیته

σ_{yp} یا σ_{ys} = off set yield point

σ_{ult} : استحکام نهایی یا استحکام کششی

حجم ملی با تردی ارتباط دارد.

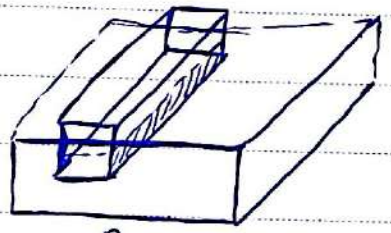
اگر حجم ملی کم باشد جسم ترد است. (اجسام ترد توانایی جذب انرژی زیادی را ندارند.)

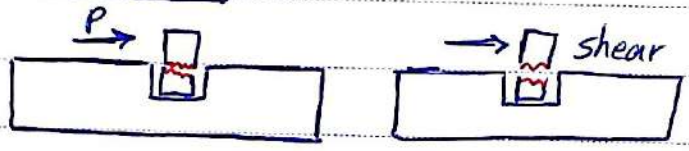
ضریب سهولت زیر نمودار تنش جاری شدن نسبی است

۸-۲ تنش برشی

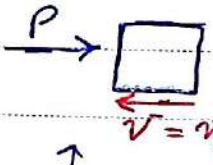
ماژول هایی که ایجاد تنش برشی می کنند.

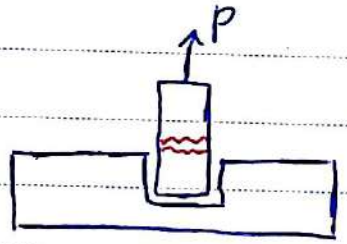
نشان می دهد که با بارگذاری، تنش های مختلفی در جسم ایجاد می شوند.





نیروی داخلی در این شکل امتداد نیرو، نیروی (تنش) کششی است.







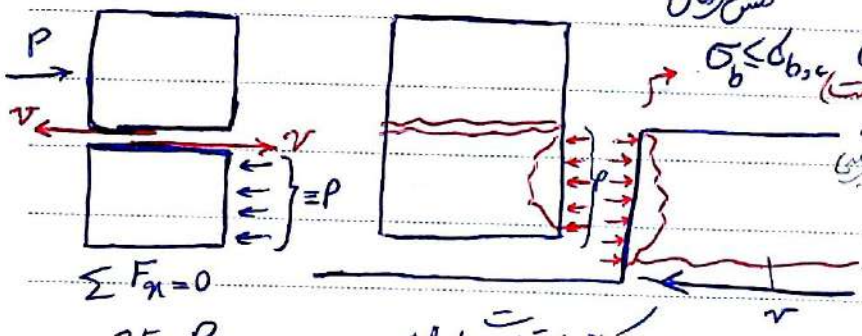
نیروی داخلی در اینجا کششی و محوری است.

* تنش لهیدگی یا از جنس تنش نرمال است

تنش نرمال

$\sigma_b \leq \sigma_{b,c}$ تنش لهیدگی / bearing stress

تنش لهیدگی از جنس تنش نرمال است

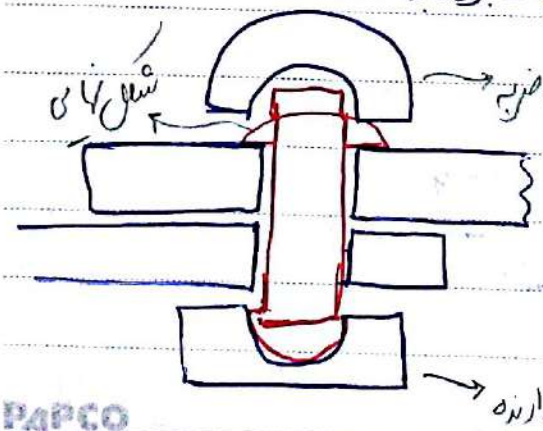


* لهیدگی در اثر تنش نرمال و برش در اثر تنش برشی رخ می دهد

* ایمن ترین قطعه از جهت لهیدگی نمی تواند حتی باعث شکستن نگهدارنده شود

برای هرکدام از قطعات جداشده نقطه نیروهای برشی وجود دارد.

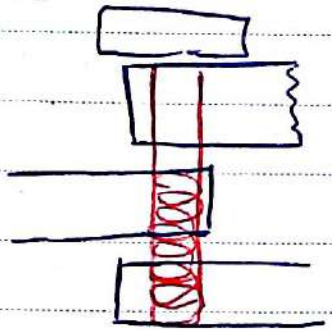
پرچ:

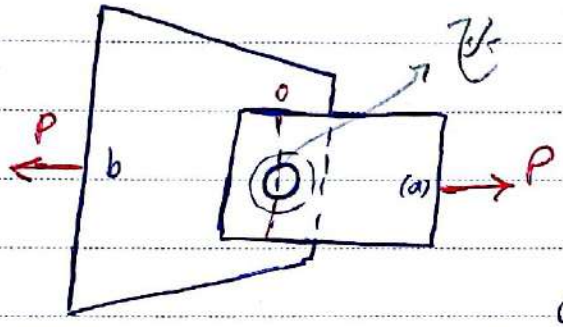


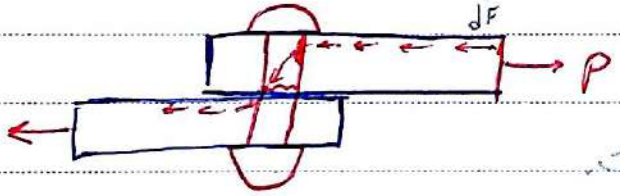
Subject:

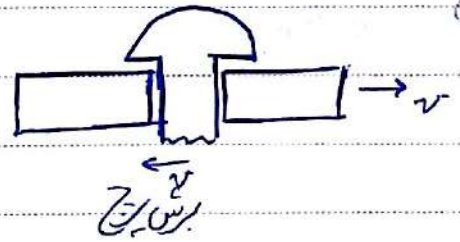
Year. Month. Date. ( )

پیچ :



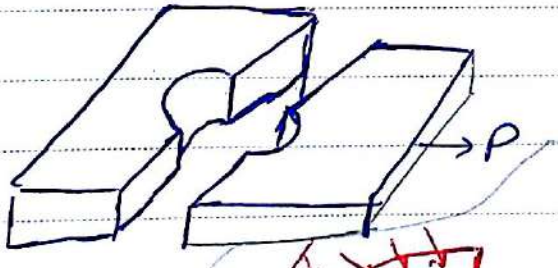


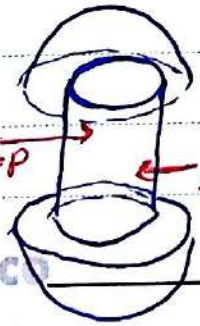


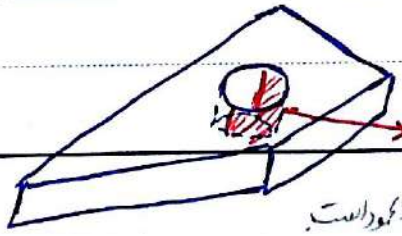


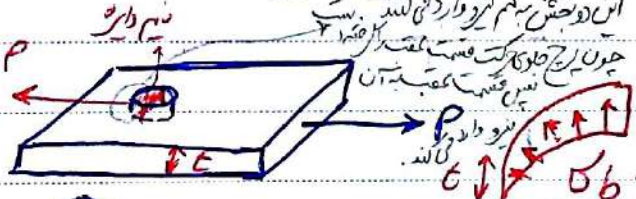
$$\tau = \frac{V}{\frac{\pi}{4} d^2}$$











$$\sigma_b = \frac{P}{d \times t}$$

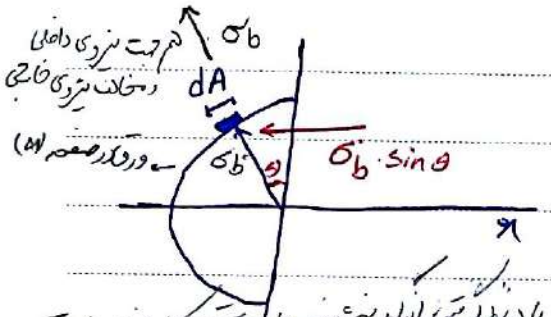
PAPCO

Subject :

Year . Month . Date . ( )

$$\sigma_b \times R \times t\,[-\cos\theta]_0^{\pi} = P$$

$$\sigma_b = \frac{P}{2Rt} = \frac{P}{dt}$$



$$dA = R \cdot d\theta \times t$$

$$dF_R = \sigma_b \times R \times t \times \sin\theta \times d\theta$$

$$\int_{\theta=0}^{\pi} \sigma_b \times R \times t \times \sin\theta\, d\theta = P$$

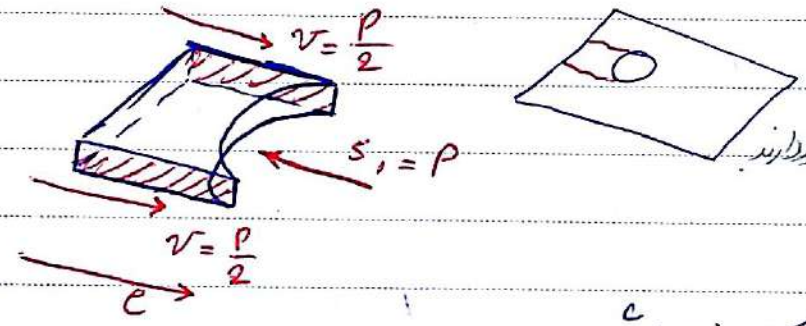
ادامه

$P = \int dF_R$

نیروی کلی که در جهت محور R بر پرچ اثر می‌کند برابر P است

با در نظر گرفتن اینکه برخی نیروها به صورت دیگر است برای مقابله با dF_R داریم. مقاومی داریم که σ_b آن را برابر طرح نمود است پس در $\sin\theta$ ضرب می‌شود.

فاصله‌ی پرچ‌ها نباید کم باشد چون در غیر این صورت به شکل زیر پرچ می‌کند.

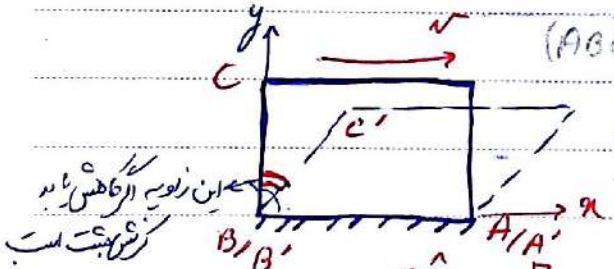


در برش، نیروهای برشی حضور دارند.

فرض می‌کنیم که توزیع نیرو به شکل یکنواخت باشد.

کرنش برشی، تغییر زاویه 90° است. اگر زاویه کم شود کرنش برشی مثبت است.

$\tau = \frac{V}{A}$ تنش برشی



(ABC)

در غیر این صورت منفی است

علامت کرنش برشی؟ اگر زاویه حین از زاویه اولیه کم شود

این زاویه اگر کاهش یابد کرنش مثبت است

کرنش برشی مثبت است.

$A\hat{B}C = \frac{\pi}{2}$

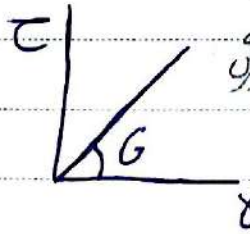
$A\hat{B}C \neq A'\hat{B}'C'$

$\gamma = \frac{\pi}{2} - A\hat{B}C'$ $\quad \gamma = \frac{\pi}{2} - (\text{زاویه جدید})$

Gama : Shear strain

کرنش برشی

بین کرنش و تنش برشی رابطه‌ای وجود دارد. فرض می‌کنیم که این رابطه خطی باشد.



ضریب الاستیسیته در برش

$G = \frac{\text{تنش برشی}}{\text{کرنش برشی}}$ (GPa)

Shear Modulus ضریب الاستیسیته در برش

مشخصات مصالح

E . V . G است که با دانستن دو تا از آن‌ها می‌توان سومی را به دست آورد.

$G = \frac{E}{2(1+V)}$: برای مصالح داریم

Subject:
Year. Month. Date. ( )

حال قانون عمومی هوک را دوباره می نویسیم.

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu\sigma_z}{E}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y - \nu\sigma_x - \nu\sigma_z}{E}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z - \nu\sigma_y - \nu\sigma_x}{E}$$

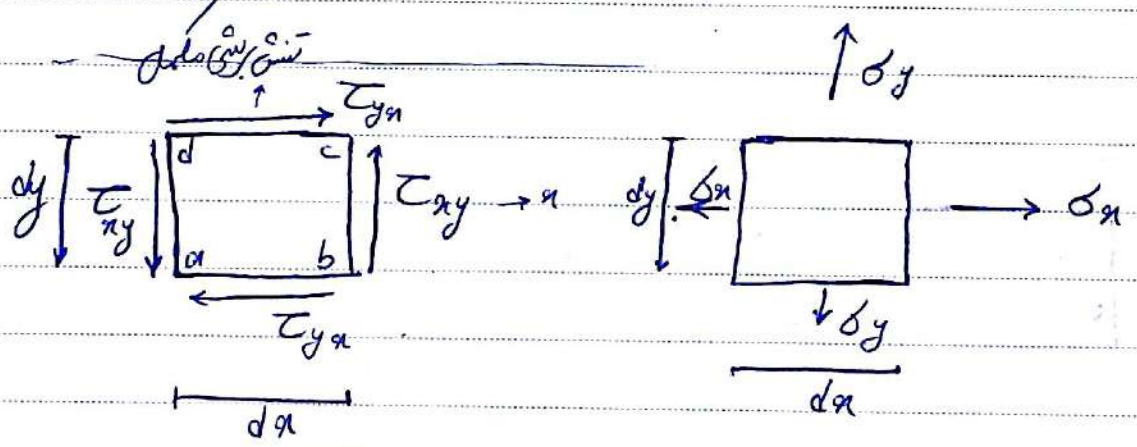
کرنش های برشی نیز مانند کرنش های محوری 3 تا هستند.

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{yz}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{zx}$$

تنش برشی مثبت



معادلات تعادل

$$\sigma_x \cdot dy \cdot 1 - \sigma_x \cdot dy \cdot 1 = 0$$

$$+\circlearrowleft \sum M_a = 0$$

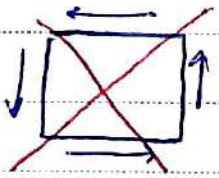
$$+\tau_{xy} \cdot dy \cdot 1 \cdot dx - \tau_{yx} \cdot dx \cdot 1 \cdot dy = 0$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

تعادل تنش برشی ها:

در اکثر مواقع تنش ها به صورت جفت عمل می کنند.

در اکثر مواقع تنش های برشی برای حفظ تعادل باید به نحوی باشند که به گوشه ها نزدیک شوند یا از آن ها دور شوند.



این در حالت غیر تعادلی

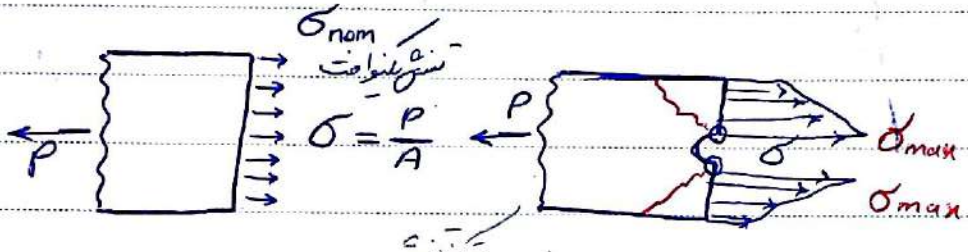
P4PCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

کارگاه

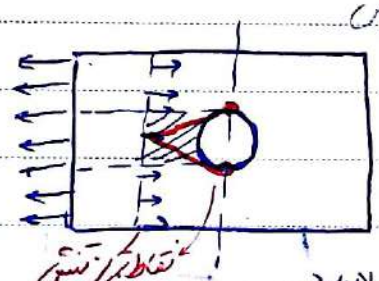
Stress Concentration
تمرکز تنش



ضریب تمرکز تنش

$$K_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{nom}}$$

$$K_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{avg}}$$



نقاط تمرکز تنش

هر چه تغییر سریع‌تر باشد، تمرکز تنش در نقطه بروز شدیدتر خواهد بود.

نیروها تمایل دارند از این نقاط بگذرند.

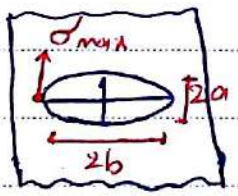


$$K_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{nom}} = 3.0 \quad \text{circle}$$

ضریب تمرکز تنش برای دایره 3 می‌باشد یعنی نقاط تمرکز تنش حداکثر

تنش سه برابر تنش یکنواخت خواهد بود

برای بیضی:



$$K_t = 1 + 2\frac{b}{a}$$

$a \to 0$ $\quad K_t \to \infty$

برای جلوگیری از گسترش ترک

ترک
crack

ایجاد این دایره‌ها باعث کاهش K_t از ∞ به 3 می‌شود.

تنش‌های ماکزیمم، در ارتباط با تنش میانگین برای مواد شکننده فقط به خواص هندسی عضو بستگی دارند. نسبت تنش ماکزیمم به تنش میانگین را ضریب تمرکز تنش می‌نامند.

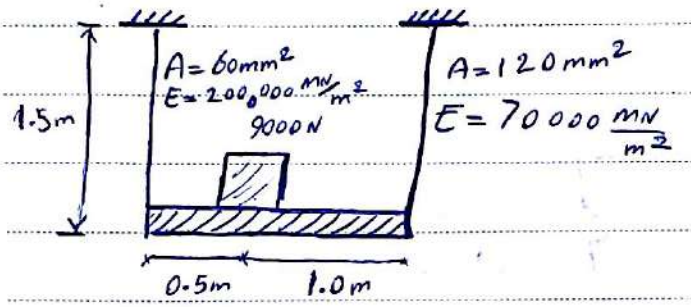
در طراحی سعی می‌کنند اشکال هندسی و نقاط گذار اجزای تشکیل دهنده‌ی سازه را طوری طراحی کنند که تغییرات ناگهانی نداشته باشند و در نوع تغییری در آن تدریجی باشد.

Subject:

Year. Month. Date. ( )

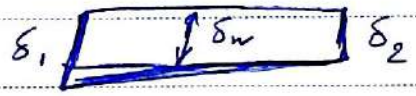
Example

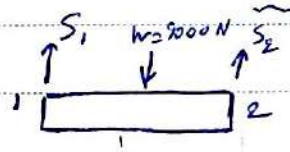
در روی یک جسم صلب بدون وزن که توسط دو میله نگه داشته شده است یک جعبه قرار داده شده است. مطلوب است جابه جایی قائم وزنه یکی (δ_w)



S_1 S_2 روش حل

$S_1 \downarrow \sigma \downarrow \varepsilon \downarrow \delta_1 = \frac{S_1 L}{E_1 A_1}$ $\delta_2 = \frac{S_2 L}{E_2 A_2}$





$+\circlearrowleft \sum M_1 = 0$

$9000 \times 0.5 - S_2 \times 1.5 = 0 \Rightarrow S_2 = 3000\,N$

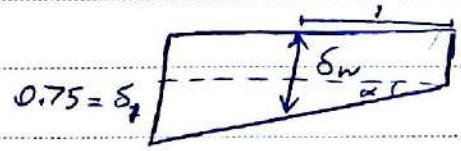
$+\uparrow \sum F_y = 0$

$S_1 - 9000 + 3000 = 0 \rightarrow S_1 = 6000\,N$

$$\delta_1 = \frac{(6000)^N (1.5)^m}{(2\times10^5\times10^6)\frac{N}{m^2}(60\times10^{-6})m^2} = 75\times10^{-5}\,m \Rightarrow \delta_1 = 0.75\,mm$$

$$\delta_2 = \frac{(3000)(1.50)}{(70\times10^3\times10^6)(120\times10^{-6})}$$

$$\delta_2 = \frac{1.50}{2800}\times1000 = \frac{1.5}{2.8}\,mm = 0.53$$



بدست آوردن δ_w از قضیه تالس

شیب خط

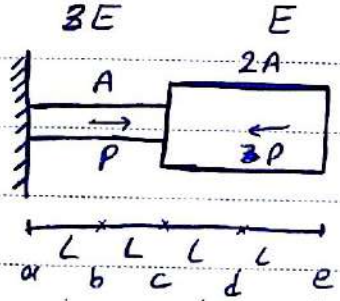
$$\delta_w = 0.53 + \frac{0.75 - 0.53}{1.5}\times1.0$$

$$= 0.53 + \frac{0.22}{1.5}$$

PAPCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )



$\delta_e = ?$

P و 3P نیروهای خارجی هستند.

از دادن سؤال) با به تغییر طول رابه ازای جمع تغییر طول برش‌های از قطعه‌ای که بین محل‌های اعمال نیرو قرار دارند پیدا کرد. اگر بخشی از جسم که بین دو اعمال نیرو قرار دارد، دارای سطح مقطع‌های مختلف باشد، باید آن را به قطعه‌های کوچک‌تری تقسیم کرد که در هر یک سطح مقطع ثابت باشد.

d to e

$S_4 = 0$

$n = 4L$ تغییر طول را محاسبه کنید

S_3 3P

$S_3 = -3P$

نیروی عکس‌العمل تکیه‌گاه:

P 3P

R_n

$\Sigma F_n = 0 \rightarrow R_n = +2P$

b to d

نیرو عوض نمی‌شود و فقط سطح مقطع عوض می‌شود.

S_1 P 3P

$S_1 = -2P$

a to b

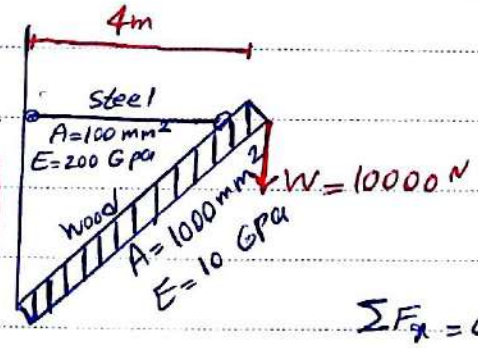
$$\sigma_1 = \frac{-2P}{A} \Rightarrow \varepsilon_1 = \frac{-2P}{3EA}$$

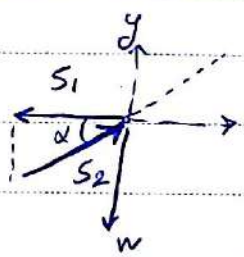
$$\sigma_2 = \frac{-3P}{A} \Rightarrow \varepsilon_2 = \frac{-3P}{3EA} = \frac{-P}{EA}$$

$$\sigma_3 = \frac{-3P}{2A} \Rightarrow \varepsilon_3 = \frac{-3P}{2AE}$$

$$\sigma_4 = 0 \Rightarrow \varepsilon_4 = 0$$

$$\delta_E = \sum \frac{P_i L_i}{E_i A_i} = \frac{(-2P)(L)}{(3E)(A)} + \frac{(-3P)(L)}{3EA} + \frac{(-3P)(L)}{2EA} + 0$$





جا به جایی در جهت فولاد را به دست آورید.

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow S_1 = S_2 \cos\alpha \Rightarrow S_1 = \frac{10000}{6} \times 8 = \frac{4000}{3}$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow W = S_2 \sin\alpha \Rightarrow \frac{100000}{6} = S_2$$

RaPCO

فولاد در حال کشش و چوب تحت فشار است.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

محاسبه‌ی تنش‌ها:

$$\Rightarrow \sigma_1 = \frac{4000}{3\times10^{-4}} = +133\ \text{Mpa}$$

$$\Rightarrow \sigma_2 = \frac{-105}{6\times1000\times10^{-6}} = -16.6\ \text{Mpa}$$

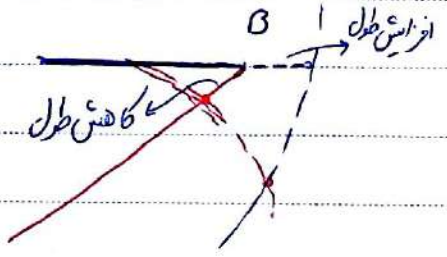
محاسبه‌ی جابه‌جایی‌ها:

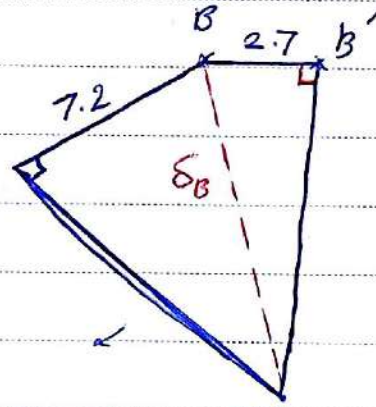
$$\delta_i = \frac{S_i L_i}{E_i A_i}$$

$$\Rightarrow \delta_1 = \frac{4\times10^{4}}{3\times200\times10^{3}\times10^{-4}} = \frac{8}{3}\times10^{-3} = 2.7\ \text{mm}$$

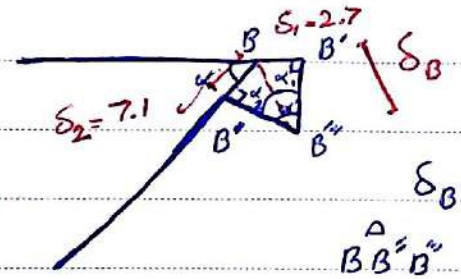
$$\Rightarrow \delta_2 = \frac{10^{5}\times5}{6\times10^{10}\times10^{-3}} = \frac{5}{6}\times10^{-2} = -8.1\ \text{mm}$$

برای یافتن محل تقاطع میله و چوب باید در جهت میله به اندازه‌ی مورد نظر پیش رفته، از انتهای طول، نمودار رسم کرده برای چوب هم همین کار را کرده و محل تقاطع نمودارها نقطه‌ی جدید است.





δ_B: جابه‌جایی نقطه اتصال میله و چوب



$$\delta_B \begin{cases} \dfrac{\delta_2 = 7.1}{\sin\alpha_2} = \dfrac{\delta_1 = 2.7}{\sin\alpha_1} \\ \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha = 37^\circ \end{cases}$$

$\triangle BB'B''$

تشخیص از نمودار

$$\alpha = \sin^{-1} 0.6$$

$$\alpha_2 = 37 - \alpha_1$$

از این طریق زاویه‌ی α_1 به دست می‌آید که از طریق آن می‌توان δ_B را به دست آورد.

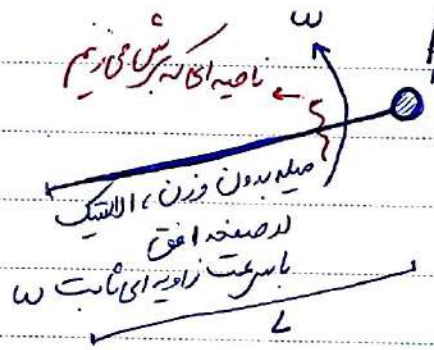
$$\frac{7.1}{\sin(37-\alpha_1)} = \frac{2.7}{\sin\alpha_1}$$

Subject:

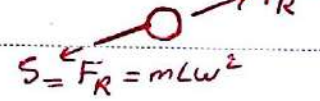
Year. Month. Date. ( )

افزایش طول میله‌ی در حال دوران

اگر میله‌ای بدون وزن و الاستیک داشته باشیم، که در صفحه افق با سرعت زاویه‌ای ثابت ω دوران کند، و نشتی به جرم m به انتهای آن وصل شده باشد، باعث کشش میله با نیروی $mL\omega^2$ می‌شود.

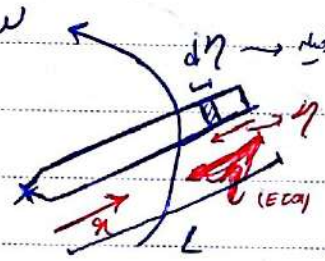


دینامیک: جرم m در حال دوران با سرعت زاویه‌ای ثابت ω و فاصله‌ی L از مرکز دوران، نیروی برابر $mL\omega^2$ به طرف داخل وارد می‌شود ($F_R = ma_n$)



$$\sigma = \frac{mL\omega^2}{A}, \quad \delta = \frac{(mL\omega^2)(L)}{EA} = \frac{mL^2\omega^2}{EA}$$

تنش ایجاد شده در میله

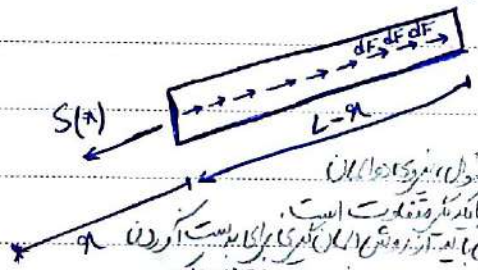


حال اگر میله دارای جرم مخصوص ρ باشد:

برای بدست آوردن δ، L، E و A را داریم و تنها مجهول S است

$$dF = (\rho A\, d\eta)(L-\eta)\omega^2$$

(جرم = فاصله‌ی مرکز دوران)



نیروی داخلی در حول x

$$S(x) = \int_{\eta=0}^{L-x} dF = \int_{\eta=0}^{L-x} \rho A\, d\eta\,(L-\eta)\omega^2$$

$$= (\rho A\omega^2)\left[L\cdot\eta - \frac{\eta^2}{2}\right]_0^{L-x}$$

$$S(x) = (\rho A\omega^2)\left(L(L-x) - \frac{(L-x)^2}{2}\right)$$

$$= (\rho A\omega^2)\left[L^2 - Lx - \frac{1}{2}L^2 + \frac{1}{2}x^2 + Lx\right]$$

$$S(x) = \frac{1}{2}\rho A\omega^2(L^2 - x^2)$$

تابع نیروی داخلی

دلیل بدست آوردن نیروی داخلی این است که تا بدانیم تنش در هر نقطه چقدر است، پس باید ابتدا نیروی داخلی را بدست آوریم.

در صورتی که نیروی داخلی ثابت باشد، نیازی به انتگرال‌گیری نیست و خودمان می‌توانیم روابط را فرمول‌بندی کنیم.

افزایش طول کل میله

$$\delta = \int_0^L \frac{S(x)\,dx}{EA} = \int_0^L \frac{(\frac{1}{2}\rho A\omega^2)(L^2-x^2)\,dx}{EA}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\rho\omega^2}{E}\left[L^2x - \frac{x^3}{3}\right]_0^L = \frac{\rho\omega^2 L^3}{3E}$$

افزایش طول میله

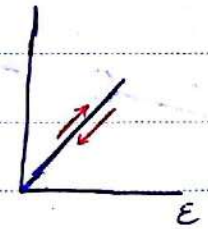
افزایش طول کل میله به چگالی ρ و طول L: $\delta = \frac{\rho\omega^2 L^3}{3E}$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

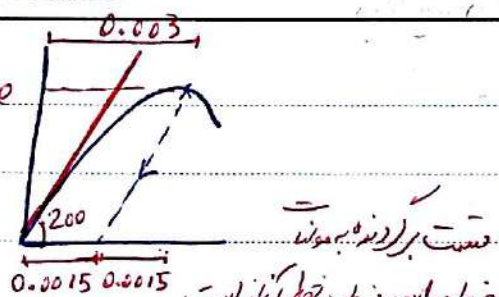
بارگذاری:

وقتی تنش کم باشد و در منطقه‌ی الاستیک باشیم، با بارگذاری که به شکل اولیه برمی‌گردیم.



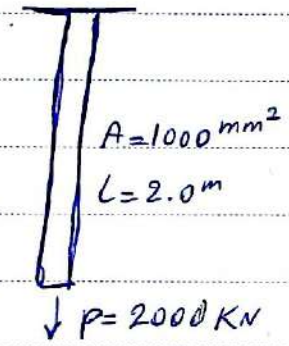
برای اینکه بدانیم این که چه مقدار از ماده پس از بارگذاری برگشته، از نقطه مورد نظر خطی موازی خط عمود بر نمودار در نقطه‌ی آغاز رسم می‌کنیم.

تغییر شکل‌هایی که بعضی از آن برگشت‌پذیر است.

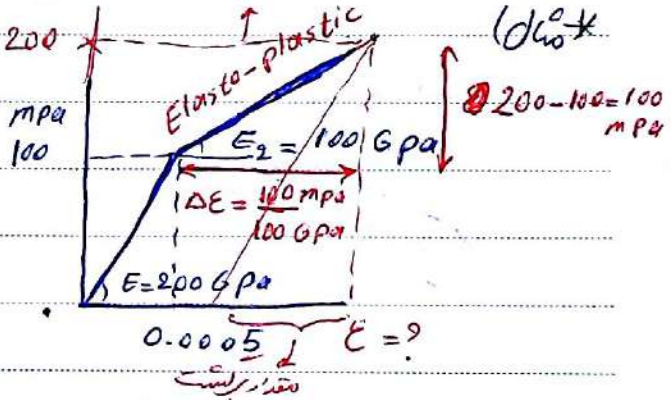


تغییر شکل ماندگار ε_{Res} — Residual / Plastic ε_{pl}

تغییر شکل برگشت‌پذیر — Elastic σ_{el} یا ε_{el}



$\sigma_{Res} = ?$



برای بدست آوردن تنش، آگاهی از نیروی داخلی و مساحت سطح مقطع است.

اما برای بدست آوردن σ و ε باید بدانیم که آیا به ازای این تنش، ضریب الاستیسیته ثابت است یا نه. که در صورت ثابت نبودن نمی‌توان از روابط خطی برای حساب کمیات به روابط استفاده کرد.

نیروی داخلی $S = P = 2000\ KN$

$$\sigma = \frac{S}{A} = \frac{200\ KN}{1000\ mm^2} = 200\ mpa$$

وقتی که جسمی از طریق چند ضریب الاستیسیته مختلف به کرنش رسیده است، برای رسیدن به آن کرنش، با یک کرنش اولیه با تغییر کرنش در هر قسمت طوری ε ثابت را بدست آوریم.

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_y = \frac{100\ mpa}{200\ Gpa} = \frac{1}{2000} = 0.0005$$

$$\Delta\varepsilon = \frac{200-100}{100\ Gpa} = \frac{1}{1000} = 0.001$$

$$\varepsilon = 0.0015$$

$$\Delta\varepsilon = \frac{\Delta\sigma}{E}$$ در هر قسمت

حتی اگر جسم از طریق چند E مختلف به کرنش ε برسد باز هم ضرب ε در L، تغییر طول تا آن جا را می‌دهد.

$$\delta = \int \varepsilon \cdot dx = \varepsilon \cdot L$$

$$\varepsilon = \frac{L_2 - L_1}{L_1} \quad L_2 = (1+\varepsilon)L_1$$

$$\delta = \varepsilon L_1$$

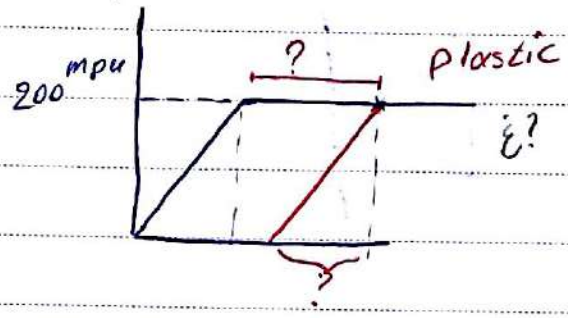
$$\delta = \varepsilon \cdot L = 0.0015 \times 2000\ mm = 3\ mm$$ تغییر طول کل

$$\varepsilon_{el} = \frac{200\ mpa}{200\ Gpa} = 0.001$$

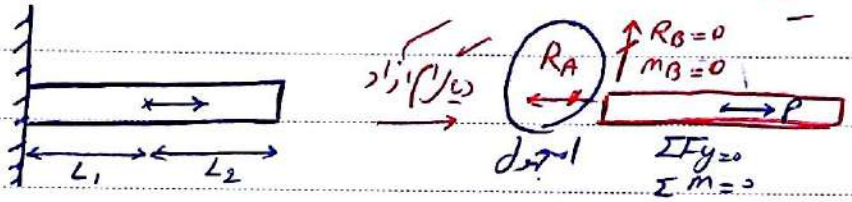
خطوازی با خط 200 را در نظر گرفته‌ایم.

$$\delta_{el} = 0.001 \times 2000 = 2\ mm$$ تغییر طول برگشت‌پذیر

PAPCO



سازه‌های نامعین استاتیکی:

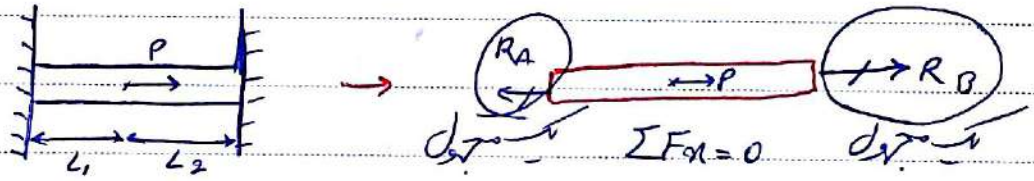


نیروهای تکیه‌گاهی نیروی خارجی هستند

$\Sigma F_x=0$

معادله

(معادله معین) یک معادله و یک مجهول



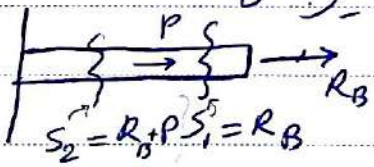
معادله ـ 2 مجهول = درجه نامعینی

سازه یک درجه نامعین است.

پس معادلات تعادل کافی نبوده و باید از معادلات سازگاری تغییر شکل (که استفاده شود.)

تغییر شکل

آن تکیه‌گاه راست را برداشته باشیم باید تغییر شکل صفر باشد (چون تکیه‌گاه دیگر اجازه حرکت نمی‌دهد.)



$$\delta_B=\frac{R_B L_2}{EA}+\frac{(R_B+P)L_1}{EA}=0$$

$$R_B(L_1+L_2)+PL_1=0$$

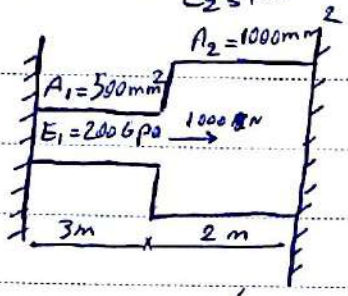
$$R_B=-P\frac{L_1}{L}$$

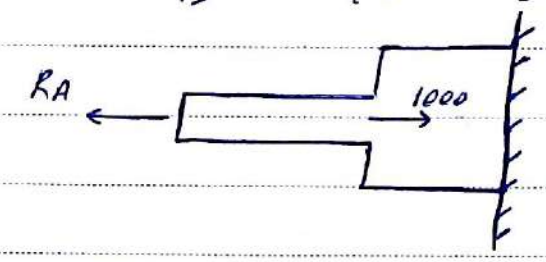
چرا اثر تنش کویل و نیروهای واکنش تکیه‌گاهی در راستای تنش را در نظر نمی‌گیریم؟

چون صفر هستند.

Subject:

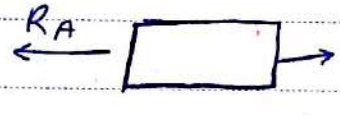
Year. Month. Date.



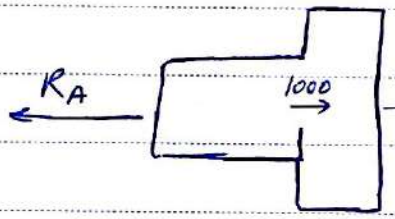


معادله سازگاری تغییر شکل‌ها $\delta_A = 0$

$$\delta_A = \sum \frac{S_i L_i}{E_i A_i}$$



$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ S_1 = R_A \end{cases}$$



$$\sum F_x = 0 \rightarrow S_2 = R_A - 1000$$

$$\delta_A = \sum \frac{S_i L_i}{E_i A_i} = \frac{R_A \times 3^m}{10^{11}} + \frac{(R_A - 1000) \times 2}{10^8} = 0$$

$$3R_A + 2R_A - 2000 = 0$$

$$R_A = 400\ N$$

$$\Rightarrow S_2 = R_A - 1000 = -600$$

نیروی خارجی P ایجاد می‌کند δ — ε

(نیروی داخلی) N — σ — E

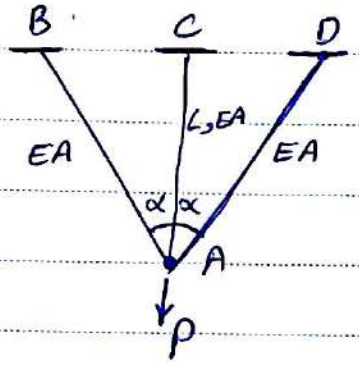
برای حالت سازه‌های نامعین P — E — ε

PqPCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

مثال از سازه های نامعین

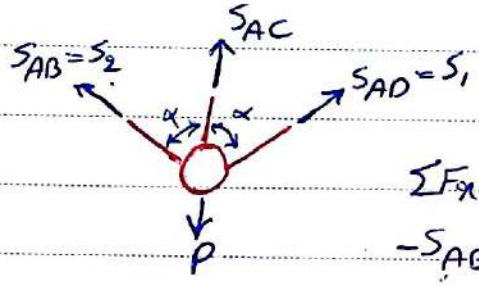


نیروهای داخلی = S

EA = سختی کششی
سفتی کششی
Stiffness

هرچند که EA بیشتر باشد مصالح سفت‌تر
و در نتیجه با همان نیروی ثابت تغییر طول کمتر خواهد داشت

در خرپاها نیروها به شکل محوری هستند چون نیروها به
دو مفصل انتهایی آن ها وارد شده و تمام اتصالات از نوع
مفصلی هستند



$\Sigma F_x = 0$

$-S_{AB}\cdot\sin\alpha + S_{AD}\cdot\sin\alpha = 0$

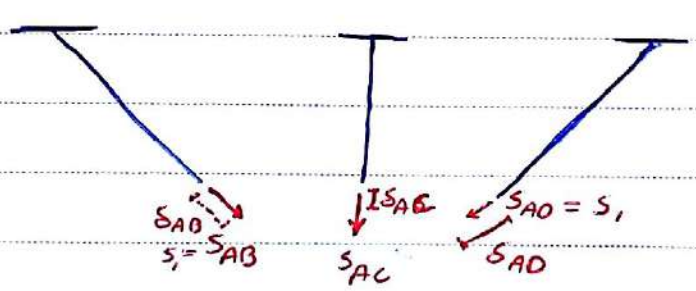
$S_{AB} = S_{AD} = S_1$

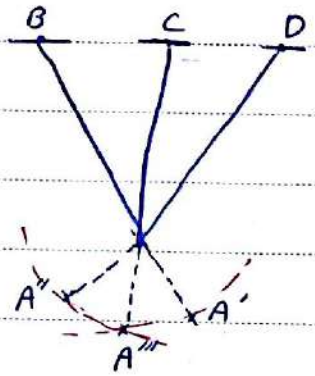
$\Sigma F_y = 0$

$S_{AC} + 2S_1\cos\alpha = P$ معادله تعادل

وقت شود برای بدست آوردن تنش در هر عضو باید نیروی داخلی آشنا باشد.

دو مجهول S_1 و S_{AC} و یک معادله داریم.
پس سازه نامعین است.





میله ها ابتدا در امتداد خود افزایش طول یافته
و سپس روی کمان های خودشان حرکت کرده و محل
تلاقی جدید مشخص می گردد.

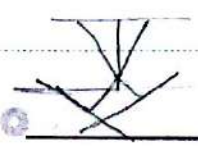
$\delta_{AB} = \overline{AA'} = \frac{S_1 \frac{L}{\cos\alpha}}{EA}$

$\delta_{AD} = \overline{AA''} = \frac{S_1 \frac{L}{\cos\alpha}}{EA}$

$\delta_{AC} = \overline{AA'''} = \frac{S_{AC} L}{EA}$

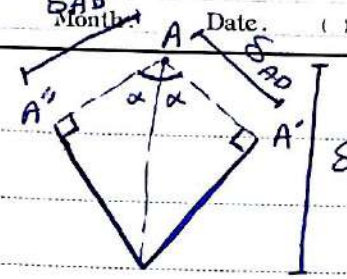
معادله تعادل : $S_{AC} + 2S_1\cos\alpha = P$

در این حالت



PqPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )



$$\delta_{AC} = \frac{\delta_{AD}}{\cos\alpha} = \frac{\delta_{AB}}{\cos\alpha}$$ معادله سازگاری:

با توجه به روابط صفحه قبل: و قانون هوک

$$\frac{S_{AC}L}{EA} = \frac{S_1 L}{EA\cos^2\alpha} = \frac{S_1 L}{EA\cos^2\alpha}$$

نتیجه می شود:

$$\begin{cases} S_{AC} + 2S_1\cos\alpha = P \\ S_{AC} = \frac{S_1}{\cos^2\alpha} \end{cases}$$

$$S_{AC} + 2S_{AC}\cdot\cos^3\alpha = P$$

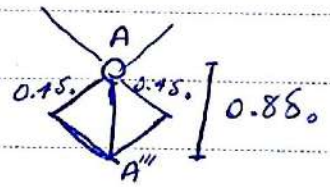
$$\begin{cases} S_{AC} = \frac{P}{1+2\cos^3\alpha} \\ S_1 = \frac{P\times\cos^2\alpha}{1+2\cos^3\alpha} \end{cases}$$ نیروهای داخلی را داشتیم پس باید جابجایی ها را بیابیم.

$$\delta_{AC} = \frac{1}{1+2\cos^3\alpha}\times\frac{P}{A}\ (e.g.\ \alpha=60) = 0.8\,\delta_0$$

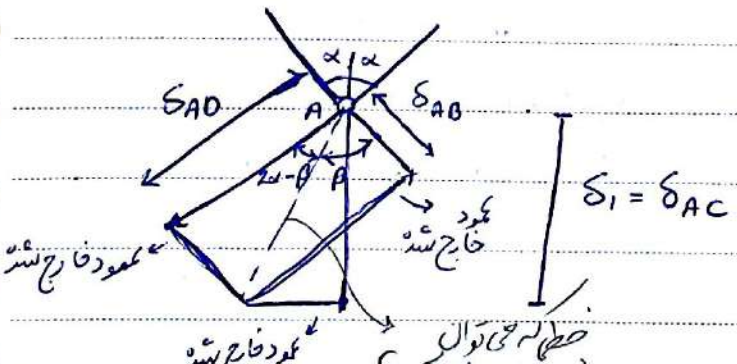
$$\delta_{AB} = \delta_{AD} = \frac{\cos^2\alpha}{1+2\cos^3\alpha}\times\frac{P}{A}\ (eg\ \alpha=60) = 0.2\,\delta_0$$

$$\delta_{AC} = \frac{1}{1+2\cos^3\alpha}\times\frac{\delta_0 PL}{EA} = 0.8\,\delta_0$$

$$\delta_{AB} = \delta_{AD} = \frac{\cos\alpha}{1+2\cos^3\alpha}\,\frac{\delta_0 PL}{EA} = 0.4\,\delta_0$$



میله ها نامتقارن پس δ_{AD} با δ_{AB} متفاوت است.



$$\frac{\delta_{AB}}{\cos\beta} = \frac{\delta_{AD}}{\cos(2\alpha-\beta)} = \frac{\delta_{AC}}{\cos(\beta-\alpha)}$$

تمرین: اگر $\alpha=60$ ، $\beta=?$

سیستم

(I)

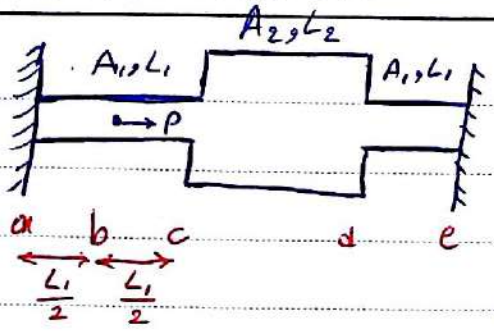
وقتی که ضریب الاستیسیته در صورت غیر متقارن از اینش طراحی شده. (در مورد دست تکم صحیح است)

میله نباید متفاوت باشد.

PdPCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )



$A_1 = 1000\,mm^2$

$A_2 = 2000\,mm^2$

$L_1 = 1.0\,m$

$L_2 = 1.0\,m$

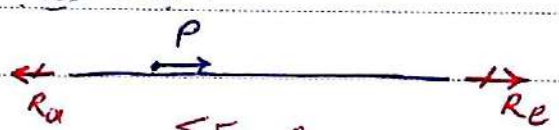
$P = 200.0\,KN$

$E = 200\,GPa$

$\delta_i = ?$ $\sigma_i = ?$ جابجایی و تنش در هر قطعه

برست آورید

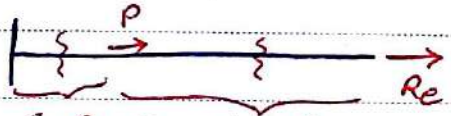
واسته به این که کدام نقطه را تکیه‌گاه و دیگری را آزاد فرض کنیم، δ نقطه آزاد را صفر می‌گیریم.



$\sum F_x = 0$

$-R_a + P + R_e = 0$

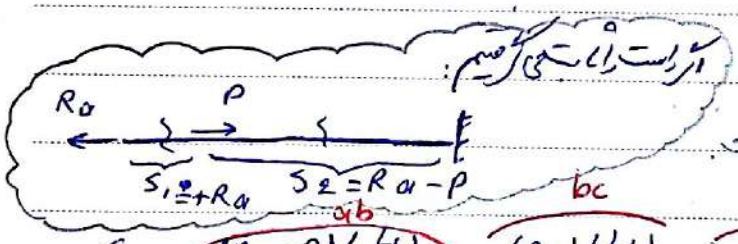
(در مسائلی که جسمی بین دو مانع قرار دارد، تنها از صفر بودن جابجایی دو نقطه‌ای انتهایی مطمئن هستیم و دیگر نقاط می‌توانند جابجا شوند. اگر یکی از تکیه‌گاه‌ها وجود نداشت جسم به شکل آزاد تغییر شکل می‌داد ولی با وجود هر دو تکیه‌گاه جسم ثابت می‌ماند.)



$\delta_e = 0$

$\delta_e = \sum \frac{S_i L_i}{E A_i}$

اگر برایت را ثابت می‌گرفتیم:



اضافه:

جابجایی نقطه آزاد برابر جمع جابجایی‌های هست‌های قبل از آن است.

* در مسائل جبت نیروها را در حل برآیند کشش یا فشار بودن را مشخص می‌کنند که در متن جبت نیروها را طوری می‌گیریم که کشش باشد و مقدار معادله بدون علامت است. به نحوه‌ای است که اگر فرض کشش در نظر گرفتیم و فشار بود، با حل شدن S برعکس آمده و فرض ما منفی شده و مسئله به شکل صحیح درمی‌آید.)

$$\delta_e = \frac{(R_e+P)\left(\frac{L_1}{2}\right)}{EA_1} + \frac{(R_e)\left(\frac{L_1}{2}\right)}{EA_1} + \frac{R_e L_2}{EA_2} + \frac{R_e L_1}{EA_1} = 0$$

ab bc cd de

$$\frac{(R_e+200\,KN)(0.5)^m}{\underbrace{(200)GPa(1000)^{mm^2}}_{2\times10^8}} + \frac{(R_e)(0.5)}{2\times10^8} + \frac{(R_e)(1.0)}{4\times10^8} + \frac{(R_e)(1.0)}{2\times10^8} = 0$$

در مسائل ساده نامعین، ابتدا نوشتن معادله‌ی تعادل ایستایی معادله سازگاری بعد از آن حل کردن نیروی مجهول

$$\frac{1}{2}(R_e+200) + \frac{1}{2}R_e + \frac{1}{2}R_e + R_e = 0$$

$$\frac{5}{2}R_e + 100 = 0$$

$$R_e = \frac{-200\,KN}{5} = -40\,KN$$

$$\Rightarrow R_a = 160\,KN$$

جسم در بخش be تحت فشار و در بخش ab تحت کشش است

$\overline{ab}$: $S_1 = R_e + P$

$= -40 + 200\,KN = +160\,KN$

$$\sigma_1 = \frac{S_1}{A} = \frac{160\times1000N}{1000\times10^{-6}m^2} = 160\times10^6\,Pa = 160\,MPa$$ (کشش و مثبت)

Subject:
Year. Month. Date. ( )

نقطه‌ی a نمی‌تواند حرکت کند

$\delta_b = \frac{S_1 L_1}{EA_1} = \frac{(160\times10^3\,N)(0.5)^m}{2\times10^8\,N} = 4\times10^{-4}\,m = 0.4\,mm$ به سمت راست جابه‌جا شده است

$bc: S_2 = Re = -40\,KN$

$\sigma_{\frac{a}{2}} = \frac{S_2}{A_1} = \frac{-40\times10^3}{1000\times10^{-6}} = -40\,mpa$ فشاری

$\delta_{c/b} = \frac{S_2 \frac{L_1}{2}}{EA_1} = \frac{(-40\cdot10^3)(0.5)}{2\times10^8} = -0.1\,mm$ جابه‌جایی نسبی

جابه‌جایی نقطه c نسبت به نقطه b

نقطه b نسبت به نقطه c به سمت چپ جابه‌جا شده است.

$\delta_c = +0.3\,mm$ به سمت راست جابه‌جایی مطلق

$cd: S_2 = -40\,KN$

$\sigma_{\frac{a}{2}} = \frac{-40}{A_2} = -20^{mpa}$ فشاری

$\delta_{d/c} = \frac{S_2 L_2}{EA_2} = \frac{(-40\times10^3)(0.1)}{(200\times10^9)(2000\times10^{-6})} = -1\times10^{-4}\,m = -0.1\,mm$

$\delta_{d/b} = -0.1+(-0.1) = -0.2^{mm}$

$\delta_{d/a} = \delta_d = -0.2+0.4 = +0.2$

در صورتی که یک لوله بین دو مانع قرار گرفته باشد و نیروهای محوری بر روی آن وجود داشته باشد، جمع جابه‌جایی‌های نسبی نقاط درون لوله باید صفر باشد. ولی جمع جابه‌جایی‌های مطلق صفر نیست.

$de: S_2 = -40\,KN$

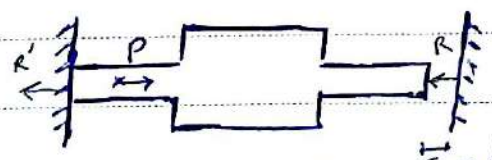
$\sigma_2 = -40\,mpa$

$\delta_{d/e} = -0.2\,mm$

تمام

برای بدست آوردن جابه‌جایی‌های مطلق نقاط لوله، از اولین نقطه‌ی ثابت شروع می‌کنیم به این نحو که جابه‌جایی نسبی و مطلق برای نقطه‌ی اول یکی است و جابه‌جایی مطلق نقطه‌ی دوم برابر جمع جابه‌جایی‌های نسبی بین دو نقطه و جابه‌جایی مطلق نقطه‌ی اول است.

* تمرین ② نیروهای داخلی و جابه‌جایی‌ها را محاسبه کنید.



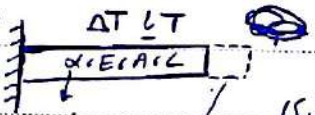
این سؤال مشابه سؤال قبل است، فقط با این تفاوت که اگر نیروی تکیه‌گاهی R به سیستم وارد شود، جابه‌جایی سر آزاد به جای صفر باید برابر 0.2^{mm} باشد. (چون مقدار افزایش طول در اثر نیروی تکیه‌گاهی برابر 0.5 است و نیروی R تنها اجازه‌ی 0.2mm افزایش طول را به سیستم می‌دهد.)

PqPCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

تنش‌های حرارتی
Thermal stress



سازه معین

ضریب انبساط حرارتی

تغییر اندازه در اثر حرارت

واحد T بسته به واحد α است.

سازه معین، بدون بارگذاری

وقتی میله بتواند به آسانی از ادامه افزایش طول بدلیل تغییر دمای حرارتی جلوگیری شود. تحت اثر تغییر درجه حرارت.

چون میله آزاد است در اثر افزایش طول تغییر تنشی بر میله وارد نمی‌شود.

$$\delta_T = \alpha . T . L$$

$$\sigma_T = 0 \quad \text{(No Stress)}$$

$$\varepsilon_T = \alpha . T$$

کرنش

تنش حرارتی

$$\sigma_T = \alpha T E$$

$$\begin{cases} \delta_T = \alpha T L \\ \varepsilon_T = \alpha T \end{cases}$$

سازه نامعین



میله می‌خواهد به اندازه δ_T افزایش یابد.

اما تکیه‌گاه با اعمال نیروی R_b آن را به اندازه δ_T فشرده می‌سازد.

سازه نامعین بدون بارگذاری

تغییر درجه حرارت T

$$\delta_T = \frac{R_b L}{EA}$$

$$\delta_b = \alpha T L - \frac{R_b L}{EA} = 0 \Rightarrow \alpha T L = \frac{R_b L}{EA}$$

$$\frac{R_b L}{EA} = \alpha T L$$

$$R_b = \alpha . T . E . A$$

فقط در این حالت خاص صادق

$$\sigma_T = \alpha . T . E$$

$$\varepsilon_T = \frac{\sigma_T}{E} = \alpha . E$$

مثال) $E = 200\ Gpa = 2 \times 10^{11}\ pa$

$\alpha = 10^{-5}\ 1/^\circ C \quad T = 100^\circ C$

$$\sigma_T = (10^{-5})(2 \times 10^{11})(100)$$

$$= 2 \times 10^{8}\ pa$$

$$= 200\ Mpa$$

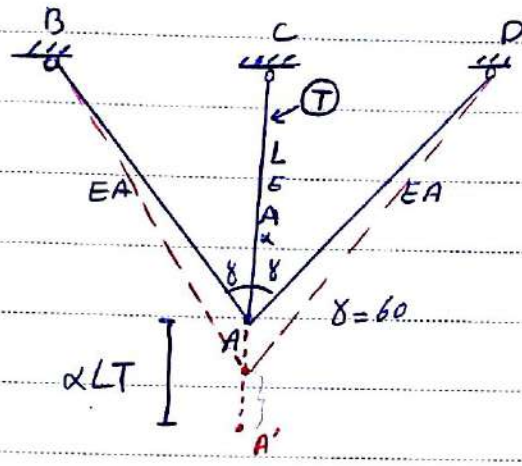
Subject:

Year. Month. Date. ( )

۵ سؤال از جلسه ترین قبل

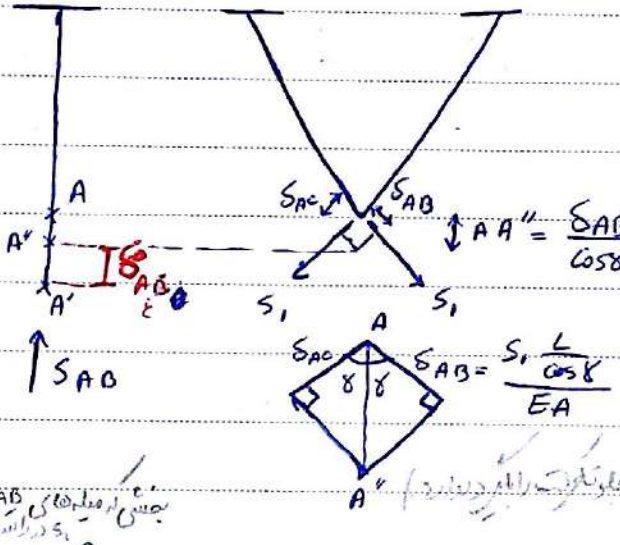
4 سؤال از جلسه این ترین

فقط میله‌ی وسط گرم می‌شود.



خطای ساخت
Error

کشش در میله‌های AB و AD
و فشار برای میله AC



نیروی S_{AC} وارد بر میله AC باعث کاهش طول میله

به اندازه $A''A'$ می‌شود. (این نیرو توانایی این که کاملاً خودش را کم کند را ندارد)

میله‌ی AC میتواری افزایش معادل سازی:

طول می‌یابد اما از لحاظ نیرو با حالت قبل است.

(اندازه نیروهای وارد بر میله‌ها در نقطه A تا زمانی با نقطه A'' تداوم دارد زیرا تغییری به نیروها تغییر دهد)

پس به ازای αLT افزایش طول به اندازه‌ی $-\frac{S_{AC}L}{EA}$

کاهش طول داریم: دیاگرام آزاد نقطه A:

$$\alpha LT - \frac{S_{AC}L}{EA} = AA''$$

S_{AB} و S_{AC} و ... صرفاً "اندازه" هستند و

مثبت و منفی کشش و فشاری بودن را نمی‌توان در حالت

پارامتری نیز وارد رابطه کرد.

$$\frac{S_1 L}{EA\cos^2\gamma} + \frac{(2S_1\cos\gamma)L}{EA} = \alpha LT$$

$$\frac{S_1 L}{EA}\left(\frac{1}{\cos^2\gamma} + 2\cos\gamma\right) = \alpha LT$$

Residual Stresses
تنش‌های پس‌ماند

کشش $S_1 = \alpha T\, EA \cdot \frac{\cos^2\gamma}{1+2\cos^3\gamma} \Rightarrow \sigma_1 = \alpha TE\,\frac{\cos^2\gamma}{1+2\cos^3\gamma}$

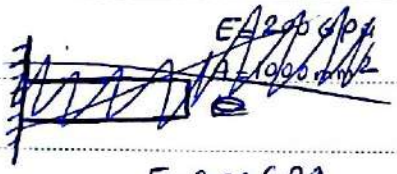
فشاری $S_{AB} = \alpha \cdot T \cdot E \cdot A \,\frac{2\cos^3\gamma}{1+2\cos^3\gamma}$

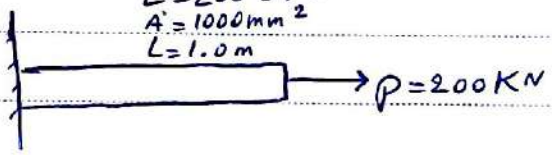
برای نوشتن معادله‌ی $\delta = \frac{SL}{EA}$ ،
نیرو را در هر نقطه که بیابیم باید طول حسب
آن نقطه را نیز وارد کنیم.

PqPC

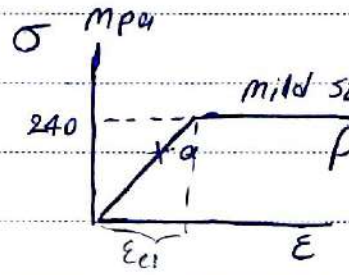
Subject:

Year. Month. Date. ( )





بار بر داری :



تنش و مرتبا در حال افزایش است اما تنش از مقدار خاصی دیگر بیشتر نمی شود.

Elastic perfectly plastic

سه نقطه ای حد بالا و پایین جاری شدن σ_{yp} در فولاد نرم مهندسی

$$\sigma = \frac{S}{A}$$

$$= \frac{200\times10^{3}}{1000\times10^{-6}}\ pa = 200\ mpa$$

نقطه (a)

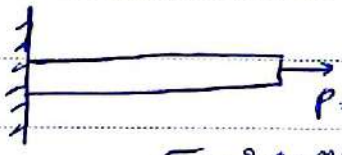
$$\delta = \frac{SL}{EA} = \frac{(200\times10^{3})(1.0)}{2\times10^{8}} = 1\ mm$$



پس از $P=0$

$\Rightarrow \sigma = 0$

$\delta = 0$

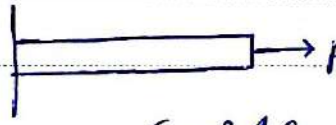


$P = 240\ KN$

$\sigma = 240\ mpa$

$\delta = 1.2\ mm$

حتی اگر یک اسیلون بیشتر شود.



$P = 240.00001$ → بار حد پلاستیک P_p

بار کمتر باعث سیلان شدن می شود

240 نیوتن

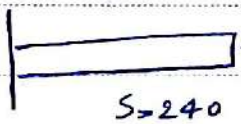
تنش از 240 نمی تواند بیشتر شود.

$S = 240$

$\sigma = 240$

$\delta = \infty$

بار حد الاستیک P_y → yielding



$P = 240.00001$

$S = 240$

$\sigma = 240$

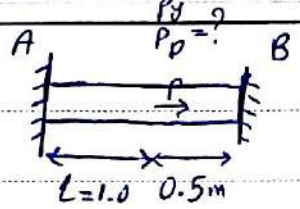
$\varepsilon = 0.001 \rightarrow \delta = 100\ mm$

زمانی که $P=0$ →

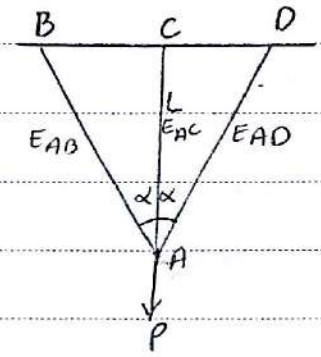
$\delta_{p1} = 98.8\ mm$

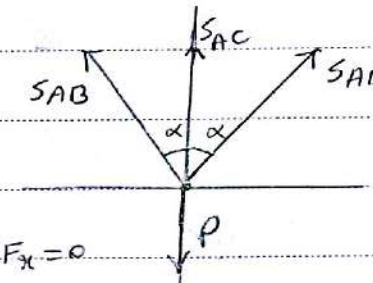
Subject:

Year. Month. Date. ( )



مثال (I):





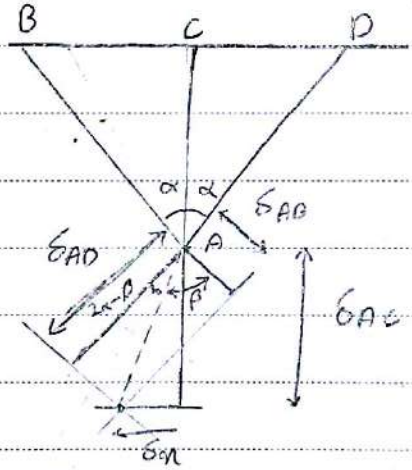
$\pm \rightarrow \sum F_x = 0$

$-S_{AB}\sin\alpha + S_{AD}\sin\alpha = 0 \Rightarrow \boxed{S_{AB} = S_{AD} = S_1}$

$+\uparrow \sum F_y = 0$

$S_{AC} + S_{AB}\cos\alpha + S_{AD}\cos\alpha - P = 0$

$\boxed{S_{AC} + 2S_1\cos\alpha = P}$ معادله تعادل



$$\begin{cases} \delta_{AB} = \dfrac{(S_{AB})\left(\frac{L}{\cos\alpha}\right)}{E_{AB}A} \\ \delta_{AD} = \dfrac{(S_{AD})\left(\frac{L}{\cos\alpha}\right)}{E_{AD}A} \\ \delta_{AC} = \dfrac{S_{AC}L}{E_{AC}A} \end{cases}$$

$$\frac{\delta_{AD}}{\cos(2\alpha-\beta)} = \frac{\delta_{AB}}{\cos\beta} = \frac{\delta_{AC}}{\cos(\beta-\alpha)}$$ با جایگذاری

$$\frac{S_1 L}{AE_{AD}\cos\alpha\cos(2\alpha-\beta)} = \frac{S_1 L}{AE_{AB}\cos\alpha\cos\beta} = \frac{S_{AC}L}{AE_{AC}\cos(\beta-\alpha)} \Rightarrow \begin{cases} E_{AD}\cos(2\alpha-\beta) = E_{AB}\cos\alpha\cos\beta \quad ① \\ S_{AC}(E_{AB})\cos\alpha\cos\beta = S_1 E_{AC}\cos(\beta-\alpha) \quad ② \\ S_{AC}(E_{AD})\cos\alpha\cos(2\alpha-\beta) = S_1 E_{AC}\cos(\beta-\alpha) \end{cases}$$

$① \Rightarrow E_{AD}(\cos2\alpha\cos\beta + \sin2\alpha\sin\beta) = E_{AB}\cos\alpha\cos\beta \xrightarrow{\div\cos\beta} E_{AD}(\cos2\alpha + \tan\beta\sin2\alpha) = E_{AB}\cos\alpha$

$\Rightarrow \tan\beta = \frac{1}{\sin2\alpha}\left(\frac{E_{AB}\cos\alpha}{E_{AD}} - \cos2\alpha\right) \Rightarrow \beta = \tan^{-1}\left[\frac{1}{\sin2\alpha}\left(\frac{E_{AB}\cos\alpha}{E_{AD}} - \cos2\alpha\right)\right]$ از اینجا β بدست می‌آید.

$② \Rightarrow S_{AC} = \frac{E_{AC}\cos(\beta-\alpha)}{E_{AB}\cos\alpha\cos\beta}S_1 \quad ③$

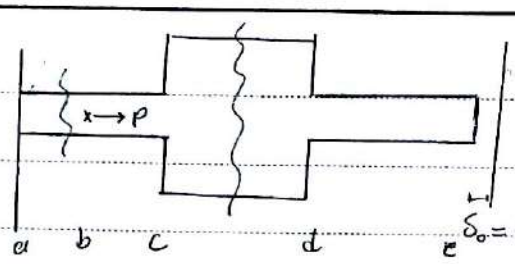
③ در معادله $\Rightarrow \frac{E_{AC}\cos(\beta-\alpha)}{E_{AB}\cos\alpha\cos\beta}S_1 + 2\cos\alpha S_1 = P \Rightarrow S_1 = \frac{P}{2\cos\alpha + \frac{E_{AC}\cos(\beta-\alpha)}{E_{AB}\cos\alpha\cos\beta}}$

P4PCO

Subject:

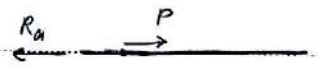
Year. Month. Date. ( )

$A_1 = 1000mm^2$



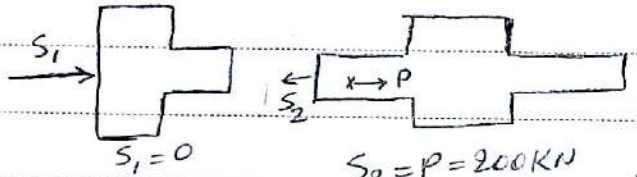
$A_2 = 2000mm^2$
$L_1 = 1.0m$
$L_2 = 1.0m$
$P = 200.KN$
$E = 200 GPa$
$\delta_0 = 0.2mm$

تمرین (II):



$\rightarrow \Sigma F_x = 0$

$P = R_a = 200KN$

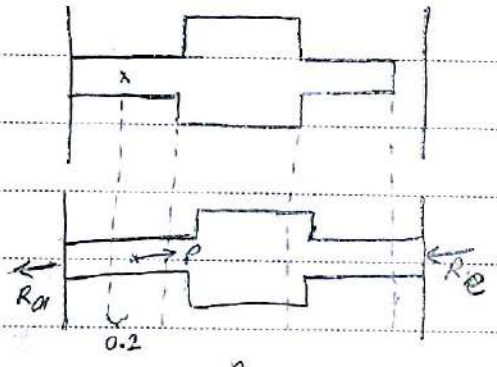


$$\delta_e = 0 + \frac{(200\times10^3)(0.5)}{200\times10^9\times1000\times10^{-6}} = +0.5mm$$

$S_2 = P = 200KN$

تا 0.2mm جسم بدون هیچ مشکلی افزایش طول دارد.

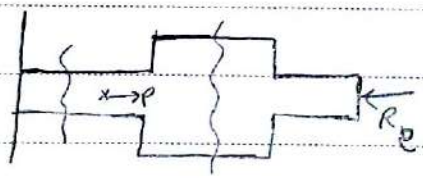
اما نقطه e می تواند 0.3mm افزایش طول دهد پس باید به دیواره برخورد کند و طول این 0.3 می شود.





$+\rightarrow \Sigma F_x = 0 \Rightarrow P - R_a + R_e = 200KN$ معادله تعادل

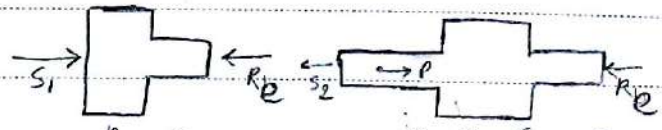
$\delta_e = 0.2mm$



$$\frac{-R_e L_1}{EA_1} + \frac{-R_e L_2}{EA_2} + \frac{-R_e(\frac{L}{2})}{EA_1} + \frac{(P-R_e)(\frac{L}{2}+0.2mm)}{EA_1} = 0$$

$$\frac{R_e}{A_1} + \frac{R_e}{2A_1} + \frac{R_e}{2A_1} + \frac{R_e(0.5+0.2\times10^{-3})m}{A_1} = \frac{P(0.5+0.2\times10^{-3})m}{A_1}$$

$$R_e\left(1+1+1+(0.5+0.2\times10^{-3})\right) = P(0.5+0.2\times10^{-3})$$



$R_e = S_1$

$P = R_e + S_2 \Rightarrow S_2 = P - R_e$

$$R_e = \frac{200\times10^3\times0.5 + 200\times0.2}{3 + 0.5 + 0.2\times10^{-3}} = 28581.223$$

$$= 28.581KN$$

$$\Rightarrow R_a = 200 - R_e = 171.41KN$$

$$\overline{ab}: \delta_b = \frac{(171.41\times10^3)(0.5+0.2\times10^3)}{200\times10^9\times1000\times10^{-6}} = 0.428mm$$

$$\overline{bc}: \delta = \frac{-(28.581\times10^3)(0.5)}{200\times10^9\times1000\times10^{-6}} = -0.071$$

$\delta_{c/b}: 0.428 - 0.071 = 0.357$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

Cd: $\delta = \frac{(-28.581\times10^{3})(1)}{200\times10^{9}\times2000\times10^{-6}} = -0.071$

$\delta_{d/c} = 0.357 - 0.071 = 0.285$

de: $\delta = \frac{(-28.581\times10^{3})(1)}{200\times10^{9}\times1000\times10^{-6}} = -0.14$

روش‌های طراحی سازه و قطعات مکانیکی

۱- روش تنش مجاز

2- روش بارخرابی یا باروری — limit load

Load Resistance factor design (LRFD)

اهداف ما در طراحی سازه و قطعه: یا نیرو مشخص است دنبال احد است یا مساحت مشخص است و نیرو مدنظر است بدست آوردن

~~روش اول~~: ابعاد مشخص A (معلوم)

کنترل نیرو یا بار وارده بر سازه

~~روش دوم~~: هدف تعیین ابعاد شدا" A سطح مقطع (از طریق موسسات استاندارد)

در روش اول، تنش مجاز $\sigma_{allowable}$ را باید داشته باشیم (یا باید بدانیم) سپس از طریق محاسبه نیروها و مساحت بر حسب آن طراحی صورت می‌گیرد.

در روش تنش مجاز، ابتدا نیروی وارد بر قطعه را حساب کرده و سپس از طریق $\sigma_{all} = \frac{F}{A}$ مساحت مقطع قطعه را بدست می‌آوریم

$\sigma_{max} \le \sigma_{allowable}$

ماکزیمم تنش

Working stress σ_{all}

در روش دوم به تنش مجاز کاری نداشته و فقط اجازه می‌دهیم که چه نیرویی (باری) سازه‌ی ما را خراب می‌کند.

در صورت عدم اطمینان از نحوه ساخت مصالح، بارگذاری، نحوه بارپذیری از ضریب اطمینان استفاده می‌کنیم. بارخرابی از طریق آزمایش

$1.2 \times P_{max} \le P_{L\times1.1}$

افزایش 20٪ بار ماکزیمم وارده (شدا" قرار است بار بیشتری وارد شود.)

روش: تنش مجاز: $\sigma_{max} \le \sigma_{all}$

بارخرابی: $P_{max} \le P_L$

PAPCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

روش بار خرابی یا بار حدی ← حالت های خرابی Failure Mode

1- جاری شدن یا تسلیم شدن Yielding ✓

2- پاره شدن یا شکستن شکست Fracture / Tearing / General Yielding ✓

3- کمانش Buckling

4- خستگی L4

5- خزش

:

وقت شود که P_L و P_p بارهای خارجی بوده و در لحظه‌های آغاز جاری شدن و شکست به جسم وارد می‌شوند به این معنا که در این لحظات فرایند نیروی داخلی برابر نیروی خارجی است.

در لحظه‌ی آغاز جاری شدن نیروی P_L به جسم وارد می‌شود

$\sigma_{max} = \sigma_{yp}$ داریم

شروع تغییر شکل بزرگ

نیروی حد الاستیک P_L

$\sigma_{max} = \sigma_{yp}$

تسلیم شدن (جایی که نیروی وارده به سازه برابر P_L است) جایی که نیروی وارده به سازه برابر P_L است.

و آغاز جاری شد

(a)

Mild steel

فولاد نرم

General Yielding

P_p بار حد پلاستیک

بار بحرانی که در آن شکست رخ می‌دهد

P_p باری که در لحظه‌ی شکست جسم وارد می‌شود و باعث شکست می‌شود.

(a)

شروع تغییر شکل‌های بزرگ (جایی که این بار تنش‌ها به تنش σ_{yp} می‌رسند) : P_L نیروی حد الاستیک

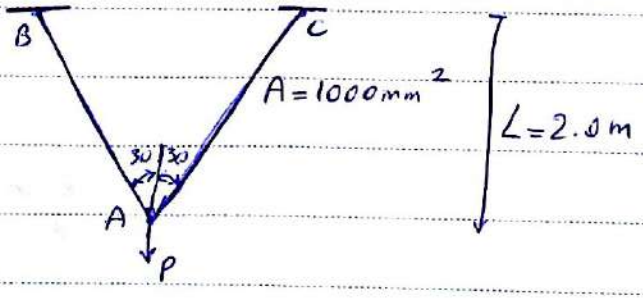
شکل ایده‌آل شده

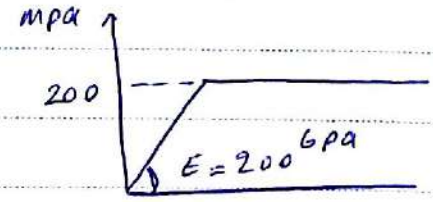
در نمودار ایده‌آل شده‌ی فولاد نرم، بار حد الاستیک و پلاستیک با هم برابرند چون با افزایش یک اسپرسی P_L، فولاد آن قدر کشیده می‌شود تا شکسته شود پس می‌توان گفت $P_p = P_L$

مثال

در حالت سازه‌ی زیر:

می‌خواهیم بدانیم که این سازه تحت اثر چه نیروی خرابی می‌شود.

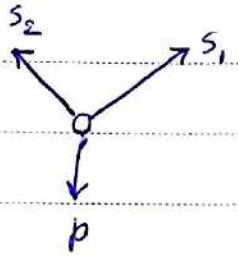




$\begin{cases} P_L = ? \\ P_p = ? \end{cases}$

Subject:

Year. Month. Date. ( )



$\Sigma F_x = 0 \rightarrow S_1 = S_2 = S$

$\Sigma F_y = 0 \rightarrow 2S\cos 30 = P$

$$S = \frac{P}{2\cos 30} = \frac{P}{\sqrt{3}}$$

پس لوله فولادی به بار حد الاستیک میرسد

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{P}{\sqrt{3}A}$$

P_L در این لحظه رخ می‌دهد ←

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_{yp}$$

$$\frac{P_L}{\sqrt{3}A} = \sigma_{yp} \quad P_L = \sqrt{3}\,\sigma_{yp} A$$

پس

$$P_L = \sqrt{3} \times 200^{MPa} \times 1000 mm^2$$

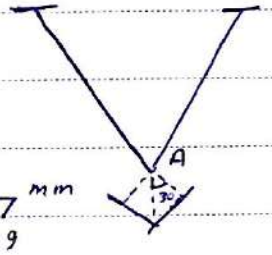
$$= 3.4 \times 10^5 N$$

$$= 340 KN = (200\sqrt{3}) KN$$

برای این میله بار حد پلاستیک و بار حد الاستیک برابرند چون فولاد تغییر طول بزرگ جسم پاره فولاد است.

$$P_L = P_P = 340 KN$$

(به خاطر نمودار ایده‌آل شده و قطعی پاره شدن در استاد فقط اعتقاد است که نشانه‌های ابتدا و انتهای آن برابرند بالاتر)



$$S_1 = S_2 = \frac{P}{\sqrt{3}}$$

$$P_L = 340^{KN}$$

$$S_1 = S_2 = \frac{340}{\sqrt{3}} = 200 KN$$

$$\delta_1 = \delta_2 = \frac{SL}{EA} = \frac{(200\times10^3)^N \left(\frac{2.0^m}{\cos 30}\right)}{(200\times10^9)_{Pa}(10^{-3})m^2} = 2.27^{mm} = 2.309$$

$$\delta_A = \frac{\delta_1}{\cos 30} = \frac{2.27}{\cos 30} \simeq 2.66 mm$$

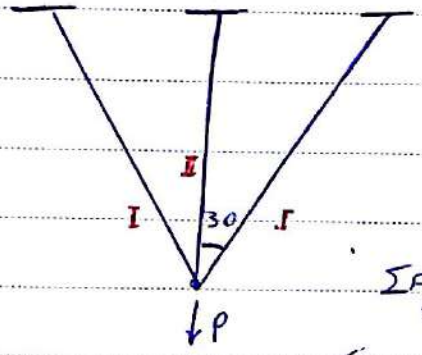
آغاز تغییر شکل بزرگ

$\simeq 2.66$ mm

Subject:

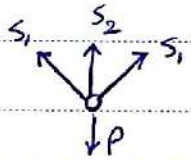
Year. Month. Date. ( )

در حالت سازه نامعین :



$P_L = ?$

$P_P = ?$



به خاطر تقارن: $\Sigma F_x = 0 \quad S_1 = S_1$

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow 2S_1 \cdot \cos\alpha + S_2 = P$$

معادله سازگاری :

$$\frac{\delta_1}{\cos\alpha} = \delta_2 = \frac{\delta_3 = \delta_1}{\cos\alpha}$$

$$\begin{cases} \delta_1 = \delta_3 = \dfrac{S_1 \frac{L}{\cos\alpha}}{EA} \\ \delta_2 = \dfrac{S_2 L}{EA} \end{cases}$$

زمانی که آخرین عضو وارد الاستیک خود برسد $P_P = P_L$ آن می‌شود

$$\frac{\frac{S_1 \frac{L}{\cos\alpha}}{EA}}{\cos\alpha} = \frac{S_2 L}{EA} \Rightarrow \frac{S_1 L}{EA\cos^2\alpha} = \frac{S_2 L}{EA} \Rightarrow S_1 = (\cos^2\alpha) S_2$$

$$(2S_1)(\cos\alpha) + S_2 = P$$

$$2\cos^3\alpha S_2 + S_2 = P \Rightarrow \begin{cases} S_1 = 0.32P \\ S_2 = 0.43P = 199.95 \end{cases}$$

تنش وارده به دو میله کناری کمتر از

$$\sigma_1 = \frac{0.32P}{1000 \times 10^{-6}} = 320P = 148 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = 430P$$

$$\sigma_{max} = \sigma_{yp}\big|_{P=P_L}$$

$$430 P_L = 200 \times 10^{+6}$$

$$P_L = \frac{200}{430} \times 10^{+6} = 465 \text{ KN}$$

به ازای این نیرو، میله‌ی وسط به حالت پلاستیک (روی آید) نیرویی که تحمل می‌کند همواره ثابت $(S_2 = 0.43 \times P_L = 0.43 \times 465 \text{KN})$ (روی آید) ولی دو میله‌ی دیگر به ازای این بار هنوز الاستیک هستند. از اینجا به بعد هر چقدر نیرو افزایش کند فقط باعث افزایش نیروی دو میله‌ی کناری می‌شود. (بعد از پلاستیک شدن میله وسط، معادله سازگاری دیگر صادق نیست)

معادله تعادل همیشه برقرار است چه در حالت الاستیک و چه در حالت پلاستیک باشیم

معادله تعادل برای نیروی بالاتر از 465 به شکل زیر روی آید :

$$2S_1 \cos\alpha + S_2 = P_P$$

$$2 \times 200 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 199.95 = P_P \Rightarrow P_P = 546 \text{KN}$$

اگر برای میله‌های I هم مثل میله II رابطه را محاسبه کرده و در نهایت از رابطه $S_1 = 0.32 P_L$ نیروی S_1 را محاسبه کنیم، 200 به دست می‌آید.

PL I

93

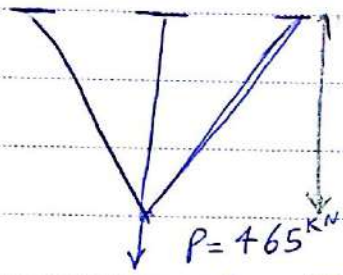
Subject:
Year. Month. Date. ( )

برای بدست آوردن جابه جایی تا لحظه‌ای که دو سیم پلاستیک شوند.
ابتدا جابه جایی ها را تا زمانی که میله وسط پلاستیک شود را می نویسیم.

$$\delta_{II} = \frac{200\times 2/\cos\alpha}{200\times 1000} = 2\,mm$$

بعد از حذف میله وسط از نیروی داخلی آن نیز کاسته می شود،

$$S_1 = \frac{P}{\sqrt{3}}$$



$$\delta_A = 2^{mm} + \frac{\frac{\Delta P}{\sqrt{3}} L}{EA\cos\alpha}$$

$$\delta_A = 2 + \frac{\frac{81}{\sqrt{3}}\times 2}{200\times 1000\times\frac{3}{4}} = 3.08\,mm$$

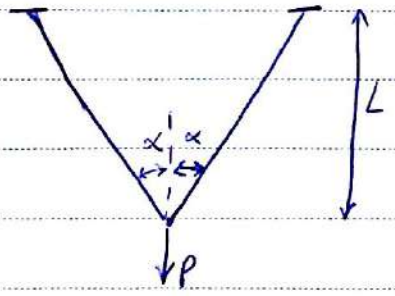
$\delta_A = 2^{mm}$

به ازای 2^{mm} افزایش طول $P = 465$

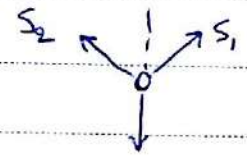
$\Delta P = 546 - 465$
$= 81$

و به ازای $81\,KN$ افزایش دیگر نیرو $1.08\,mm$
افزایش طول دیگر داریم. چون که میله ی
وسط مقاومت خود را از دست داده است.

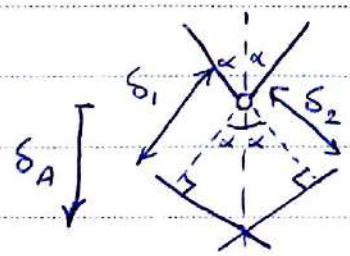
آیا باید ابتدا تغییر طول به ازای نیروی خارجی $P = 465$ یعنی $S_1 = 0.32\times 465$ که میله وسط فنوز پلاستیک نشده را بدست آورده
$= 148.8$
سپس بر اساس طول جدید و ΔP ، رابطه $\frac{\frac{\Delta P}{\sqrt{3}} L}{EA\cos\alpha}$ را بنویسیم.



$$\Sigma F_x = 0$$
$$\rightarrow S_1 = S_2$$



$$\Sigma F_y = 0$$
$$\rightarrow 2\times S_1\times\cos\alpha = P$$
$$\therefore S_1 = \frac{P}{2\cos\alpha} = \frac{P}{2\cos 30} = \frac{P}{\sqrt{3}}$$



$$\delta_1 = \delta_2 = \frac{S_1\frac{L}{\cos\alpha}}{EA} = \frac{S_1 L}{EA\cos\alpha}$$

$$\delta_A = \frac{\delta_1}{\cos\alpha} = \frac{S_1 L}{EA\cos^2\alpha}$$

P4PCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

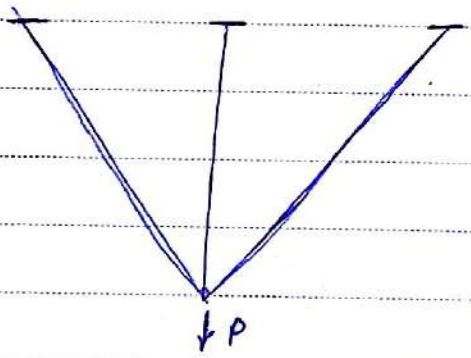
$$P_L^{\theta} = \sqrt{3} \cdot \sigma_{yp} \cdot A$$

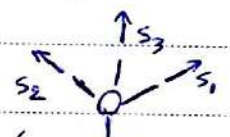
$$S_1 = S_2 = \sigma_{yp} \times A$$

$$\delta_A = \frac{S_1 L}{EA\cos^2\alpha} = \frac{(\sigma_{yp} A) L}{EA\cos^2\alpha} = \frac{\sigma_{yp} \cdot L}{E\cos^2\alpha}$$

⋮

حل دوباره مسئله صفحه قبل





$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \rightarrow S_1 = S_2 = S \\ \sum F_y = 0 \rightarrow \boxed{2S\cos\alpha + S_3 = P} \end{cases}$$

معادله‌ی تعادل

معادله‌ی سازگاری (تا وقتی نرود است که هیچ کدام از اعضاء بار حد الاستیک خود نرسیده باشند)

$$\delta_A = \delta_3 = \frac{S_1}{\cos\alpha} = \frac{S_2}{\cos\alpha}$$

حالا زن

$$\frac{S_3 L}{EA} = \frac{S\frac{L}{\cos\alpha}}{EA\cos\alpha}$$

$$S_3 = \frac{S}{\cos^2\alpha} \quad \& \quad \boxed{S = S_3 \times \cos^2\alpha}$$

رابطه‌ی بین نیروهای داخلی از معادله سازگاری (در محدوده‌ی الاستیک)

$$2S_3\cos^2\alpha \cdot \cos\alpha + S_3 = P$$

$$\begin{cases} S_3 = \dfrac{P}{1+2\cos^2\alpha} \\ S = \dfrac{P\cdot\cos^2\alpha}{1+2\cos^3\alpha} \end{cases}$$

* در مسائل بدست آوردن بار حد الاستیک و پلاستیک برای سازه، باید بررسی کنیم که کدام عضو سازه بار بیشتری را تحمل می‌کند که در نتیجه‌ی آن زودتر از بقیه بار حد الاستیک خود را می‌دهد

PAGE

Subject:

Year. Month. Date. ( )

بعد از وصل میله‌ی وسط به دو میله‌ی P، معادلات سازگاری و روابط به‌دست آمده از آن‌ها دیگر صادق نیستند.

$$\delta_3 = P\frac{1}{1+2\cos^3\alpha} \qquad \sigma_3 = \frac{P}{A}\frac{1}{1+2\cos^3\alpha}$$

$$\delta = P\frac{\cos^2\alpha}{1+2\cos^3\alpha} \qquad \sigma_1 = \frac{P}{A}\cdot\frac{\cos^3\alpha}{1+2\cos^3\alpha}$$

پس از این که میله‌ی وسط به حد الاستیک خود رسید و بار تحمیلی آن ثابت ماند، دیگر روابط جلو (حاصل از معادله‌ی سازگاری) صادق نیستند چون نیروی بیشتر از این فرمول‌ها به میله‌ها وارد شده (چون میله‌ی وسط کنار کشیده) و میله‌ها دیگر از این فرمول‌ها پیروی نمی‌کنند.

P_L when $\sigma_3 = \sigma_{yp}$

$$\frac{P_L}{A}\cdot\frac{1}{1+2\cos^3\alpha} = \sigma_{yp}$$

$$P_L = (1+2\cos^3\alpha)\,\sigma_{yp}\cdot A = 456\ KN$$

$$\delta_A = \delta_3 = \frac{\delta_3 L}{EA} = \frac{P_L L}{EA}\cdot\frac{1}{1+2\cos^3\alpha}$$

$$= \frac{(\sigma_{yp}A)L}{EA} = \frac{\sigma_{yp}L}{E} = \frac{(200\times10^6)(2.0)}{200\times10^9} = 2\times10^{-3}\,m = 2mm$$

$\sigma_{yp}\times A = \frac{P_L \text{ میله‌ی وسط} \times \cos^2\alpha}{1+2\cos^3\alpha}$ یعنی نیروی محوری میله‌ی وسط کنار کشیده.

تنش میله‌ی کنار به اضافه تنش اضافه بر اثر تنش جاری شدن

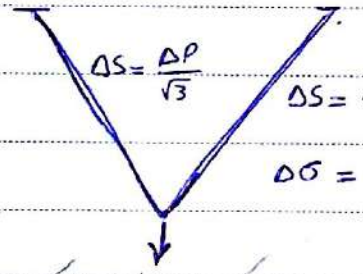
$$\frac{P_L}{A}\cdot\frac{\cos^2\alpha}{1+2\cos^3\alpha} + \frac{\Delta P}{\sqrt{3}A} = \sigma_{yp}$$

148^{mpa} — نیروی اضافی از این جا به بعد — 200

$$\Delta P = (200-148)\times\frac{A\sqrt{3}}{1} = 52\times1000\,mm^2\times\sqrt{3}$$

$$= 90$$

$$P_P = 456 + 90 = 546\ KN$$

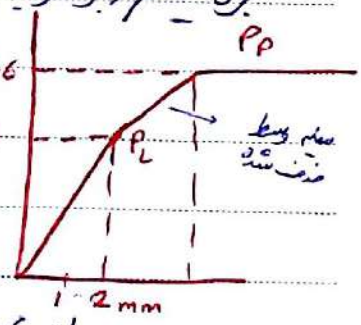


از لحظه‌ای که میله‌ی وسط به بار حد الاستیک خود می‌رسد، دیگر نیروی بیشتر از P_L را تحمل نمی‌کند. این اضافه نیروی ΔP به دو عضو کناری وارد می‌شود. پس می‌توان در شکل استاتیکی معادل وسط را حذف کرد و ΔS و ΔP و $\Delta\sigma$ را به جای آن‌ها گذاشت.

سپس می‌گوییم تنش میله‌های کنار به ازای بار حد الاستیک میله‌ی وسط به علاوه‌ی تنش اضافی ناشی از ΔP ($\Delta\sigma = \frac{\Delta S}{A}$) باید برابر σ_{yp} شود.

$$\Delta\delta_A = \frac{\Delta S\cdot L}{EA\cos^2\alpha} = \frac{\Delta P\cdot L}{EA\cdot\sqrt{3}\cdot\cos^2\alpha}$$

$$= \frac{90\times10^3\,(2.0)}{(200\times10^9)(1000\times10^{-6}\sqrt{3}\times\cos^2 30)}$$



برای بیشتر (برای هر میله‌ی کنار) $P_L = P_P$ $546\ KN$

راه دوم برای به‌دست آوردن:

در زمانی که نیروی داخلی هر عضو به حد جاری شدن ($\sigma_{yp}\times A$) برسد، بار حد پلاستیک داریم.

$$P_P = \sigma_{yp}\cdot A + 2\sigma_{yp}\cdot A\cos\alpha$$

$$= \sigma_{yp}\cdot A(1+2\cos\alpha)$$

$$= (200\times10^6)(10^{-3})\left(1+2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 546\times10^3\,N = 546\,KN$$

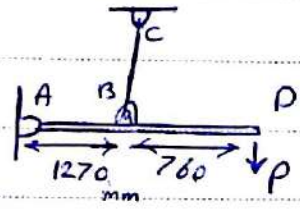
به‌دست آوردن بار حد پلاستیک آسان‌تر است از بار حد الاستیک!

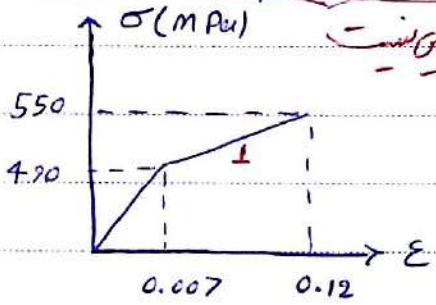
در هر سازه‌ی نرمه‌ای، بار حد پلاستیک سازه فراتر از بار حد الاستیک آن عضو متعادل است.

$\sigma_{yp}\times A$ = نیروی داخلی در لحظه‌ی جاری شدن

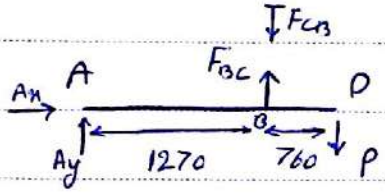
PqPCO

عضو BC از مجموعه زیر دارای قطری برابر 3mm و نمودار تنش-کرنش مطابق شکل است. تغییر مکان قائم نقطه D را در صورتی که نیروی P به صورت تدریجی به 2KN برسد تعیین کنید.





صفحه دیاگرام تنش است



$+\circlearrowleft \sum M_A = 0$

$P \times (1270+760) - F_B \times 1270 = 0$

$2\times10^3 (1270+760) = F_{BC} \times 1270$

$F_{BC} = \dfrac{2\times10^3 (1270+760)}{1270} = 3.2KN$

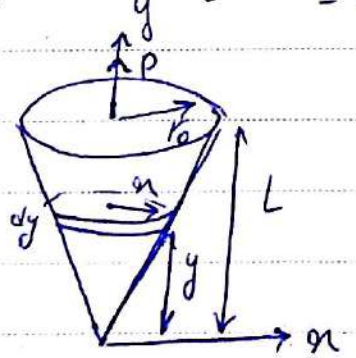
$\sigma = \dfrac{F}{A} = \dfrac{3.2\times1000}{\frac{\pi\times3^2}{4}} = 450\ MPa$

آر معادله خط را برای بخش 1 بنویسیم:

$\sigma = 1327.43\varepsilon - 390 \rightarrow \varepsilon = 0.044$

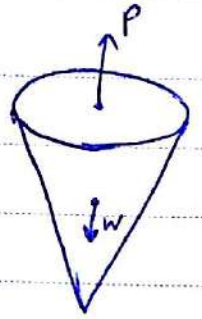
$\delta_D = \varepsilon . L = (0.044) \times (\quad$

مخروطی توپر از مصالح با وزن مخصوص γ و ضریب الاستیسیته E مفروض است. مطلوب است تعیین تغییر مکان انتهای آزاد آن



Subject:

Year. Month. Date. ( )



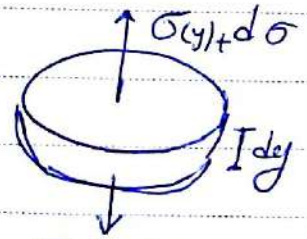
$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0$

$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow P = W$

$\frac{x}{y} = \frac{r_0}{L} \Rightarrow x = y\frac{r_0}{L}$

$\Rightarrow V = \frac{\pi}{3} y x^2 = \frac{\pi}{3} y \frac{y^2 r^2}{L^2}$

$\Rightarrow W = V \times \gamma = \frac{\gamma \pi y^3 r_0^3}{3L^2} = P$



$A = \pi x^2 = \left(y\frac{r_0}{L}\right)^2 \pi \Rightarrow \sigma = \frac{P}{A} = \frac{\gamma \pi y^3 r_0^2}{3L^2}$

$= \frac{\gamma y}{3}$

$\sigma(y) = \frac{1}{3}\gamma y$

$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \Rightarrow \varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{1}{3}\frac{\gamma y}{E}$

$\varepsilon(y) = \frac{dy' - dy}{dy} = \frac{d\delta}{dy}$

$d\delta = \varepsilon(y) \cdot dy$

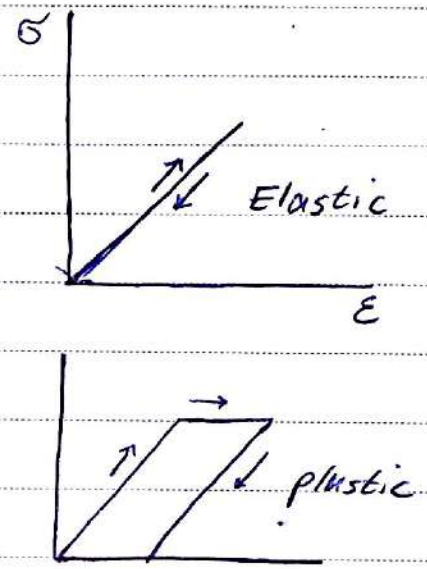
$\delta = \int \frac{1}{3}\frac{\gamma y}{E} dy = \frac{1}{3}\frac{\gamma}{E}\frac{y^2}{2}\Big|_0^L = \frac{\gamma y^2}{6E}\Big|_0^L = \frac{\gamma L^2}{6E}$

PqPCO

Subject:

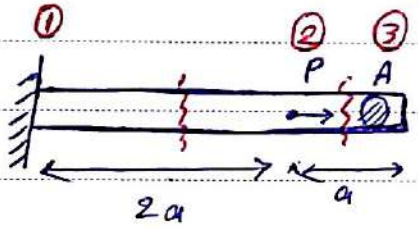
Year. Month. Date. ( )

باربرداری : unloading



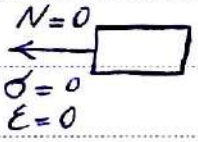
اگر تا زمانی که جسم در ناحیه الاستیک خود است یعنی تنش موجود تنش جاری شدن σ_{yp} نرسیده است باربرداری صورت گیرد تغییر شکل کاملاً ازبین می‌رود در غیر این صورت با شیب برابر با شیب اولیه (E) به سمت محور تنش باز می‌گردد.

δ_2 $\quad \delta_3 = \delta_2 = \frac{2Pa}{EA}$



سازه‌ی معین

بین ناحیه ② و ③ :





$\Sigma F_x = 0$

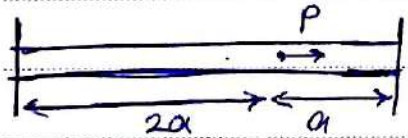
$N = P$

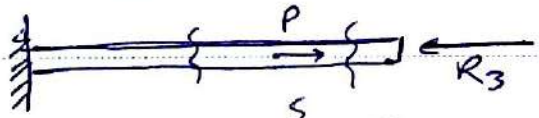
$\sigma = \frac{P}{A}$

$\varepsilon = \frac{P}{EA}$

$$\delta_{2/1} = \int_{x_1}^{x_2} \varepsilon dx = \int_0^{2a} \frac{P\,dx}{EA} = \frac{2Pa}{EA}$$

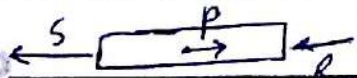
سازه‌ی نامعین :







$S = -R_3$ ، $\sigma = \frac{-R_3}{A}$ ، $\varepsilon = \frac{-R_3}{EA}$ ، $\delta_{3/2} = -\frac{R_3 a}{EA}$



$S = P - R_3$ ، $\sigma = \frac{P-R_3}{A}$ ، $\varepsilon = \frac{P}{EA} - \frac{R_3}{EA}$ ، $\delta_{2/1} = \frac{2Pa}{EA} - \frac{2R_3 a}{EA}$

P4PCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$0 \overset{must}{=} \delta_3 = \delta_{2/1} + \delta_{3/2}$$

$$0 = \left(\frac{-2Pa}{EA} - \frac{2R_3a}{EA}\right) + \left(\frac{-R_3a}{EA}\right)$$

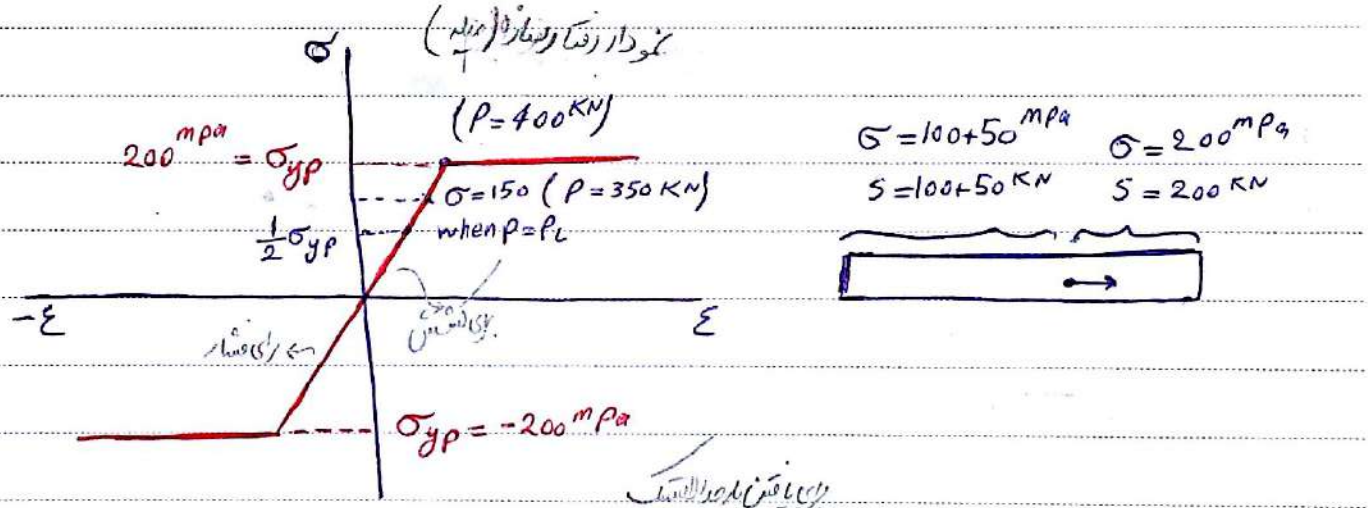
$$0 = -2P - 3R_3$$

$$R_3 = \frac{2}{3}P$$

پس:

$$S = -\frac{2}{3}P \;,\; \sigma = \frac{-2P}{3A} \;,\; \varepsilon = \frac{-2P}{3EA} \;,\; \delta_{3/2} = \frac{-2Pa}{3EA}$$

$$S = \frac{1}{3}P \;,\; \sigma = \frac{P}{3A} \;,\; \varepsilon = \frac{P}{3EA} \;,\; \delta_{2/1} = \frac{2Pa}{3EA}$$



برای یافتن بار حد الاستیک

در مواردی که تنش یک بخش ضعیف است (فشاری است.) قدر مطلق تنش آن را برابر σ_{yp} قرار می‌دهیم.

$$\sigma_{max} = \left|\frac{2P}{3A}\right| = \sigma_{yp}$$

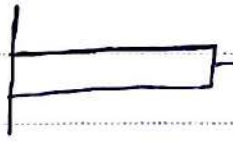
$$P_L \text{ بار حد الاستیک} = \frac{3\sigma_{yp}A}{2} = \frac{3\times 200\times 1000}{2}$$

Elastic limit load

بخش کشش

$$P_L = 300{,}000\,N = 300\,KN \quad (\delta_2 = 1\,mm) \longrightarrow \sigma = \frac{P_L}{3A} = 100 = \tfrac{1}{2}\sigma_{yp}$$

اگر $P=350$ از این به بعد هر چه نیرو اضافه شود به بخش کششی وارد می‌شود.



$\Delta S = 50\,KN$

$$\Delta\sigma = \frac{50}{A} = 50\,mpa$$

برای بخش کششی که فنر دوم حد الاستیک خود است، با توجه به این که هر گونه ΔP بعد از بار حد الاستیک به بخش فشاری، به بخش کششی وارد می‌شود، و از رابطه $\delta = \frac{(S_{PL}+\Delta S)L}{EA}$ می‌توانیم از طریق

$$\delta = \frac{(50\times 1000)(2\times 1000)}{(200\times 10^3)(1000)} = 0.5\,mm$$

برسمت راست جابه جا می‌شود

چون دیگر بخش فشاری مقاومتی ندارد.

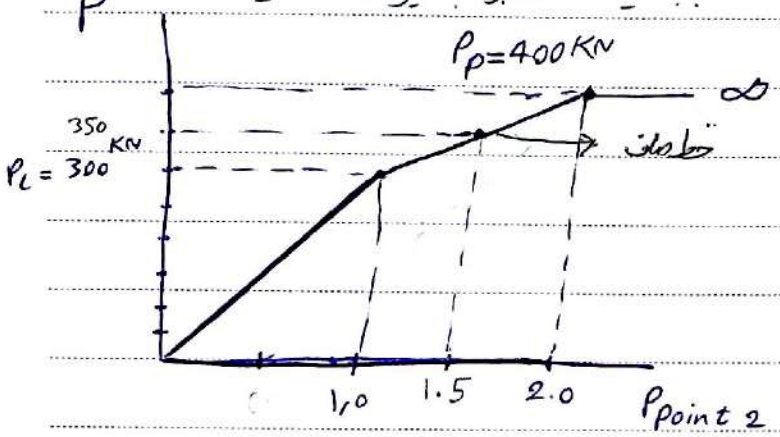
PAPCO

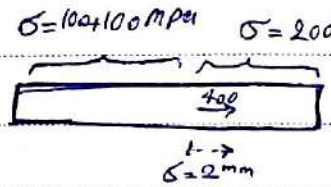
Subject:

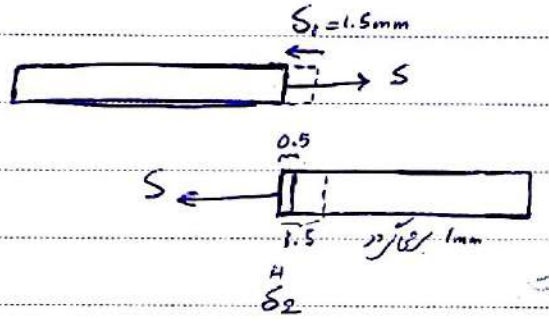
Year. Month. Date. ( )

اگر بار ما برابر 400 کرد:

جابه جایی نقطه ی ② برحسب نیروی P وارده به صفحه





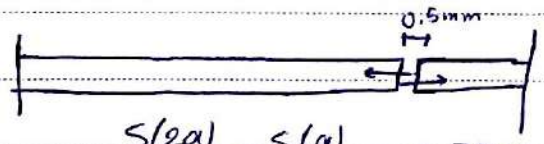


درصورت باربرداری (از 350KN به صفر) 0.5 mm فضای خالی ایجاد می شود. (درصورت جدا در نظر گرفتن دو بخش) بخش کشسانی کامل برمی گردد چرا که فنر در منطقه ی الاستیک خود است ولی بخش مقاومت کامل برنمی گردد چون وارد بخش پلاستیک شده است

معادله سازگاری

$$\delta_1+\delta_2=0.5\ mm$$

پس درصورت برداشت (باربرداری) تنش ها این (تنش های پسماند) باقی می ماند.

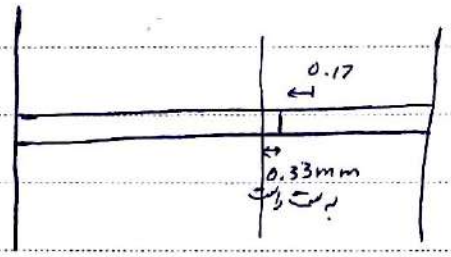


وقت شود که نیروهای داخلی

$$\frac{S(2a)}{EA}+\frac{S(a)}{EA}=0.5^{mm}$$

$$\frac{3Sa}{EA}=0.5^{mm}$$

$$S=\frac{(0.5)^{mm}(200\times10^3)(1000)}{(3)(1000)}=\frac{100\times10^3}{3}=33.3^{KN}\ ;\ \sigma=33.3^{MPa}$$

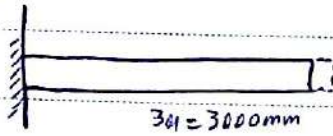


$$\delta_2=\frac{(33.3\times10^3)(2000)}{(200\times10^3)(1000)}=0.33\ mm$$

بخش کشسانی، 0.33 برمیگردد راست و بخش مقاومت کامل باقی میماند 0.5 را به سمت چپ حرکت می کند.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

سیال حرارتی



در حالت ساده ممکن در صورت افزایش حرارت تنشی ایجاد نمی شود.

افزایش در حرارت

$\delta = \alpha . T . L$

حال اگر جسم بین دو تکیه گاه صلب قرار داشته باشد و تحت اثر گرما قرار گیرد:



در این حالت نیروی باید به وجود آید که اثر این تنش ایجاد شده را خنثی کند.

$\alpha = 10^{-5}/^{\circ}C \quad E = 200\ GPa \quad A = 1000\ mm^2 \quad \sigma_{yp} = 200\ mpa$

تکیه گاه برای جبران میزان افزایش طولی که میله بر اثر گرما باید پیدا کند، به میله نیرو اعمال می کند.

$$\alpha . T . (3m) = \delta = \frac{R . (3m)}{EA}$$

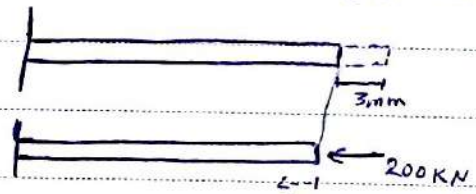
$$R = \alpha . E . A . T$$

$$\sigma = \alpha . E . T$$

$$= (10^{-5})(2 \times 10^{5})(100) = 200\ mpa$$

$$\delta = (10^{-5})(100)(3000) = 3\ mm$$

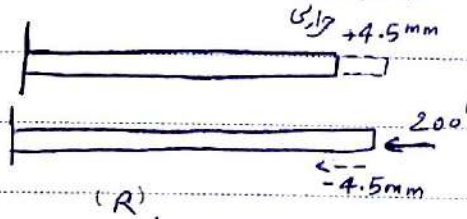
یعنی در واقع 3mm افزایش طول در اثر حرارت ← 3mm اثر کاهش طول در اثر نیرو



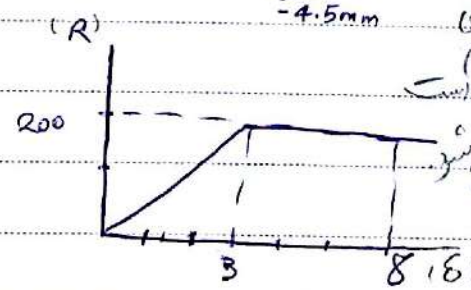
$S_{mm} = \sigma_{yp} \times A = 200 \times 10^{6} \times 1000 \times 10^{-6} = 200\ KN$ چون

اگر 150° گرم می کردیم (نیروی 200 نمی تواند بیشتر نشود.)

$\delta = \alpha T L = (10^{-5})(150)(3000) = 4.5\ mm$



میله نمی تواند نیروی بیشتر از 200KN را تحمل کند. (کمتر از افزایش دمای 100°C حاصل می شود.)



وقتی افزایش دما به میزان 150° می رسد، میله وارد بخش پلاستیک مشخص شده است

بنابراین با اعمال نیروی 200KN، تکیه گاه می تواند مانع افزایش طول میله شود

(به نوعی پیش از دمای 100°C که میله به بار حد الاستیک خود می رسد)

دمای جسم هر چقدر هم که بیشتر افزایش پیدا کند با اعمال همان نیروی 200KN

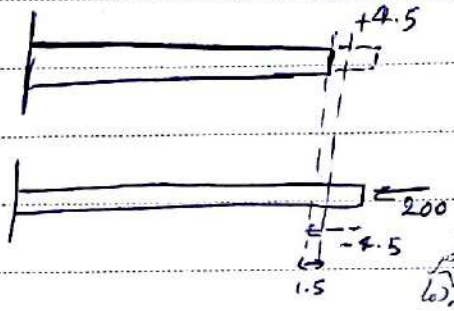
تکیه گاه می تواند مانع افزایش طول حاصله شود.)

PAPCO

Subject:

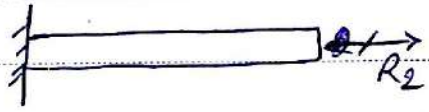
Year. Month. Date. ( )

اگر از 100° سرد کنیم به صورت الاستیک برگشت کرده و اگر از 150° سرد کنیم مقدار $1.5mm$ برگشت کرد.



پس با به کار بردن نیروی کمتر تا $1.5mm$ کوتاه شود (غ)

چون با افزایش دما نمی‌خواست $4.5mm$ از این طول پیدا کند با همان نیرو که دما می‌توانست حال کند به صفر برگشته است با به $3mm$ بقیه‌اش الاستیک خود را برگرداند.



$$\frac{R_2(30)}{EA} = 1.5^{mm}$$

$$R_2 = \frac{(1.5)^{mm}(200\times10^3)(1000)}{(3)(1000)} = 100\times10^3 N$$

$T=0 \rightarrow 150 \rightarrow 0$ $\begin{cases} R_2 = 100\,KN \\ \sigma = +100\,mpa \end{cases}$ (فشاری)

$T: 0 \rightarrow 200^\alpha \rightarrow 0$ $\quad \sigma = ? = -200\,mpa$

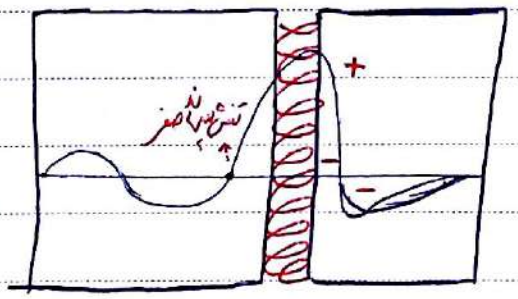
* اگر میله‌ای گرم شده است فشاری در آن به وجود می‌آید که اگر بخواهیم آن را سرد کنیم به اندازه‌ی ΔT باید کشش طول پیدا کند تا کرنش‌ها پس بدهد به میزان الاستیک خود از این طول پیدا کند.

* برای پیدا کردن میزان طول الاستیک میله باید دمایی را که باعث به حد الاستیک رسیدن میله شود یافته و در ΔT قرار دهیم

جوش weld



Butt weld جوش لب به لب



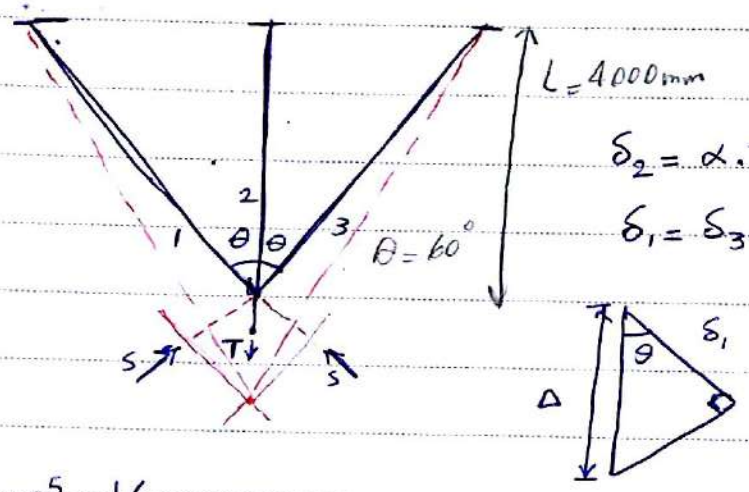
تغییرات تنش پسماند در جوش

Subject :

Year . Month . Date :

در حرارت پایین دیگر میله به دیوار برخورد نمی‌کند و در اثر افزایش دما به خاطر تنش ناشی از افزایش طول (انبساط) دچار تنش می‌شود.

در حالت جدا:



آزمیده به هم وصل نبودند.

$\delta_2 = \alpha . T . L$

$\delta_1 = \delta_3 = \alpha . T . \frac{L}{\cos\theta}$

$\Delta = \frac{\delta_1 = \delta_3}{\cos\theta} = \alpha . T . \frac{L}{\cos^2\theta}$

$\alpha = 10^{-5}\ 1/^\circ C$

$L = 4000\ mm$

$T = 100^\circ C$

$\theta = 60^\circ C$

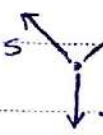
$\delta_2 = \alpha . T . L = 10^{-5} \times 100 \times 4000 = 4^{mm}$

$\delta_1 = \delta_3 = 8\ mm$

$\Delta = 16^{mm}$

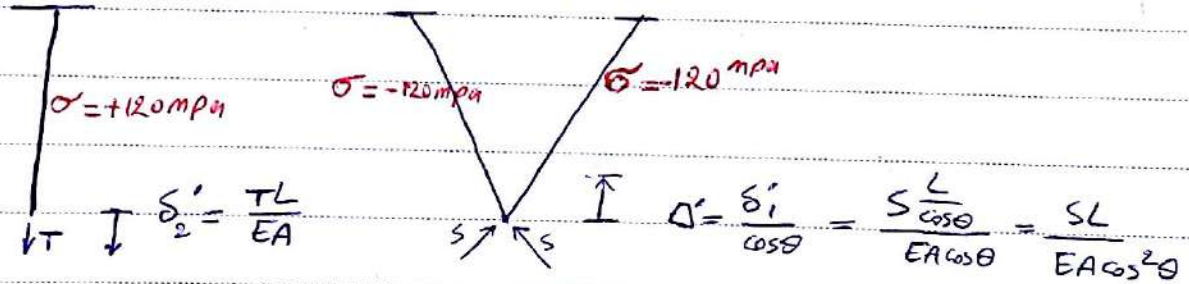
میله‌ی وسط فقط 4mm پایین آمده

تعادل



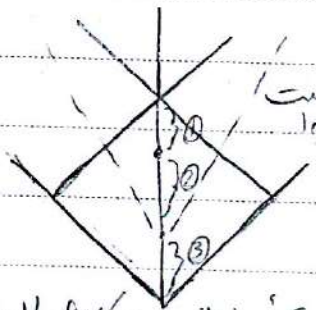
$2S\cos\theta = T$

$\boxed{S = T}$



$\delta_2' = \frac{TL}{EA}$

$\Delta' = \frac{\delta_1'}{\cos\theta} = \frac{S\frac{L}{\cos\theta}}{EA\cos\theta} = \frac{SL}{EA\cos^2\theta}$



① جسمی که به خاطر افزایش دما میله را فشرده است

② جسمی که به خاطر ایجاد نیروی T میله را از طول داده است

③ جسمی که میله‌ی 3 در راستای قائم به خاطر نیروی S کاهش طول داده‌اند.

$\frac{T.L}{EA} + \frac{SL}{EA\cos^2\theta} = \Delta - \delta_2$

$\frac{TL}{EA}\left(1 + \frac{1}{\cos^2\theta}\right) = 12^{mm}$

$T = \frac{(12)(200\times10^3)(1000)}{(5)(4000)}$

$T = 120\times10^3 N$

$S = 120\ KN$

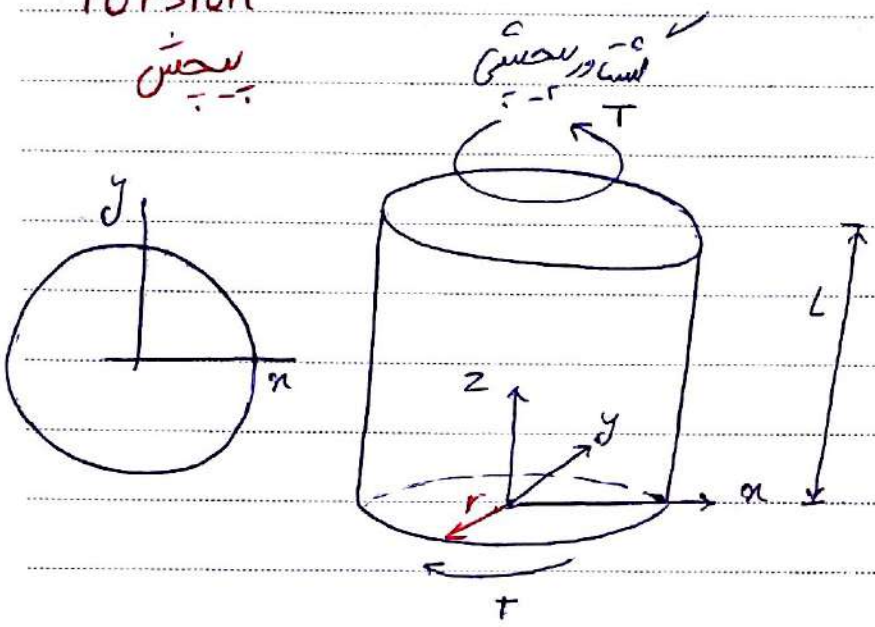
Subject:

Year. Month. Date. ( )

Torsion

پیچش

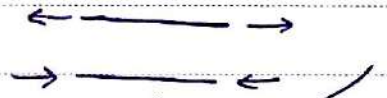
استاتیک پیچشی



۱. شفت مدور منشوری

prismatic circular Bar

۱- نیروهای محوری Axial load

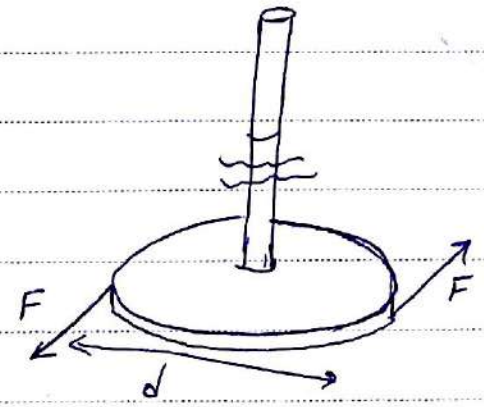


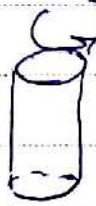
با فرض نیرو در مرکز سطح اثر کرده است

$$\sigma = \frac{N}{A}$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{EA}$$

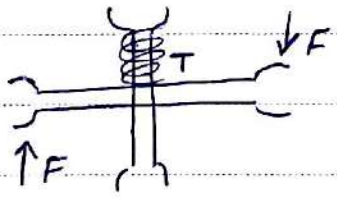
حالت بعد: دوران با اثر ترکیب پیچش و فشاری برخلاف تنش σ که به هندسه بستگی ندارد، شکل متقاطع در پیچش مهم و موثر است.





نیروی داخلی از نوع T

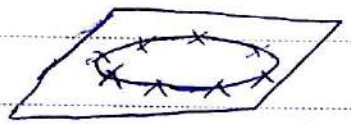
طراحان دو نیروی F صرف است اما ایجاد کشتاور کوپل می کنند



Subject:
Year. Month. Date. ( )

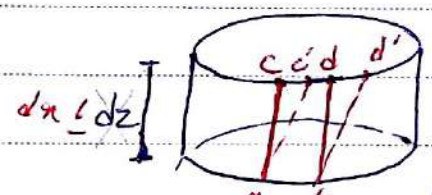
* ۷ ابتدا شعاع هایی را بررسی می کنیم که دارای سطح مقطع دایره باشند.
در صورت پیچش سطح مقطع دایره‌ای، هم چنان دایره می ماند (اثبات ریاضی ندارد و براساس آزمایش)

* فرضیات
دراثر پیچش 1 مقطع دایره، دایره باقی می ماند
2 شعاع دایره، ثابت باقی می ماند
3 مقطع مسطح، مسطح باقی ماند (سطح مقطع در صفحه خود باقی می ماند و اعوجاج پیدا نمی کند)
4 جابجایی در طول شفت وجود ندارد.

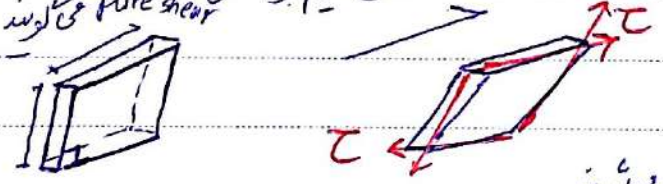


* در واقع صفحه مثل صفحه‌ای صلب حول محور z می چرخد. هر نقطه‌ای حول محور z می چرخد و شعاع آن نقطه و ارتفاع آن نقطه تغییر نمی کند.

* اگر جسمی از شفت را در نظر بگیریم:
slice
اگر علامت ها را قبل از بارگذاری گذاشته باشیم:
ارتفاع این المان را در نظر می گیریم

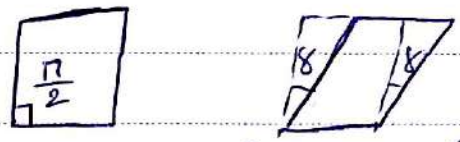


به این حالت بارگذاری که فقط تنش برشی و سطح مقطع داریم برش خالص یا pure shear می گویند.



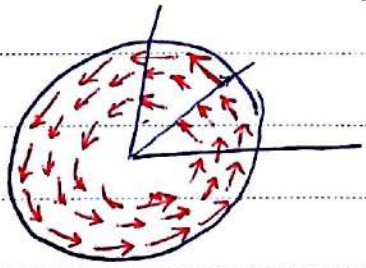
pure shear
برش خالص، تنها تنش‌های داخلی که بر المان اثر می کنند تنش‌های برشی هستند.

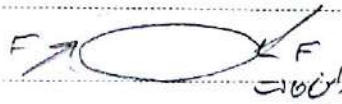
* تنش های برشی
به صورت شفت اثر کرده که
در گوشه ها به هم نزدیک شده و باز هم اورتی می شوند
و باعث کرنش زاویه‌ای γ می شوند



* تنش برشی در جهت عمود بر شعاع است
سطح مقطع
سطح مقطع

چون در غیر این صورت باعث افزایش گشتاور شعاعی می شود که خلاف فرضیات ماست.

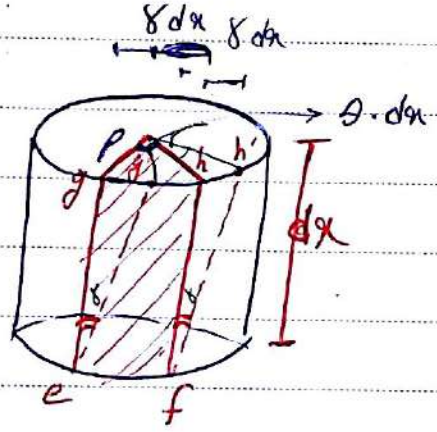


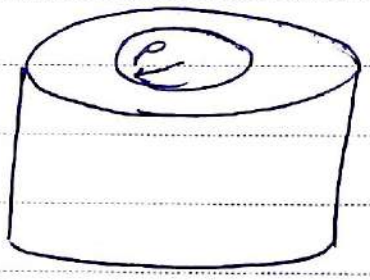


در این حالت هم مثل حالت ← تنش برشی داریم

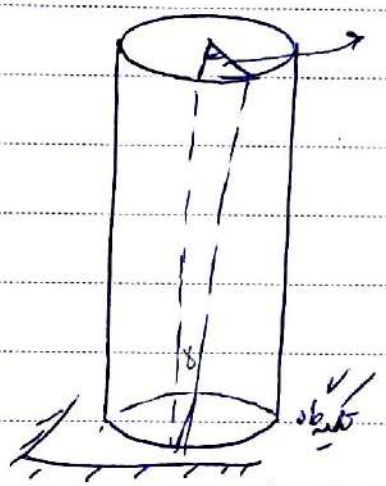
Subject:
Year. Month. Date. ( )

برای تعیین رابطه‌ی این تنش و تغییر شکل برشی نخستی از نفت را در نظر می‌گیریم:





زاویه پیچش (ϕ) مقدار دوران صفحه مورد نظر نسبت به مبدا



زاویه پیچش در واحد طول $\frac{d\phi}{dx} = \theta$ که از ارتفاع المان یک مقدار ثابت

$$gg' = hh' = \rho(\theta \cdot dx) = \gamma \cdot dx$$

$$\gamma = \rho \cdot \theta$$

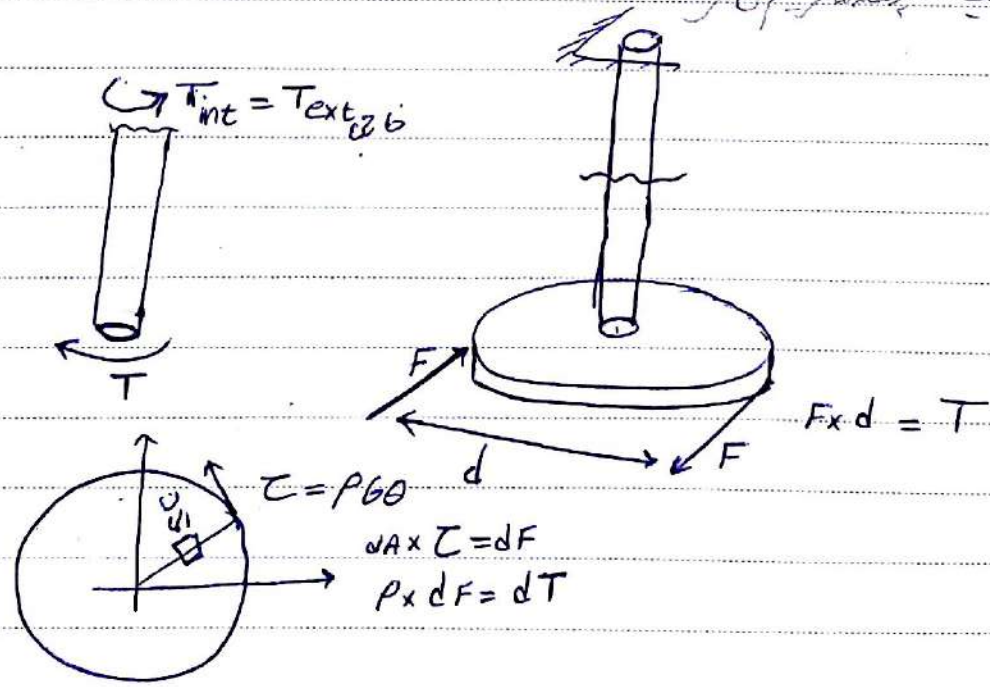
θ: ضریب لاستیسیته در برش

رابطه‌ی تنش برشی و شعاع

$$\tau = G \cdot \gamma = G\theta\rho$$

در پوسته‌ی بیرونی تنش ماکزیمم است (محل اختمال شکست)

تنش برشی در تمام نقاط صفحه مقطع عمود بر محور میله وجود دارد و هر چه به پوسته نزدیک‌تر شویم تنش برشی افزایش پیدا می‌کند تا در نهایت در پوسته ماکزیمم می‌گردد.



Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$T = \int \rho \cdot \tau \cdot dA$$
$$= \int G\theta\rho^2 dA$$
$$= G\theta \int \rho^2 dA \; J$$

$$I_{xx} = \int y^2 dA \Big\} = \frac{\pi d^4}{64}$$
$$I_{yy} = \int x^2 dA \Big\}$$
$$I_p = I_{xx} + I_{yy} = \int \rho^2 dA = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}$$

$$J = I_p$$

$$T = GJ\theta \rightarrow G\theta = \frac{T}{J}$$

ج به صورت خطی تغییر می کند هم

$$\tau = G\theta\rho = \frac{T\rho}{J}$$

$$\begin{cases} \tau = \frac{T\rho}{J} < \tau_{max} = \frac{T \cdot r}{J} \\ \theta = \frac{T}{GJ} \end{cases}$$

در مرکز $\tau = 0$

وقت شود، T که در داخل فرمول تنش برشی برگاری رود، گشتاور پیچشی داخلی است.

$$\phi = \int \theta \cdot dx = \int \frac{T \cdot dx}{GJ}$$

قطر ثابت

Axial

$$\sigma = \frac{N}{A}$$
$$\delta = \int \frac{N dx}{EA} \rightarrow$$

سختی کشش / فشاری

Torsion

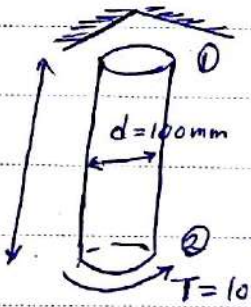
$$\tau = \frac{T\rho}{J}$$

وقت شود که براساس فرمول $\phi = \int \frac{T dx}{GJ}$، زاویه ϕ برحسب رادیان بدست می آید

$$\phi = \int \theta \cdot dx = \int \frac{T \cdot dx}{GJ} \rightarrow$$

سختی پیچشی

مثال



$G = 70\ MPa$

$\tau_{max} = ?$

$\phi = ?$

P4PCO

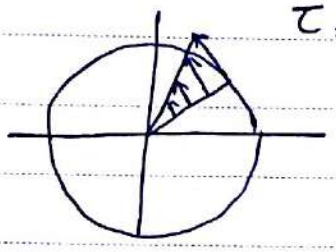
Subject:

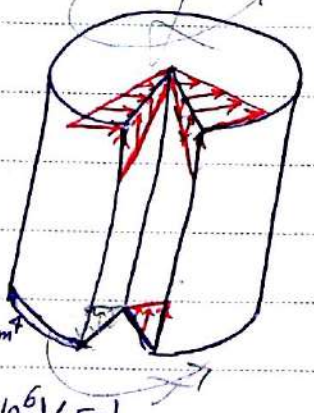
Year. Month. Date. ( )

تنش برشی ماکزیمم در روی پوسته رخ می دهد.

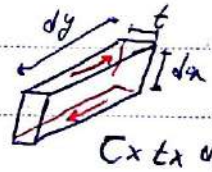
تنش برشی بصورت خطی و بصورت محور بین اثر می کند.

$$\tau = \frac{TP}{J}$$





(برای مواد نرم مثل آلومینیوم برش به شکل صاف و برای مواد ترد مثل گچ برش با زاویه 45° رخ می دهد)



$C \times t_x \times dy \times d\alpha$

$$J = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi (100)^4}{32} = 9.81 \times 10^6 \, mm^4$$

$$\tau_{max} = \frac{T \cdot \rho_{max}}{J} = \frac{(1000 \times 10^6)(50)}{9.81 \times 10^6}$$

$$\tau_{max} = 509 \, MPa$$

$$\phi = \int \frac{T\,dx}{GJ} = \frac{TL}{GJ} = \frac{(100 \times 10^6)(1000)}{(70 \times 10^3)(9.81 \times 10^6)} = 0.145 \, rad = 8.1^\circ$$

(N.mm)

هدف ما در پیچش یافتن رابطه‌ی نیروی داخلی و تنش است. پس با استفاده از نیروی خارجی نیروی داخلی را بدست آورده، و سپس از طریق آن تنش را بدست می آوریم.

بار خارجی ← نیروی داخلی $\propto$ تنش

(رابطه)

$$\tau = \frac{TP}{J}$$

دایره‌ای، مشوری

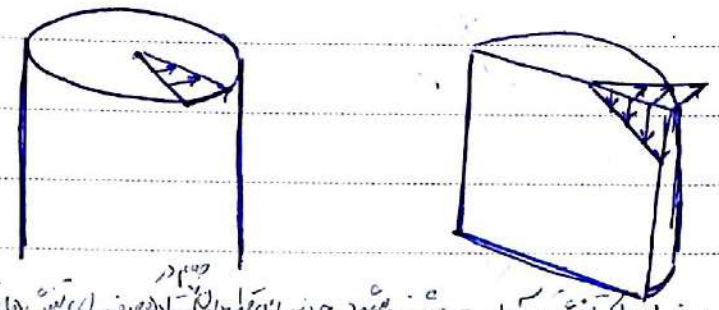
ممان اینرسی قطبی $J = \int \rho^2 dA = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi R^4}{2}$

در پیچش از طریق نیروی خارجی، نیروی داخلی را محاسبه کرده و از طریق نیروی داخلی تنش را محاسبه می کنیم.

* در پیچش از طریق گشتاور خارجی، گشتاور داخلی را بدست می آوریم. سپس از طریق گشتاور داخلی تنش برشی را بدست می آوریم. هم چنین از طریق گشتاور داخلی، θ که زاویه‌ی پیچش در واحد طول است را هم محاسبه می کنیم و در نهایت از طریق θ، زاویه‌ی پیچش ϕ را برای قسمت بدست آورده و برای بدست آوردن زاویه‌ی پیچش کل، زاویه‌ی پیچش تک قسمت‌های بین محل‌های اثر گشتاور خارجی را با هم جمع می کنیم.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

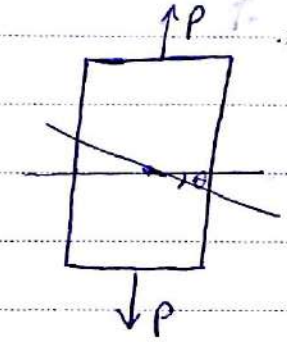
* در روی پوسته تنش صفر است. تنش در واقع درون جسم و روی سطح مقطع است.



برای داشتن تنش باید صفحه‌ای را که تنش در آن است مشخص شود. چون به ازای هر صفحه‌ای که از یک نقطه عبور کنیم تنش‌های قائم و برشی متفاوتی روی آن صفحه وجود دارد

* اگر به ما مقدار تنش را در نقطه‌ای بدهند، بی‌معناست. باید به ما صفحه‌ای که تنش در آن است را هم بدهند

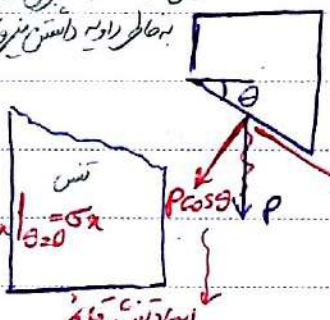
برای جسمی که به طور قائم کشیده می‌شود، شکست حتماً به صورت صاف و قائم اتفاق نمی‌افتد.



وقتی که صفحه‌ی برش را با زاویه‌ی θ بر جسمی که تحت کشش از دو نیرو است قرار می‌دهیم، به طور کلی دو تنش قائم و برشی ایجاد می‌شود.

به طور کلی باید سطح مقطع ایجاد شده در دو تنش قائم و برشی را بدانیم.

$$\sigma_x = \frac{P}{A_x}$$



$$\begin{cases} \sigma_\theta = \sigma_x \cdot \cos^2\theta \rightarrow (\sigma_\theta)_{max}\big|_{\theta=0} = \sigma_x \\ \tau_\theta = \sigma_x \cdot \sin\theta\cos\theta \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2}\sigma_x \sin 2\theta$$

$$(\tau_\theta)_{max}\Big|_{\theta=\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\sigma_x$$

$P\cos\theta$ ایجاد تنش قائم

$P\sin\theta$

$$\tau_\theta = \frac{P\sin\theta}{\frac{A_x}{\cos\theta}}$$

$$\sigma_\theta = \frac{P\cos\theta}{A_\theta} = \frac{P\cos\theta}{\frac{A_x}{\cos\theta}}$$

تنش قائم در صفحه θ

برای حالت کشش و فشار تک محوری

صفحه $\theta = 0$: $\sigma_x = \frac{P}{A_x} = \sigma_{max}$

$\tau_\theta = \frac{0}{A} = 0$

تنش برشی برابر است با نیروی برشی تقسیم بر مساحت سطح $\tau = \frac{V}{A}$

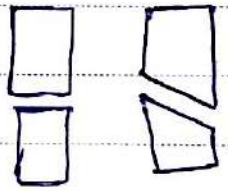
* مصالحی مثل چدن به کشش و مصالحی مثل فولاد به برش ضعیف هستند.

* صفحه ضعیف مصالح مختلف متفاوت است.

$\theta = \frac{\pi}{4}$: $\tau_\theta = \frac{1}{2}\sigma_x = \frac{1}{2}\sigma_{max} = \tau_{max}$

$\sigma_\theta = \frac{1}{2}\sigma_x$

در حالت کشش و فشار تک محوری، تنش برشی ماکزیمم که در صفحه‌ی $\theta = 45^\circ$ اتفاق می‌افتد نصف تنش قائم ماکزیمم است.



از روابط بالا نتیجه می‌شود

* دایره‌ی مور:

برای حالت کشش و فشار تک محوری

$$\begin{cases} \sigma_\theta = \sigma_x\cos^2\theta = \frac{\sigma_x}{2} + \frac{\sigma_x}{2}\cos 2\theta \\ \tau_\theta = \frac{\sigma_x}{2}\sin 2\theta \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \left(\sigma_\theta - \frac{\sigma_x}{2}\right) = \left(\frac{\sigma_x}{2}\cos 2\theta\right) \\ \tau_\theta = \frac{\sigma_x}{2}\sin 2\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\sigma_\theta - \frac{\sigma_x}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2\cos^2 2\theta \\ \tau_\theta^2 = \left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2\sin^2 2\theta \end{cases} +$$

$$\left(\sigma_\theta - \frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_\theta^2 = \left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

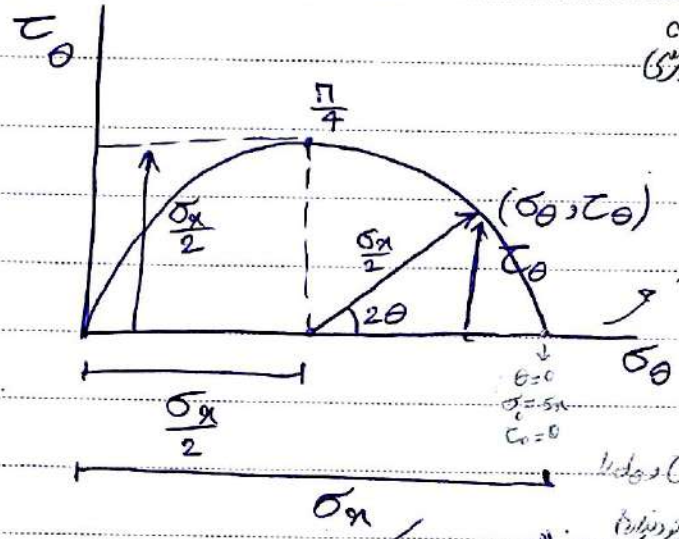
$$\left(\sigma_\theta - \frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_\theta^2 = \left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2$$

* معادله‌ی دایره‌ی مور برای حالت کشش و فشار تک محوری:

مرکز دایره: $\left(\frac{\sigma_x}{2}, 0\right)$

* هر نقطه روی این دایره نشان دهنده‌ی تنش قائم و برشی روی یک صفحه‌ی آن است

برای حالت کشش تک محوری ←

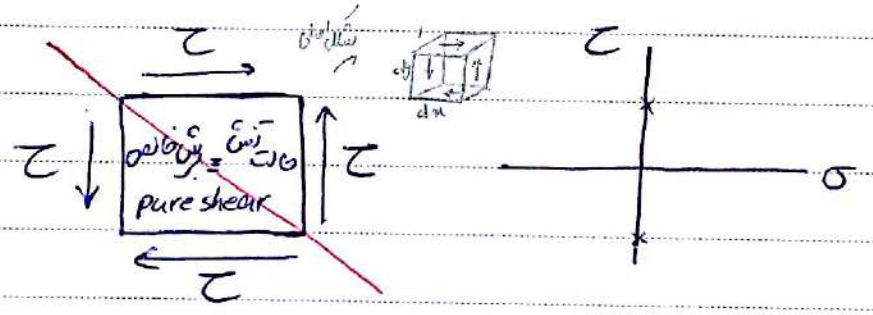


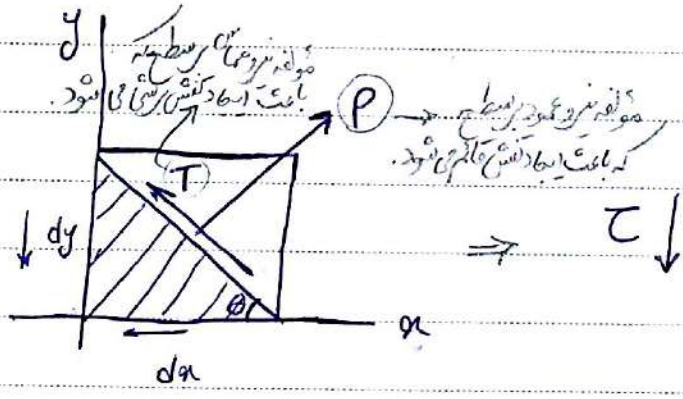
* مختصات هر نقطه در دایره‌ی مور به صورت $(\tau_\theta, \sigma_\theta)$ می‌باشد. (در دایره‌ی مور تنش قائم از محور افقی است)

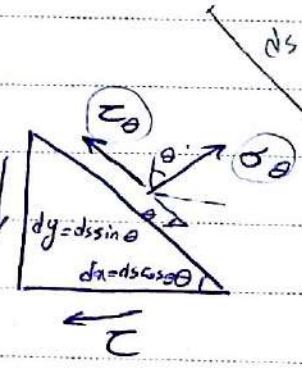
* دایره‌ی مور معمولاً در بخش مثبت رسم می‌شود.

* آن روی صفحه‌ای که به موازات محور اعمال نیروست برش برنمی‌دارد یعنی τ_θ و σ_θ با هم برابرند و مقدار آن برابر است با نیروی داخلی در روی این صفحه بر سطح مقطع

* در حالت برش خالص که تنش‌های قائم صفر هستند اگر دایره‌ی مور را رسم کنیم:







بررسی المان

طول: ds

دقت شود که این θ، با θ زاویه برش در واحد طول متفاوت است

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow -\tau \times dx \times 1 + \sigma_\theta \times ds \times 1 \times \sin\theta - \tau_\theta \times ds \times 1 \times \cos\theta = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -\tau \times dy \times 1 + \sigma_\theta \times ds \times 1 \times \cos\theta + \tau_\theta \times ds \times 1 \times \sin\theta = 0$$

این دو معادله دو مجهول τ_θ و σ_θ را با هم حل می‌کنیم تا τ_θ و σ_θ را بیابیم.

بعد از برش زدن، دارای دو نیروی برشی بر روی صفحه قائم هستیم که نیروهای داخلی حاضر در مقطع برش با این نیروهای خارجی را خنثی کنند. از نیروهای محوری بر روی دو صفحه‌ی عمود بر مقطع برش صرف نظر کردیم زیرا نیروهای داخلی باید بر روی هم عمود باشند.

PqPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\sigma_\theta \sin\theta - \tau_\theta \cos\theta = \tau\cos\theta$$

$$\sigma_\theta \cdot \cos\theta + \tau_\theta \cdot \sin\theta = \tau \cdot \sin\theta$$

$$\sigma_\theta = \frac{\begin{vmatrix} \tau\cos\theta & -\cos\theta \\ \tau\sin\theta & \sin\theta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{vmatrix}} = \tau\sin\theta\cos\theta + \tau\sin\theta\cos\theta = \tau \sin 2\theta$$

$$\tau_\theta = \frac{\begin{vmatrix} \sin\theta & \tau\cos\theta \\ \cos\theta & \tau\cos\theta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{vmatrix}} = \tau\sin^2\theta - \tau\cos^2\theta = -\tau\cos 2\theta$$

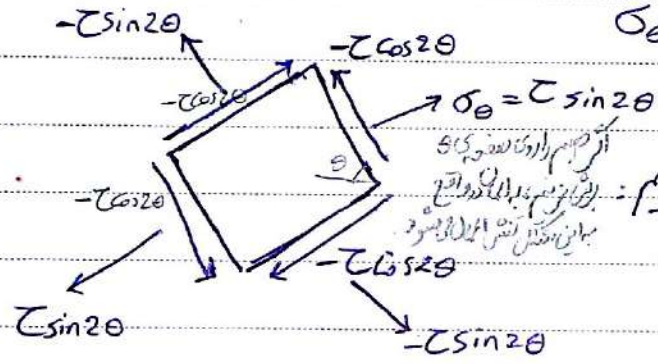
معادله دایره

$$\sigma_\theta^2 + \tau_\theta^2 = \tau^2$$

حالت برش خالص

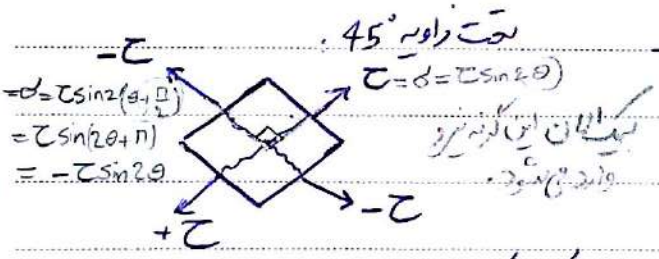
در حالت برش خالص: $\sigma_\theta = \tau \sin 2\theta$

$\tau_\theta = -\tau\cos 2\theta$



اگر جسم را روی صفحه‌ای با زاویه θ قرار دهیم و برش وارد شود، همان تنش‌ها ایجاد می‌شود

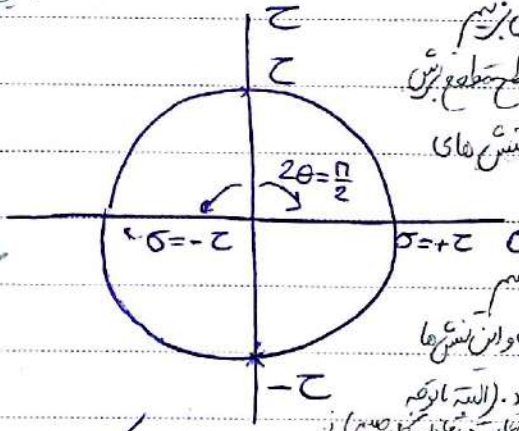
با اندازه θ چرخانده‌ایم:



تحت زاویه $45°$:

$\tau = \sigma = \tau\sin 2\theta$

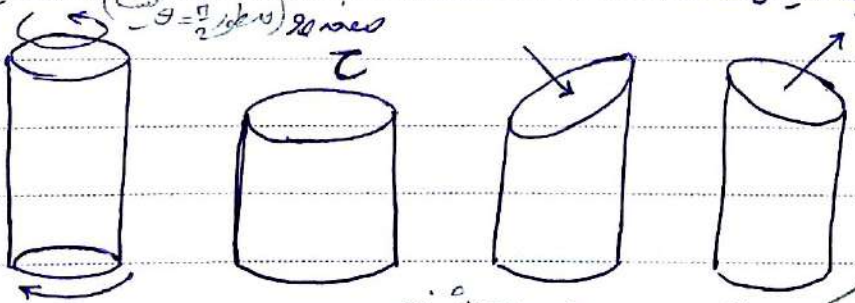
یک آن این گونه نیز واقع می‌شود.



روی هر صفحه‌ای که برش بزنیم تنش برشی و قائم روی سطح مقطع برش به وجود می‌آید. بررسی تنش‌های قائم برشی ایجاد شده روی این صفحه معادل است با بررسی جسم که به اندازه‌ی زاویه‌ی θ چرخیده و این تنش‌ها بر سطح مقطع آن وارد می‌شود. (البته با توجه به خصلت بودن τ و با توجه به خاصیت تعادل کل جسم)

تحت زاویه $45°$: حالت ماکزیمم حالت کشش خالص (بی‌آید که در صورت ضعیف بودن مصالح به کشش می‌شکنند.

به کشش خالص تحت این زوایا می‌شکنند. تحت زاویه‌ی $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ تنش قائم ماکزیمم وارد می‌شود که در صورت ضعیف بودن مصالح به کشش فشار تحت این زاویه می‌شکنند.



در حالت $\theta = \frac{\pi}{2}$، جسم در صورت ضعیف بودن نسبت به تنش‌های برشی می‌شکند.

جمع‌بندی

برای حالت برش خالص	برای حالت کشش فشار تک محوری
$\theta = 0 \rightarrow \tau_\theta = \tau$	$\theta = 0 \rightarrow \sigma_\theta = \sigma_x$
$\sigma_\theta = 0$	$\tau_\theta = 0$
$\theta = 45° \rightarrow \sigma_\theta = \tau$	$\theta = 45 \rightarrow \sigma_\theta = \frac{1}{2}\sigma_x$
$\tau_\theta = 0$	$\tau_\theta = \frac{1}{2}\sigma_x$

PaPCO

برای بررسی ماکزیمم نیرویی که جسم می تواند تحمل کند و صفحه‌ی شکست تحت اثر این نیرو، ابتدا نحوه‌ی بارگذاری یعنی کشش خشاری یا تک محوری و برش خالص را در نظر می گیریم. ماکزیمم تنش های عام و برشی را در نظر گرفته و نیرویی که جسم می تواند بر اساس آن تحمل کند را بدست می آوریم. جسم برای نیروی بدست آمده کوچکتر و تحت آن زاویه می شکند.

Subject:

Year. Month. Date. ( )

9

برای کشش و فشار

$\theta=0 : \sigma_x = \frac{P}{A}$

$\sigma = P/A$ تنش عمود — ماکزیمم → $P=180$

به ازای زاویه‌ی صفر

$\theta=45^\circ : \sigma_{45} = \frac{P}{A}\cos^2 45 = \frac{1}{2}P/A$

$\tau_{45} = \frac{P}{A}\sin 45 \cos 45 = \frac{1}{2}P/A \rightarrow P=160$

تنش برشی ماکزیمم



A ماده (شکنده)

$\tau_{all} = 80\ mpa$

$\sigma_{all} = 180$

حداکثر P؟

پس مصالح تحت زاویه 45° می شکند.

ما فقط به تنش های ماکزیمم کار داریم و کاری به مقادیر دیگر تنش ها نداریم

B

$\theta = \frac{\pi}{4} : \frac{1}{2}\frac{P}{A} = 180 \rightarrow P=360$

$\theta=0 : \frac{P}{A} = 80 \rightarrow P=80$

تحت 90 می شکند.

$\tau_{all} = 180$

$\sigma_{all} = 80$

برای پیچش

A: $\begin{cases} \tau_{all} = 80\ mpa \\ \sigma_{all} = \pm 180\ mpa \end{cases}$

$\theta=0 \quad \tau = \frac{TP}{J} \equiv T$

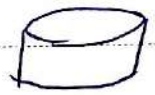
مقدار τ، که ماکزیمم بشه بدست آمد.

پس ماده‌ی A در حالت برشی که ضعیف تر است می شکند

$\theta = \frac{\pi}{4} : \quad \sigma = \tau = T$

$\theta = -\frac{\pi}{4} \quad \sigma = -\tau$

در حالت پیچش روی زاویه 90 می شکند.

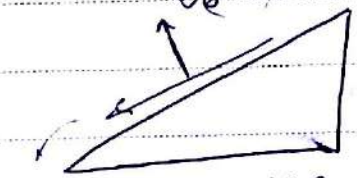


B: $\begin{cases} \tau_{all} = 180\ mpa \\ \sigma_{all} = \pm 80 \end{cases}$

$\sigma \equiv 80$

در حالت پیچش تحت زاویه 45° می شکند.

$\sigma_{\theta+\frac{\pi}{2}} = \tau \sin(2\theta+\pi) = -\tau \sin 2\theta$

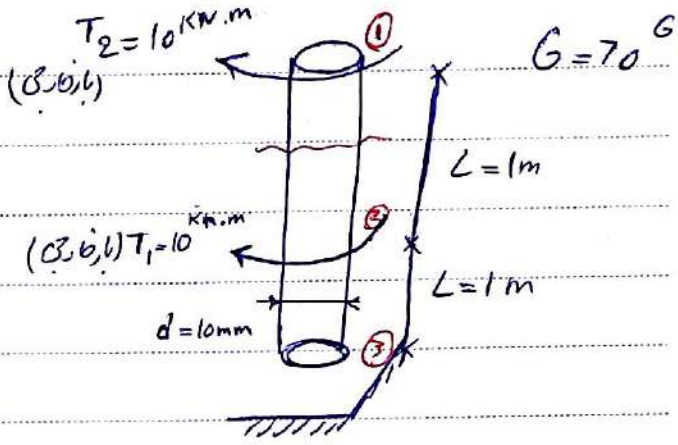


$\tau_{\theta+\frac{\pi}{2}} = -\tau\cos(2\theta+\pi) = \tau\cos 2\theta$

در صورتی که برمیله، چند T مختلف در چند جهت وارد شود، کافی است ϕ هر قسمت را برابر T_{int} آن قسمت بدست آوریم و در نهایت با توجه به این که ϕ هر قسمت در جهت T_{int} آن قسمت است، جهت مثبت و منفی برای T ها در نظر گرفته و به ϕ ها نیز علامت بدهیم.

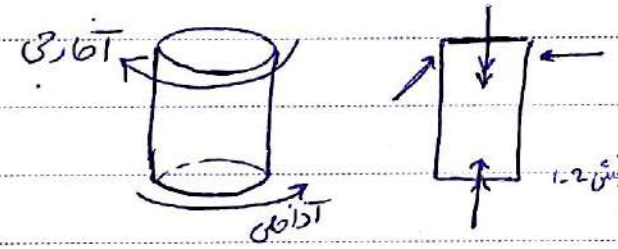
Subject:

Year. Month. Date. ( )



سازه معین است، معادلات تعادل برای تعیین نیروهای داخلی کافی است.
وظیفه ی نیروی داخلی ممانعت از حرکت جزیی نسبت به جزء دیگر از جسم است.
در جسم 6 درجه آزادی در فضا داریم در اثر برش 6 نیروی داخلی داریم.

در 1-2 برش می زنیم
از بالا برش می زنیم تا لازم نباشد نیروهای تکیه گاهی را حساب کنیم.

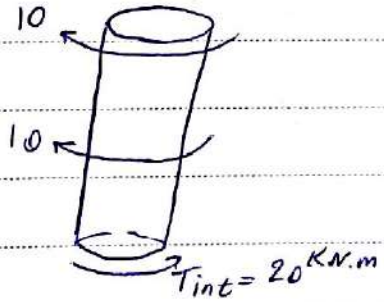


$$\sum T_{xx} = 0$$
$$T_{int} = T_{ext}$$
$$T_{int} = 10^{K.m}$$

$$\tau = \frac{T\rho}{J}$$
$$\tau_{max} = \frac{T\frac{d}{2}}{\frac{\pi d^4}{32}} = \frac{16T}{\pi d^3}$$

برای 2-3 برش می زنیم:

$$\tau_{max} = \frac{16\times 10\times 10^6\ N.mm}{\pi\times 10^3\ mm^3} \simeq 40,000\ mpa$$



$$\tau_{max} = \frac{16\times 20\times 10^6}{\pi\times 10^3} \simeq 80,000\ ^{mpa}$$

در فاصله ی بین 1-2:

$$\theta_{1-2} = \frac{T}{GJ} = \frac{10\times 10^6\ N.mm}{60\times 10^3\ \frac{N}{mm^2}\times \frac{\pi\times 10^4}{32}} \simeq \frac{1}{3}\ rad/mm$$

برای شفت یک سر درگیر، زاویه پیچش سر آزاد برابر جمع زوایای پیچش قسمت های بین محل های اعمال گشتاور خارجی است.

$$\theta_{2-3} = \frac{T}{GJ} = \frac{20\times 10^6}{60\times 10^3\times \frac{\pi\times 10^4}{32}} \simeq \frac{2}{3}\ rad/mm$$

$$\phi_{1/2} = \int_{x=1000}^{x=2000} \theta_{1-2}\,dx = 333.3\ rad$$

$$\phi_{2/3} = \int_{0}^{x=1000} \theta_{2-3}\,dx = 666.7\ rad$$

$$\phi_1 = 1000\ rad$$

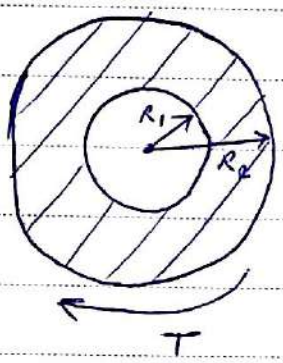
PAPCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

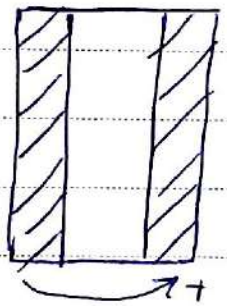
Hollow shaft

* روابط سابق هم چنان برقرار هستند فقط J تغییر کرده است.
* لوله‌ی توخالی نسبت به لوله‌ی توپر هم‌سان دارای J کمتری است.
* کاهش J باعث افزایش θ و در نتیجه افزایش γ می‌شود.

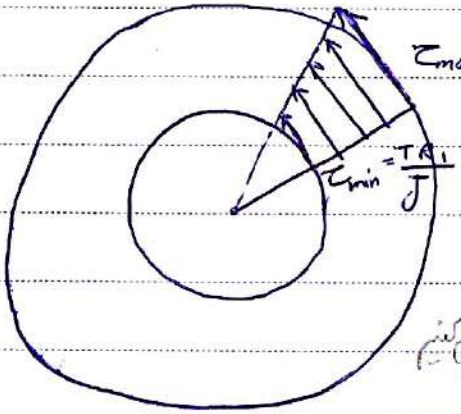


$$J = \int \rho^2 dA = \int_{\rho=R_1}^{R_2}\int_{\theta=0}^{2\pi} \rho^3 d\rho\, d\theta = 2\pi\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_{R_1}^{R_2}$$

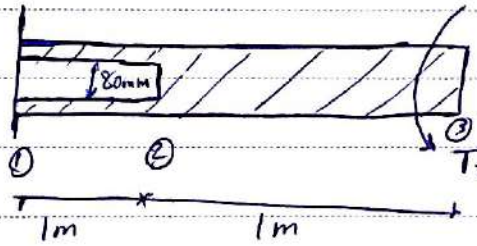
$$= \frac{\pi(R_2^4 - R_1^4)}{2}$$



$$J = \frac{\pi(d_2^4 - d_1^4)}{32}$$



* در لوله‌ها، تنش برشی حداقل به جای مرز، دارای مقدار $\frac{TR_1}{J}$ است.
* اگر در یک لوله‌ی توپر، بخشی از لوله را خارج کنیم و آن را به لوله‌ای توخالی تبدیل کنیم تنش برشی ماکزیمم (τ_{max}) افزایش می‌یابد. (چون J کاهش یافته است.)



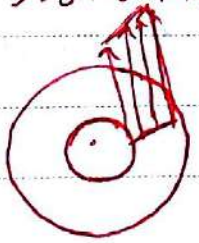
$$J_1 = \frac{\pi(100^4 - 80^4)}{32} \qquad J_2 = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi \cdot 100^4}{32}$$

$$J_1 = 5796247\ mm^4 \simeq 5.8\times10^6\ mm^4 \qquad J_2 = 9817477 \simeq 9.8\times10^6\ mm^4$$

برای کل مسئله $T_{in\ t} = 10^{KN.m}$

(رفتیم) بررسی تنش برشی ماکزیمم به تیر و توخالی بودن لوله توجه شود.

حتی الامکان J ها قبل از جایگذاری عدد ساده شوند.



بین نقطه‌ی ① و ②

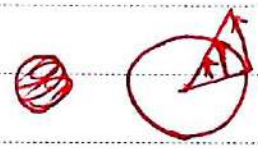
$$\tau_{max} = \frac{T\,d/2}{J_1} = \frac{(10\times10^6)(50)}{5.8\times10^6} = 86.20\ mpa$$

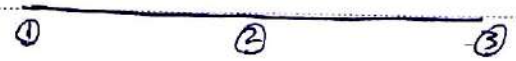
Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\tau_{max} = \frac{T d_2/2}{J_2} = \frac{(10\times10^6)(50)}{9.8\times10^6} = 51.2\ mpa$$

بین قسمت ② و ③

$$\tau_{min} = \frac{T \cdot d_1/2}{J} = \frac{(10\times10^6)(40)}{5.8\times10^6} = 68.96\ mpa$$





$\phi_3 = 0.0391\ rad$

$$\theta_{1-2} = \frac{T}{GJ_1} = \frac{10\times10^6}{70\times10^3\times5.8\times10^6} = 2.46\times10^{-5}\ rad/mm$$

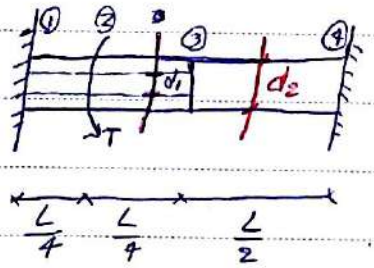
$$\theta_{2-3} = \frac{T}{GJ_2} = \frac{10\times10^6}{70\times10^3\times9.8\times10^6} = 1.45\times10^{-5}\ rad/mm$$

$$\phi_2 = \phi_{2/1} = \int_0^{1000mm} \theta_{1-2}\,dx = 0.0246\ rad$$

$$\phi_{3/2} = \int_{1000}^{2000} \theta_{2-3}\,dx = 0.0145\ rad$$

$\phi_1 = 0 \qquad \phi_2 = 0.0246 \qquad \phi_3 = 0.0391$

شفت پله‌ای

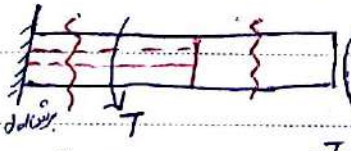


اگر شفت نامعین باشد یعنی تعداد مجهولات از معادلات سازگاری بیشتر باشد برای تبدیل T_{int} رابطه سازگاری بدست آورید.

$$\tau = \frac{T_{int}\rho}{J}$$

$$\phi_{i/0} = \int_0^i d\theta = \int_0^i \frac{T_{int}}{GJ}dx$$

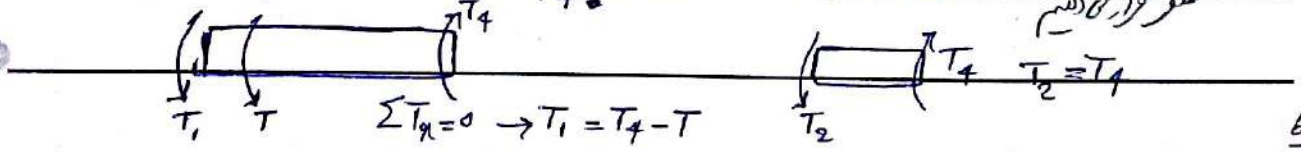
تکیه گاه را حذف کرده و به جای آن گشتاور مجهول قرار می‌دهیم.



$\phi_{4/0} = 0$

معادله سازگاری

قسمت جایی که آزاد است برابر صفر قرار می‌دهیم



PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\phi_4 = \phi_{4/1} = \phi_{4/3} + \phi_{3/2} + \phi_{2/1}$$

$$= \int_{1}^{4\text{ نقطه تا }4} \frac{T\,dx}{GJ}$$

$$= \frac{T_1 \cdot \frac{L}{4}}{GJ_1} + \frac{T_2 \frac{L}{4}}{GJ_1} + \frac{T_2 \frac{L}{2}}{GJ_2}$$

چون دراین سئوال، دو نیروی داخلی T_1 و T_2 را هم جهت گرفته‌ایم، ϕ آن‌ها نیز هم‌جهت و هم‌علامت هستند. داریم:

$$J_1 = \frac{\pi(d_2^4 - d_1^4)}{32}$$

$$J_2 = \frac{\pi d_2^4}{32} = \frac{3}{2} J_1$$ (فرض می‌کنیم)

ادامه:

$$= \frac{(T_4 - T)\frac{L}{4}}{GJ_1} + \frac{T_4 \frac{L}{4}}{GJ_1} + \frac{T_4 \frac{L}{2}}{GJ_2}$$

$$= \frac{T_4 L}{4GJ_1} - \frac{TL}{4GJ_1} + \frac{T_4 L}{4GJ_1} + \frac{T_4 L}{2G(\frac{3}{2}J_1)}$$

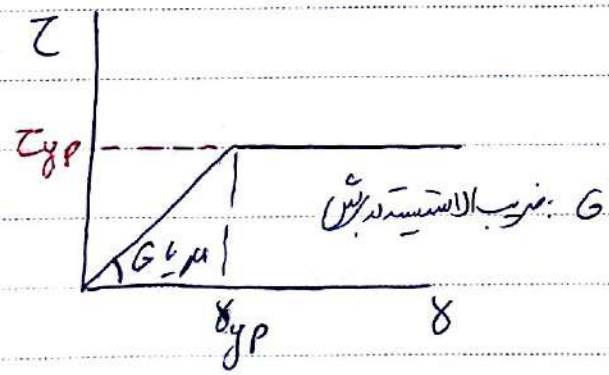
$$0 = \frac{T_4 L}{GJ_1}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right) - \frac{TL}{4GJ_1}$$

$$\frac{TL}{4GJ_1} = \frac{5T_4 L}{6GJ_1} \Rightarrow \boxed{T_4 = \frac{3}{10}T}$$

بارحد الاستیک، بارحد پلاستیک (یا بارزوال)

T_p T_y

با فرض رابطه الاستیک ـ پلاستیک کامل برای تنش ـ کرنش برشی

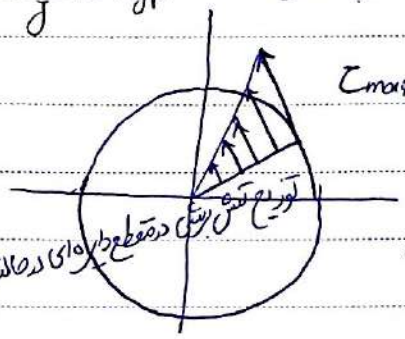


Subject:

Year. Month. Date. ( )

دربار حد الاستیک : $\tau_{max} = \frac{T\rho_{max}}{J} = \tau_{yp}$

بار حد الاستیک به باری گفته می‌شود که تنش ماکزیمم را به تنش جاری شدن می‌رساند.



$\tau_{max} = \frac{16T_y}{\pi d^3} = \tau_{yp}$

تا خود بار حد الاستیک توزیع تنش برشی به شکل خطی باقی تغییر می‌کند.

مقطع توپر $T_y = \frac{\pi d^3}{16}\tau_{yp}$

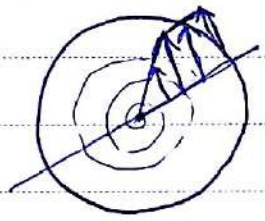
$T_y = \frac{J}{R}\tau_{yp}$

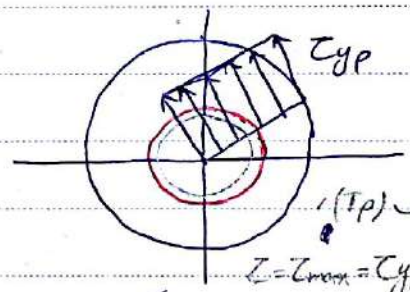
توخالی $T_y = \frac{\frac{\pi}{32}(d_2^4 - d_1^4)}{\frac{d_2}{2}}\tau_{yp}$

$= \frac{\pi}{16}\left(d_2^3 - \frac{d_1^4}{d_2}\right)\tau_{yp}$

در مقاطع توپر و توخالی در حالت تقارت تا بار حد الاستیک نیز تقارت دارد.

بعد از رسیدن به بار حد الاستیک، جسم شروع به پیچش می‌کند، لایه‌های بیرونی پلاستیک می‌شوند و بار اضافی را لایه‌های درونی تحمل می‌کنند و به مرور لایه‌ها از بیرون به درون پلاستیک می‌شوند و لحظه‌ای که تمام لایه‌ها به حالت پلاستیک رسیدند بار حد پلاستیک می‌آید.





$T = T_p$

بار حد پلاستیک.

* در لحظه‌ی رسیدن به بار حد پلاستیک (T_p)، برای تنش برشی در نقطه داریم: $\tau = \tau_{max} = \tau_{yp}$

رابطه‌ی $\tau = \frac{Tc}{J}$ فقط برای حالت الاستیک صادق است و بعد از رسیدن بار حد الاستیک دیگر صادق نیست. اما ما چنان (در حالت پلاستیک استیلی)

می‌توانیم از معادله‌ی تعادل استفاده کنیم.

برای بدست آوردن بار حد پلاستیک (T_p) یک نوار انتخاب می‌کنیم

$T_{int} = \int \tau \cdot \rho \cdot dA$ (نیروی داخلی در سطح نوار دایره‌ای) $dA = 2\pi\rho d\rho$

$= \int_{\rho=0}^{R} (\tau_{yp})(\rho)(2\pi\rho d\rho)$

$= (\tau_{yp})(2\pi)\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^R$

$$T_p = \frac{2\pi}{3}R^3\tau_{yp} = \frac{\pi d^3}{12}\tau_{yp}$$

بار حد پلاستیک برای مقطع توپر

اگر مقطع توخالی باشد حدود انتگرال متفاوت است.

PaPCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

مقطع توخالی : $T_p = \int_{R_1(\frac{d_1}{2})}^{R_2(\frac{d_2}{2})} \tau_{yp} \cdot \rho \cdot 2\pi\rho \cdot d\rho$

$= \tau_{yp} \cdot (2\pi) \cdot \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_{R_1}^{R_2}$

$$T_p = \frac{2\pi}{3}(R_2^3 - R_1^3)\tau_{yp}$$
$$= \frac{\pi}{12}(d_2^3 - d_1^3)\tau_{yp}$$

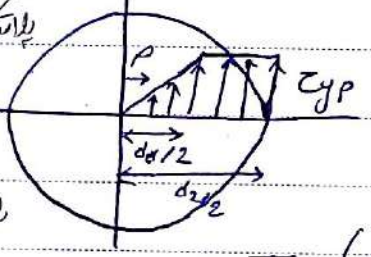
بار حد پلاستیک برای مقطع توخالی

در این حالت T نهایت چقدر است که از انتگرال بیرون آید.

در حالتی که بار خارجی (گشتاور پیچشی) این بار حد الاستیک و پلاستیک باشد، یعنی بخشی از جسم پلاستیک و بخشی الاستیک باشد.

$T_y < T < T_p$

برای بدست آوردن تنش داخلی در مقطع با تنش داخلی منطقه الاستیک و پلاستیک را جداگانه حساب و با هم جمع کنیم.



$\frac{\tau}{\tau_{yp}} = \frac{2\rho}{d_1}$

$T = \int \tau \cdot 2\pi\rho^2 d\rho$

$= \int_0^{d_1/2} (\tau_{yp}\frac{2\rho}{d_1})(2\pi\rho^2)d\rho + \int_{d_1/2}^{d_2/2} \tau_{yp} \cdot 2\pi\rho^2 d\rho$

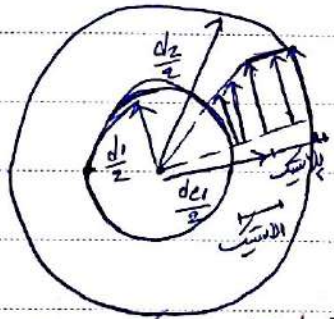
$= \frac{4\pi}{d_1}\tau_{yp}\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^{d_1/2} + \tau_{yp} \cdot 2\pi \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_{d_1}^{d_2/2}$

$$T = \frac{\pi d_{e1}^3}{16}\tau_{yp} + \frac{2\pi}{12}(d_2^3 - d_{e1}^3)\tau_{yp}$$

برای مقطع توپر زمانی که آن بین بار حد الاستیک و پلاستیک باشد

اگر $d_{e1} = 0$ باید به فرمول بار حد پلاستیک برسیم، اگر $d_{e1} = d_2$ به بار حد الاستیک می‌رسیم.

برای مقطع توخالی:



زمانی که $T_y < T < T_p$

$$T = \int_{d_1/2}^{de1/2} (\tau_{yp}\frac{2\rho}{de_1})(2\pi\rho^2)d\rho + \int_{de1/2}^{d_2/2} \tau_{yp} \cdot 2\pi\rho^2 d\rho$$

$$T = \frac{4\pi}{de_1}\tau_{yp}\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_{d_1/2}^{de1/2} + 2\pi\tau_{yp}\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_{dc1/2}^{d_2/2}$$

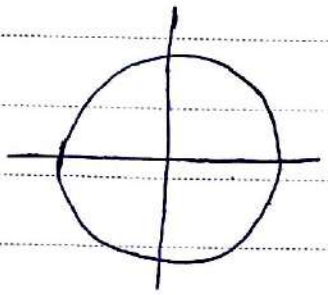
برای مقطع توخالی زمانی که $T_y < T < T_p$

$= \frac{\pi\tau_{yp}}{de_1}\left(\frac{de_1^4}{16} - \frac{d_1^4}{16}\right) + 2\pi\tau_{yp} \times \frac{1}{3}\left(\frac{d_2^3}{8} - \frac{de_1^3}{8}\right)$

PqPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال) مقطع دایره‌ای زیر را در نظر بگیرید. مصالح الاستیک ـ پلاستیک کامل است



$d_2 = d = 100^{mm}$

$\tau_{yp} = 100^{mpa}$ (Elastic-perfectly-plastic)

$T_y = ?$ $\quad G = 70^{GPa}$

$T_p = ?$

$\phi_{el} = ?$

$$T_y = \frac{\pi d^3}{16}\tau_{yp}$$

$$= \frac{(\pi)(100)^3}{16} \times 100 \quad \frac{mm^3 \cdot N/mm^2}{}$$

$$= 0.196 \times 10^8 \ N.mm$$

$$= 19.6 \times 10^6 \ N.mm = 19.6 \ KN.m$$

$$T_p = \frac{\pi d^3}{12}\tau_{yp}$$

$$= \frac{(\pi)(100)^3}{12} \times 100$$

$$= 0.25 \times 10^8 \ N.mm = 25 \ KN.m$$

حال اگر از ما توزیع تنش‌ها به ازای $T = 22^{KN.m}$ را بخواهند (که بین T_p و T_y است.)

$$\begin{cases} T = 22^{KN.m} \\ \tau = ? \end{cases}$$

توزیع تنش‌ها

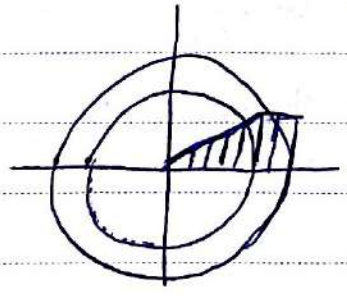
$$22 \times 10^6 = \frac{\pi}{16} d_{el}^3 \times 100 + \frac{\pi}{12}(100^3 - d_{el}^3) \times 100$$

$$22 \times 10^6 = 19.6 \, d_{el}^3 + 25 (100^3 - d_{el}^3)$$

$$5.4 \, d_{el}^3 = 3 \times 10^6$$

$$d_{el} = \sqrt[3]{\frac{3 \times 10^6}{5.4}} = 82.2^{mm}$$

به این معناکه در فاصله‌ی قطری 82.2، ناحیه الاستیک هستیم.



$$\theta_{el} = \frac{T}{GJ} = \frac{19.6 \times 10^6 \ N.mm}{70 \times 10^3 \ mpa \times \frac{\pi \times 100^4}{32}} = 2.852 \times 10^{-5} \ rad/mm$$

* زمانی که $T_y < T < T_p$ است، مرز منطقه‌ی الاستیک و پلاستیک یعنی d_{el}

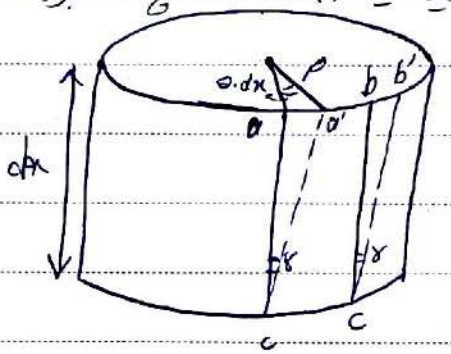
تنش برابر تنش جاری شدن است یعنی $\tau = \tau_{max} = \tau_{yp}$

Subject :

Year . Month . Date . ( )

* برای بدست آوردن θ تا بار حد الاستیک می‌توانیم از رابطه‌ی $\theta_0 = \frac{T}{GJ}$ استفاده کنیم بعد از بار حد الاستیک دیگر نمی‌توان از این رابطه برای بدست آوردن θ استفاده کرد.

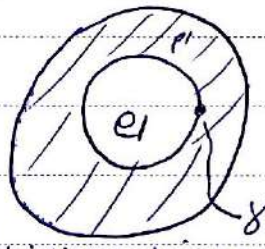
* به ازای $T_y < T < T_p$ ، θ شفت برای θ در حرز ناحیه‌ی الاستیک (رودی) است که در این ناحیه هم چنان قانون هوک $\gamma = \frac{\tau_{yp}}{G}$ برقرار است



اثبات فرمول الاستیک

$$\overline{aa'} = \rho(\theta \cdot dx) = \gamma dx$$

$$\theta = \frac{\gamma}{\rho} = \frac{\frac{\tau_{yp}}{G}}{\frac{de_1}{2}} = \frac{2\tau_{yp}}{G de_1}$$



$\theta = \frac{T}{GJ}$

$\gamma = \frac{\tau_{yp}}{G}$

$\gamma = \frac{\tau_{yp}}{G}$

برای این قسمت می‌توان از این رابطه استفاده کرد. (برای ناحیه‌ی هسته حرز می‌توان این رابطه را نوشت)

$T = 22^{KN.m}$

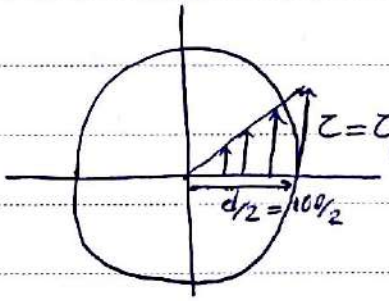
$de_1 = 82.2^{mm}$

$$\theta = \frac{\frac{100^{mPa}}{70^{GPa} \times 10^3}}{82.2/2} = \frac{20}{7 \times 82.7} \times 10^{-3} = 0.0348 \times 10^{-3}$$

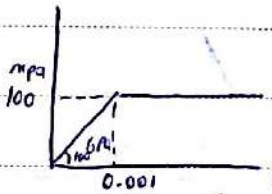
$$= 3.48 \times 10^{-5} \, rad/mm$$

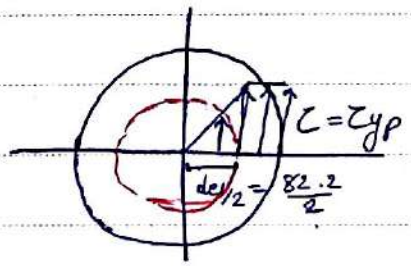
* تنها بدی این رابطه این است که به ازای $\rho = 0$ ، $\theta = \infty$ یعنی مبهم می‌شود.

بارگذاری : (Unloading)



$\tau = \tau_{yp} = 100^{mPa}$ $T = 19.6^{KN.m}$ $\theta = 0.25 \times 10^{-5} \, rad/mm$





$T = 22^{KN.m}$

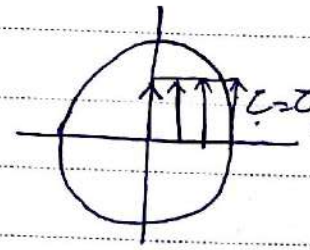
(حتی ناحیه‌ی پلاستیک نیز شسترسیده است.)

$\theta = 0.3 \times 10^{-5} \, rad/mm$

$\theta = \frac{\gamma}{de_1/2} = \frac{\tau_{yp}/G}{d_{e1}/2}$

Subject:

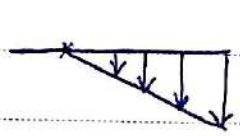
Year. Month. Date. ( )



$T = 25\ KN.m$

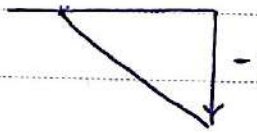
در هر کدام از سه حالت فوق اگر بارگذاری صورت گیرد، باید T صفر شود.
تنش‌های برگشتی به فرم الاستیک است. (IKL)

$-T = -19.6$



$= \begin{cases} T=0 \\ \text{مرکز} \end{cases}$ تنش‌ها صفر شدند.

$-T = -22$



$= \begin{cases} T=0 \\ 100 \quad 100 \\ 41.2 \quad 8.8 \\ -32.29 \quad -112 \\ 7.71 \quad -12 \end{cases}$

زمانی که بارگذاری از مقطع دایره‌ای صورت می‌گیرد، برای بررسی شرط تعادل در مقطع باید توزیع تنش به شکل تنش برشی (خطی) در نظر گرفت. تنش‌های قبل از بارگذاری به وجود آید که تنش‌های قبل را خنثی کند.

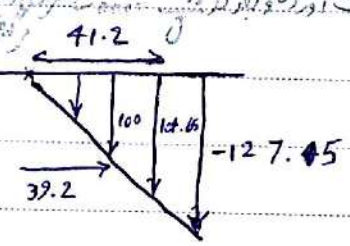
تنش پس‌ماند و بی‌بارشت (تنش‌هایی که بعد از بارگذاری باقی می‌مانند) Residual Stress

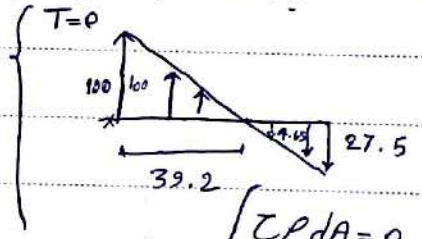
اگر انتگرال را محاسبه کنیم به دلیل تقارن باید $T=0$ شود.

$\int \tau_\rho dA = 0$

T از طرف فرمول T_{int} که $\tau_y < \tau < \tau_p$ باشد درست است و در τ_y باشد درست است و در τ_p باشد درست است.

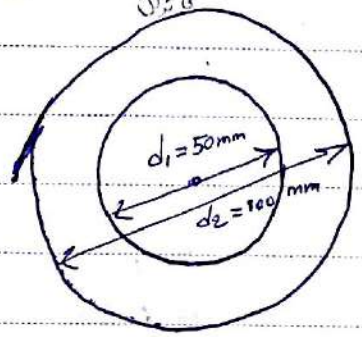
$-T = -25$





$\int \tau_\rho dA = 0$

از طریق محاسبه θ حاصل از بارگذاری ($\theta = \frac{\delta}{\rho}$) و θ بعد از بارگذاری (از طریق $\theta = \frac{T_{پس‌ماند}}{GJ}$) و برابر کردن θ اقدام به آن می‌کنیم که پس‌ماند برابر آورد.



مثال) لوله‌ی توخالی

$\tau_{yp} = 100\ mpa$

$G = 70\ GPa$

$T_y = ?\ ,\ \theta = ?$

$T_p = ?$ ← توزیع تنش پس‌ماند

$\tau(\rho) = ?$ زمانی که $T = \frac{T_y + T_p}{2}\ ,\ \theta = ?$ ایجاد می‌کند.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

رابطه‌ی تنش برشی و گشتاور پیچشی به شکل مقطع بستگی دارد.

$\tau \propto T$ نسبت به شکل مقطع بستگی

دایره $\tau = \frac{T\rho}{J}$

?

?

?

فقط τ_{max} ؟ (برای این دو چه دستی آوردیم)

open section

نازک : thin (Thickness)

closed Section

Hollow مقطع نازک بسته

در مقطع جدار نازک بسته:

می توانیم از روابط مربوط به دایره استفاده کنیم چون

(پدیده‌ی جابه‌جایی در راستای طول از پیچش: warping)

داریم:

جابه‌جایی ها در طول شعاع صفر هستند

(منظور از طول شعاع، محور شعاع است)

warping

$\tau_1 = \tau_2 = \tau_3$ ثابت

T

T

اما در مقطع جدار نازک بسته

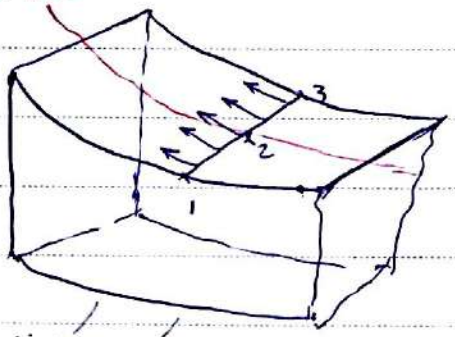
تنش در ضخامت یکسان است (به دلیل کم بودن فاصله‌ی نقاط در ضخامت و جدار)

Subject:
Year. Month. Date. ( )

در مقطع جدار نازک بسته

* اگر یک برش را در نظر بگیریم اگرچه Warping داریم اما این Warping برای تمام تارهای طولی یکسان است پس در راستای تمام محور تنش نداشته پس تنش نداریم پس خمیدگیش برشی داریم.

خط وسط
center line

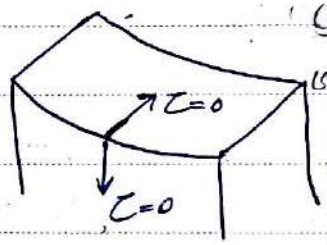


خط center line خطی است که بردوی مرکز ضخامت جدا کشیده می شود

در مقطع جدار نازک بسته

* تنش در هر نقطه باید به موازات خط مماس بر آن نقطه باشد

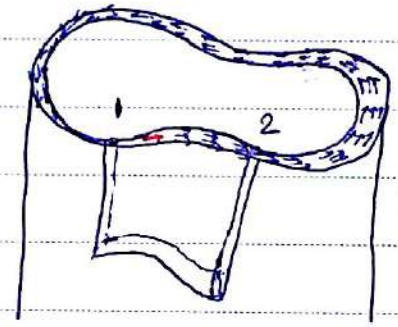
چون باید تنش برشی برای پرسته خارجی صفر باشد

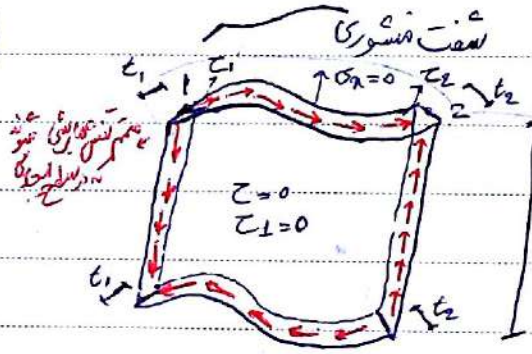


در صورت وجود تنش برشی بر روی پوسته، تغییر اندازه ی تارهای طولی و هم چنین تغییر سطح مقطع را خواهیم داشت

شعاع مشوری







کل این صحبت در یک صفحه است به شرطی که صفحه ی پایین.

اگر فرض کنیم ضخامت در نقاط مختلف، متفاوت باشد:

$$\sum F_x = 0$$

$$-\tau_1 \times t_1 \times dx + \tau_2 \times t_2 \times dx = 0$$

در مقطع جدار نازک بسته حاصلضرب تنش در ضخامت در هر نقطه از مقطع با دیگر نقاط برابر است

$$\tau_1 t_1 = \tau_2 t_2 = \dots = \text{Constant}$$

نتیجه می گیریم

جریان برش
shear flow

(مثل جریان آب در لوله که در A یکسان)

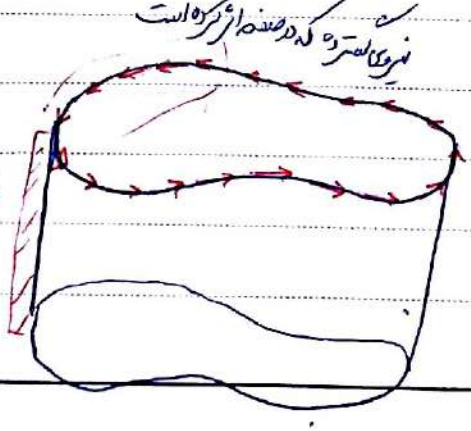
$$q_i = \tau_i t_i = \text{constant}$$

$$q_1 = q_2 = \dots$$

* جریان برش در هر نقطه مقطع جدار نازک بسته یکسان است.

برای بدست آوردن تنش برشی در مقطع جدار نازک بسته:

در این شکل ضخامت را نشان نداده ایم.



$$T_{int} = \int \tau \times \rho \times dA$$

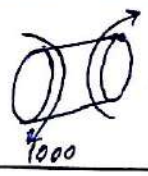
گشتاور برش

گشتاور جسم حول نقطه ای که ثابت شده است می پیچد.

و اگر به نقطه ای ثابت نشده باشد حول مرکز برش می پیچد.

P4PCO

درصورتی‌که یک گشتاور پیچشی بر روی مقطع، این گشتاور در واقع به‌شکل نیروی گسترده بر مقطع اثر می‌کند.

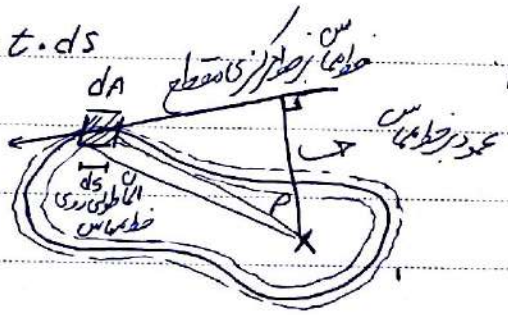


این 1000 در واقع یک نیروی گسترده است



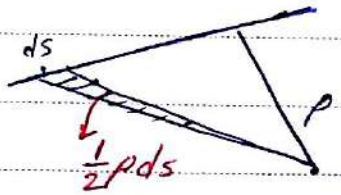
ولی در حالت کلی ما یک نقطه‌ی دلخواه را انتخاب می‌کنیم.

$dA = t \cdot ds$



$$T = \int \tau \cdot \rho \cdot t \cdot ds$$

$$= q \cdot \int \rho \cdot ds$$



$$= q(2A_m)$$

سطح محصور توسط خط‌مرکزی (c)

$\frac{1}{2}\int \rho ds = A_m$

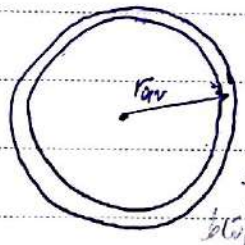
$T = q(2A_m) = (\tau_i t_i)(2A_m)$

$\Rightarrow \tau_i = \frac{T}{2t_i A_m}$

در حالت کلی

تنش برشی در هر قسمتی از مقطع جدار نازک بسته $\tau_i = \frac{T}{2 t_i A_m}$

برای دایره



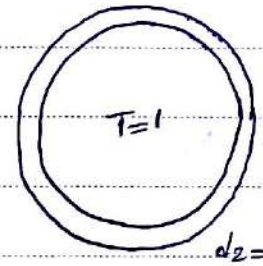
$A_m = \pi r_{av}^2$

$\tau = \frac{T}{2\pi t r_{av}^2}$

اضافه شدن ثابت بستن در مقطع جدار نازک دایروی، با قبول مقداری خطا می‌توان از فرمول تنش برشی شفت دایروی استفاده کرد.

$\left(\tau = \frac{T \cdot \rho}{\frac{\pi}{32}(d_2^4 - d_1^4)}\right)$ اضافه شدن ثابت بستن

مثال



$d_2 = 100mm$

$d_1 = 90mm$

$J = \frac{\pi(100^4 - 90^4)}{32} = 3.38 \times 10^6 mm^4$

$A_m = \pi\left(\frac{95}{2}\right)^2 = 7088.2 mm^2$

$\tau_{min} = \frac{(1)(45)}{3.38 \times 10^6} = 1.33 \times 10^{-5}$

$\tau_{max} = \frac{(1)(50)}{3.38 \times 10^6} = 1.48 \times 10^{-5}$

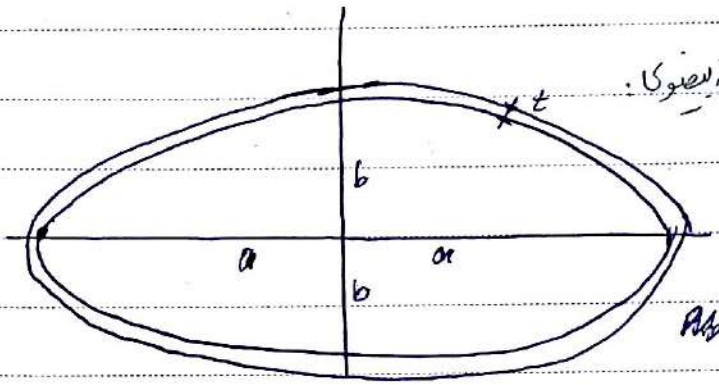
$\tau = \frac{(1)}{(2)(\frac{\pi}{5})(7088.2)} = \frac{1.41}{\text{مخرج}} \times 10^{-6}$

هر چند ضخامت (t) کاهش یابد، جواب‌های τ_{max} و τ و τ_{min} به هم نزدیک‌تر می‌شوند.

اگر ضخامت جدار نازک بسته، ضخامت در کل مقطع ثابت باشد، شکل مقطع به هر صورتی باشد تنش برشی در تمام نقاط برابر است.

Subject:

Year. Month. Date. ( )



مساحت محصور توسط یکی از مقطع جدار نازک بسته بیضوی:

$A_m = \pi ab$

تمرکز تنش:

برای تقطی که در آن تمرکز تنش روی می دهد:

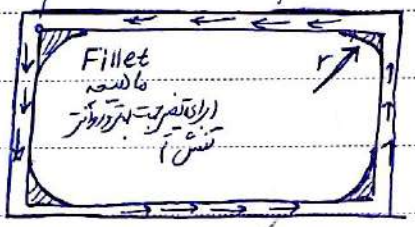
تنش دو تکه ها

$\tau = K_t \frac{T}{2tA_m}$

ضریب تمرکز تنش

متوسط یا Normal

به این خاطر در این حالت کاربرد داریم که ضخامت در کل مقطع ثابت است.



نقطه ای که جهت تنش عوض می شود (محل آغاز شکست)

در نقطه ای تمرکز تنش، تنش به چه مقدار در چه جهتی است؟

یافتن θ برای مقطع جدار نازک بسته:

خارج از مقاومت!

strain Energy
انرژی کرنشی

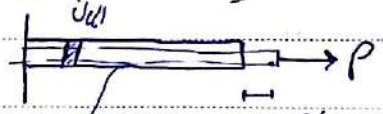
U_E یا E یا U

چگالی انرژی کرنشی $U_0 = \frac{U}{V}$

Strain Energy Density

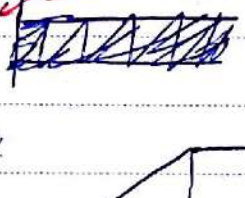
وقتی به جسمی نیرو وارد شود و محل اثر نیرو جابجا شود، کار انجام شده است.

وقتی جسم در حالت الاستیک تحت نیروی P کشیده شود، این انرژی در جسم ذخیره شده و بعد از برداشتن نیرو این انرژی آزاد می شود.

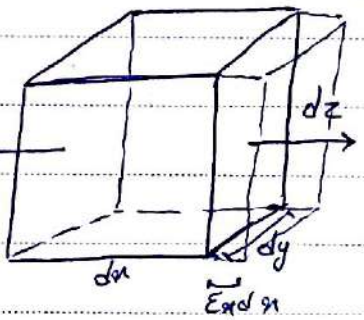


$Work = \frac{1}{2} \times P \times \delta$

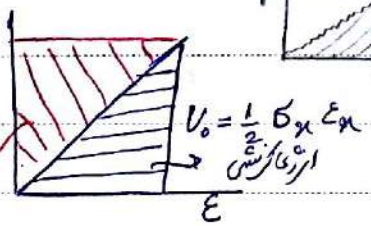
به دلیل تدریجی وارد کردن نیرو (استاتیکی) کار برابر مساحت زیر منحنی نیرو-جابجایی است.



اگر المان زیر را جدا کنیم:



در منطقه الاستیک



انرژی مکمل

Complemantary Energy

$\varepsilon_x = \text{کرنش} = \frac{dx' - dx}{dx}$

$\text{افزایش طول} = dx' - dx = \varepsilon_x \cdot dx$

انرژی کرنشی برابر مساحت زیر منحنی تنش کرنش است.

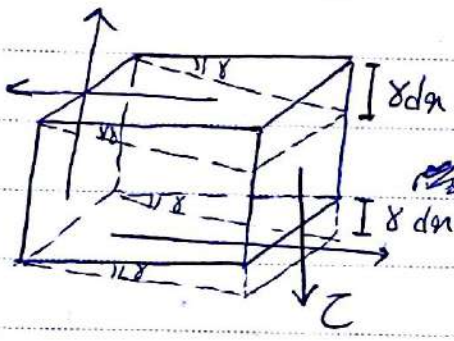
$\text{انرژی کرنشی} dU = \frac{1}{2}(\sigma_x \cdot dy \cdot dz)(\varepsilon_x dx)$

Subject :

Year . Month . Date . ( )

امتحان میان ترم ازکشش 915

در کرنش زاویه ای زوایای 90 به هم می زند.



$(\frac{1}{2})(\tau \cdot dy\,dz) \rightarrow U_0 = \frac{1}{2}\tau\gamma$

$U_0 = \frac{1}{2}\sigma_x\varepsilon_x + \frac{1}{2}\sigma_y\varepsilon_y + \frac{1}{2}\sigma_z\varepsilon_z + \frac{1}{2}\tau_{xy}\gamma_{xy} + \frac{1}{2}\tau_{yz}\gamma_{yz} + \frac{1}{2}\tau_{zx}\gamma_{zx}$

IF $\sigma_x \neq 0$ ($\sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$)

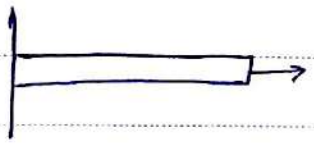
$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$ قانون هوک

$U_0 = \frac{1}{2}\sigma_x\varepsilon_x = \frac{\sigma_x^2}{2E} = \frac{1}{2}E\varepsilon_x^2$

IF $\tau \neq 0$

$\gamma = \frac{\tau}{G}$

$U_0 = \frac{1}{2}\tau\gamma = \frac{1}{2}\frac{\tau^2}{G} = \frac{1}{2}G\gamma^2$

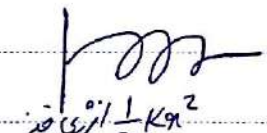


$\sigma = \frac{P}{A}$

$U_0 = \frac{P^2}{2EA^2}$

$U = U_0 \cdot \forall = \frac{P^2}{2EA^2} \times AL = \frac{P^2 L}{2EA}$

انرژی ذخیره شده در کشش و فشار اگر P در طول ثابت باشد



انرژی فنر $\frac{1}{2}Kx^2$

$K = \frac{EA}{L}$

$\delta = \frac{PL}{EA}$

$P^2 = \frac{\delta^2 E^2 A^2}{L^2}$

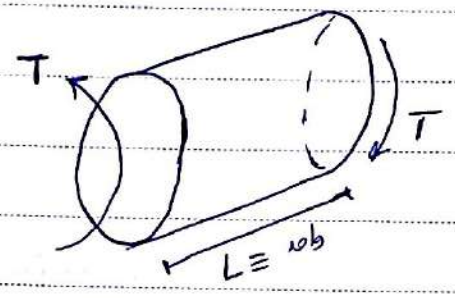
$V = \frac{\delta^2 E^2 A^2}{L^2} \cdot \frac{L}{2EA}$

$V = \frac{\delta^2 EA}{2L}$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

برای بخش c



چگالی انرژی $U_0 = \frac{\tau^2}{2G} = \frac{T^2\rho^2}{2GJ^2}$

$U = \iiint_V U_0 \, dv$

$= \iint_A \int_L \frac{T^2\rho^2}{2GJ^2} \, dA\,dx$

$= \int_L \frac{T^2}{2GJ^2} \left(\int \rho^2 dA\right) dx = \int \frac{T^2 dx}{2GJ}$

اگر T در طول ثابت باشد: $U = \frac{T^2 L}{2GJ}$

برای مقطع جدارنازک بسته:

$U_0 = \frac{\tau^2}{2G} = \left(\frac{T}{2tA_m}\right)^2 \frac{1}{2G}$

$U_0 = \frac{T^2}{8t^2 G A_m^2}$

$U = \iiint U_0 \, dv$

$dA = t.ds$

$= \int_L \frac{T^2}{8GA_m^2} \left(\iint \frac{dA}{t^2}\right) dx$

$U = \int_{0L} \frac{T^2}{8GA_m^2} \left(\int_{Lm} \frac{ds}{t}\right) dx$

می دانیم $U = \text{Work} = \frac{1}{2} T.\phi$

$\frac{1}{8} \int \frac{T^2 \int \frac{ds}{t}}{G A_m^2} dx = \frac{1}{2} T\phi$

$\frac{T^2}{8GA_m^2 \frac{1}{\int \frac{ds}{t}}} = \frac{1}{2} T.\theta$

برای مقطع جدارنازک بسته

$\theta = \frac{T}{4GA_m^2 \frac{1}{\int \frac{ds}{t}}}$ ← J برای مقطع جدارنازک بسته

$J = 4.A_m^2 \frac{1}{\oint \frac{ds}{t}}$

ds: طول روی خط میانی

$\theta = \frac{T}{GJ}$

برای مقطع جدارنازک بسته، $\theta = \frac{T}{GJ}$ که J آن از رابطه‌ی $J = 4A_m^2 \times \frac{1}{\oint \frac{ds}{t}}$ بدست می‌آید.

Subject:

Year. Month. Date. ( )

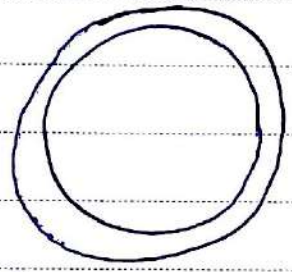
دایره‌ی جدار نازک

$$\theta = \frac{T}{GJ}$$

$$J = \frac{\pi}{32}(d_2^4 - d_1^4)$$

$$J = 4A_m^2 \cdot \frac{1}{\oint \frac{ds}{t}}$$

در مقطع جدار نازک بسته‌ی دایره‌ی با تقریب اختلاف و خطای جزئی، می‌توان از فرمول آن برای مقطع دایره‌ی استفاده کرد.



$d_2 = 100\ mm$

$d_1 = 90\ mm$

$J = \frac{\pi}{32}(100^4 - 90^4) = 3.376\ mm^4$

$A_m = \frac{\pi}{4}(95)^2 = 7.08 \times 10^3\ mm^2$

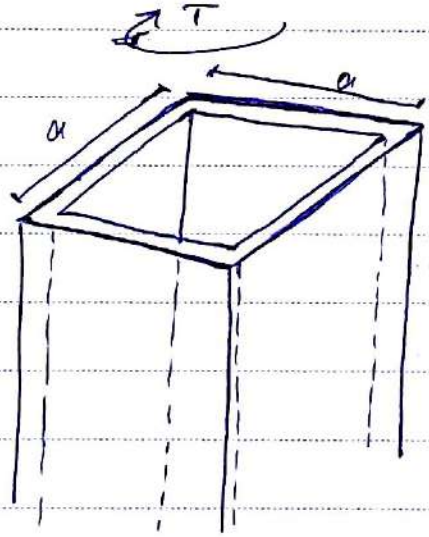
$\oint \frac{ds}{t} = \oint \frac{ds}{5^{mm}} = \frac{\pi(95)}{5} = (\pi)(19) = 59.7$

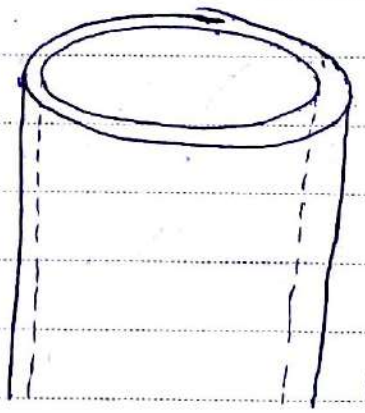
ds: دایره‌ی C_L در وسط جدار (ضخامت t)

$J = (4)(7.08 \times 10^3)^2 \times \frac{1}{59.7} = 3.36 \times 10^6\ mm^4$

$J = \frac{\pi}{32}(d_2^2 - d_1^2) = 337.623 \times 10^{-8}\ m^4$

$J = 4A_m^2 \times \frac{1}{\oint \frac{ds}{t}} = 302.606 \times 10^{-8}\ m^4$





مثال)

فرض کنید شفت برای است. کدام یک برای تحمل پیچش مناسب است؟ (از تمرکز تنش صرف نظر شود.)

در نشان برابر است. مصالح کن هم یکسان است. پس وجهشان باید برابر باشد.

حجم لوله $2\pi rt$

حجم ملعب $4at$

$2\pi rt = 4at \Rightarrow a = \frac{\pi r}{2}$

$2at + 2(a-2t)t = 4at - 4t^2$ حال صرف نظر

$\tau_{دایره} = \frac{T}{2t\pi r^2}$ $\tau_{مربع} = \frac{2T}{at\pi^2 r^2}$

$\frac{\tau_{دایره}}{\tau_{مربع}} = \frac{\pi}{4}$

پس تنش در دایره کمتر از تنش در مربع است.

پس دایره از مربع، بهتر است چون بیشتری و توان تحمل کمتری

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$J_{\text{دایره}} = 4(\pi r^2)^2 \frac{1}{\oint \frac{ds}{t}} = 4(\pi r^2)^2 \frac{t}{2\pi r} = 4(\pi^2 r^4)\frac{t}{2\pi r} = 2\pi r^3 t$$

$$J_{\text{مربع}} = 4\left(\frac{\pi^2 r^2}{4}\right)^2 \frac{1}{\frac{2\pi r}{t}} = 4\left(\frac{\pi^4 r^4}{16}\right)\frac{t}{2\pi r} = \frac{\pi^3 r^3 t}{8}$$

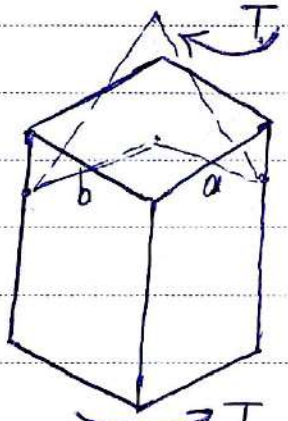
$$\frac{J_{\text{دایره}}}{J_{\text{مربع}}} = \frac{2\pi r^3 t}{\frac{\pi^3 r^3 t}{8}} = \frac{16\pi r^3 t}{\pi^3 r^3 t} = \frac{16}{\pi^2} \simeq 1.6$$

کوچکتر

هرچه J بزرگتر باشد، θ کوچکتر می‌شود. پس دایره نسبت به مربع عزت دارد.

هرچه J بیشتر که θ کمتر شود بهتر است. هرچه θ بیشتر باشد، برای حول بیشتر تست هندوبه پیچش بیشتر انرژی خواهد کرد

پیچش مقطع مربعی توپر



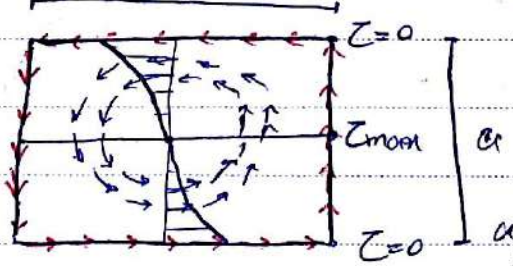
لنگر پیچشی و لنگر جابجایی در راستای طول دارد.

در صورت اعمال گشتاور پیچشی در مقطع مربعی توپر، جابجایی در راستای طول داریم.

در مقطع مربعی توپر:
تنش برشی ماکزیمم در وسط ضلع بزرگتر اتفاق می‌افتد.

در مورد توزیع تنش برشی بحث خواهیم کرد.

در مقطع مربعی توپر در گوشه‌ها تنش برشی صفر است چون



$a \geq b$

در غیر این صورت بر روی سطح خارجی تنش به وجود می‌آید (که در این صورت تغییر اندازه‌ی تارهای طولی را خواهیم داشت.)

در مقطع مربعی توپر

$$\tau_{max} = \frac{T}{\alpha a b^2}$$

وسط ضلع بزرگتر مقطع

α و β دو ضریب هستند که به مقادیر $\frac{a}{b}$ وابستگی دارند.

$$\theta = \frac{T}{\beta G a b^3}$$

دقت: در هر دوی این فرمول‌ها فرض شده است که $a \geq b$

سؤال: در مقطع جدار نازک بسته مربعی تنش ماکزیمم در گوشه‌ها و در مقطع مربعی توپر تنش ماکزیمم در وسط ضلع بزرگتر اتفاق می‌افتد.

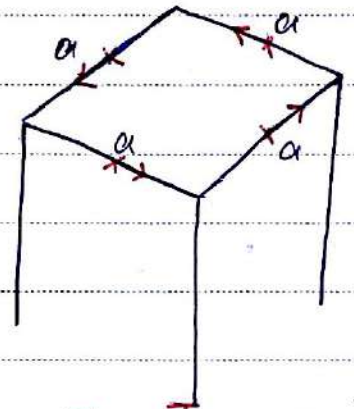
$\frac{a}{b}$	α	β
1	0.208	0.141
2	0.246	0.229
3	0.267	0.263
⋮	⋮	⋮
10	0.312	0.312
∞	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

PqPCO

Subject:

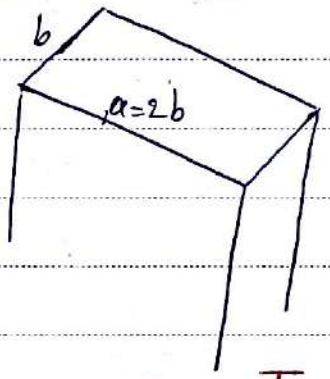
Year. Month. Date.

در مقطعی که دو ضلع آن با هم برابر باشد.



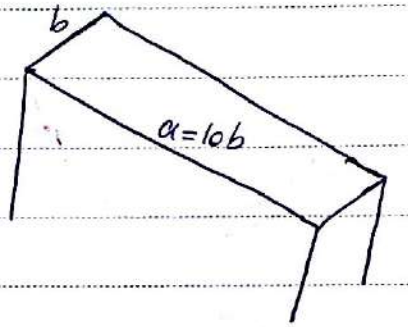
$$\tau = \frac{T}{0.208a^3} = \frac{T}{0.208b^3}$$

$$\theta = \frac{T}{0.141a^4} = \frac{T}{0.141Gb^4}$$



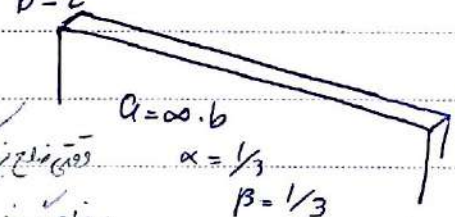
$$\tau_{max} = \frac{T}{0.246(2b)(b)^2} = \frac{T}{0.492b^3}$$

$$\theta = \frac{T}{0.229(2b)b^3} = \frac{T}{0.458Gb^4}$$



$$\tau = \frac{T}{(0.312)(10b)(b)^2} = \frac{T}{3.12b^3}$$

$$\theta = \frac{T}{0.312G.10b.b^3} = \frac{T}{3.12Gb^4}$$



$\alpha = 1/3$

$\beta = 1/3$

$$\tau = \frac{T}{\frac{1}{3}at^2}$$

$$\theta = \frac{T}{\frac{1}{3}Gat^3}$$

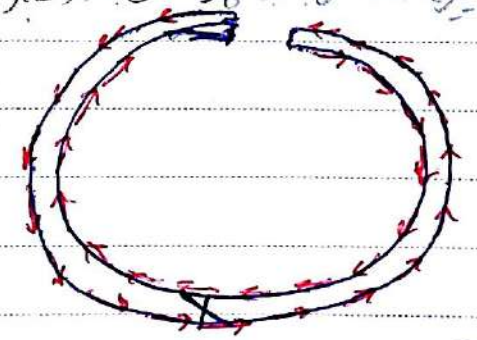
وقتی ضلع بزرگتر مقطع مربعی تبدیل به ضلع دیگر شده باشد

$\alpha = \frac{1}{3}$

$\beta = \frac{1}{3}$

اگر مقطع مربع تبدیل کمک ضلع آن بسیار بزرگتر از ضلع دیگر باشد آنگاه مقطع مورد بازکار باز در نظر گرفته می‌شود

مقطع بازکار باز



این به مقطع را جزو نمی‌کنیم تا بازی ندارد؛

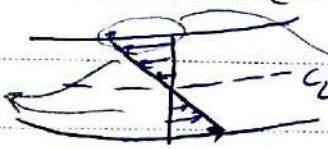
در صورت باز بودن مقطع (در مقطع جدار باز)

ضخامت

تنش به صورت خطی است

(در صورت بسته بودن تنش به صورت یکنواخت است)

مقطع باز

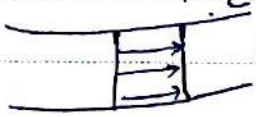


$$\tau = \frac{T}{\frac{1}{3}at^2}$$

تنش برشی روی τ_t خواهد بود

جمع مساحت این دو مقطع باید صفر شود چون در این صورت تنش قائم بر سطح حاصل و در نتیجه‌ی آن تنش قائم خواهیم داشت (در صورتی که نیروی محوری نداریم).

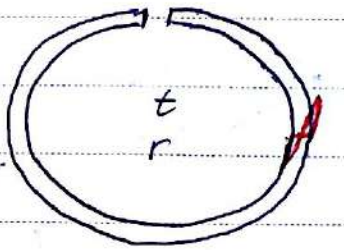
در صورت مقطع بسته



$$\tau = \frac{T}{2tAm}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

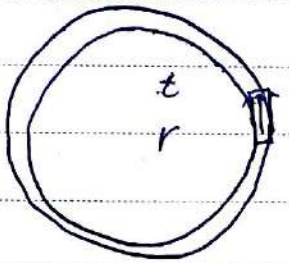
اگر دو مقطع جدارنازک دایره‌ای بسته و باز را از لحاظ θ و τ مقایسه کنیم:



$$\theta_{closed} = \frac{T}{4GA_m^2 \oint \frac{ds}{t}} = \frac{T}{4G(\pi r^2)^2 \frac{1}{\frac{2\pi r}{t}}} = \frac{T}{2G\pi r^3 t}$$

$$\tau_{open} = \frac{T}{\frac{1}{3}(2\pi r)t^2} = \frac{3T}{2\pi r t^2}$$

$$\theta_{open} = \frac{T}{\frac{1}{3}G(2\pi r)t^3} = \frac{3T}{2\pi r t^3 G}$$



$$\tau_{closed} = \frac{T}{2tA_m} = \frac{T}{2t\pi r^2}$$

$$\frac{\tau_{op}}{\tau_{cl}} = \frac{\frac{3T}{2\pi r t^2}}{\frac{T}{2\pi t r^2}} = \frac{3r}{t}$$

اگر $r/t = 10$ $\tau_{op} = 30\tau_{cl}$

$$\frac{\theta_{op}}{\theta_{cl}} = \frac{\frac{3T}{2\pi r^2 t^3 G}}{\frac{T}{2G\pi r^3 t}}$$

$$\frac{\theta_{op}}{\theta_{cl}} = \frac{3r^2}{t^2} \quad r/t = 10 \quad = 300$$

* پس اگر پیچش برای ما مهم است باید از مقطع بسته استفاده کنیم.

* در Container carrier ها که ردیف‌های انبار به خاطر افزایش سرعت بارگیری بزرگ است و به خاطر این بزرگی مقطع باز نسبت به پیچش ضعیف است پس در آن از سلول هایی استفاده می‌شود.



در کشتی‌های کانتینربرکه به خاطر افزایش سرعت بارگیری در انبار بزرگ است، کشتی شکل یک مقطع جدارنازک باز درمی‌آید پس نسبت به پیچش ضعیف بوده و برای جبران این ضعف سلول هایی در راستای این جدارنازک تعبیه می‌کنند.

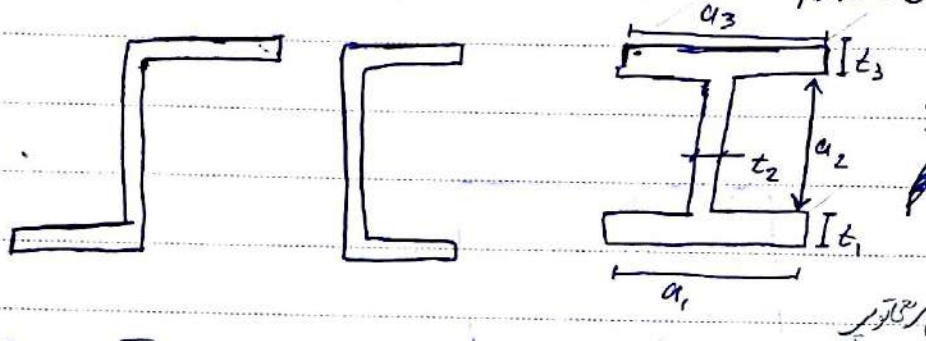
Subject:

Year Month Date

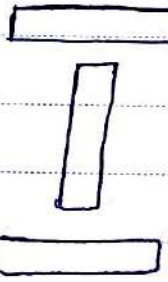
اگر مقطع مربعی توپر که یک ضلع آن بسیار بزرگتر از ضلع دیگر باشد را در نظر بگیریم، τ و θ آن نسبت به حالت قبل از هم چه تغییری می‌کنند

$$\tau = \frac{T}{\frac{1}{3} a_1 t^2} \qquad \theta = \frac{T}{\frac{1}{3} G a_1 t^3}$$

به هر کدام از شکل‌های زیر آلم وارد کنیم، τ و θ به شکل بالا بیست کمتر و نازک‌تر شده‌اند. (البته از تمرکز تنش صرف نظر کرده‌ایم.)



اگر شکل راست را آلم کرده و τ و θ هر قسمت را به‌طور جداگانه حساب کنیم این شکل در واقع از سه مقطع مربعی توپر طویل با ضخامت کم تشکیل شده است.



$$\theta_3 = \frac{T_3}{\frac{1}{3} G a_3 t_3^3} \qquad \tau_3 = \frac{T_3}{\frac{1}{3} a_3 t_3^2}$$

$$\theta_2 = \frac{T_2}{\frac{1}{3} G a_2 t_2^3} \qquad \tau_2 = \frac{T_2}{\frac{1}{3} a_2 t_2^2}$$

$$\theta_1 = \frac{T_1}{\frac{1}{3} G a_1 t_1^3} \qquad \tau_1 = \frac{T_1}{\frac{1}{3} a_1 t_1^2}$$

اگر دوباره به هم وصل کرده و جوش دهیم:

باید: معادل سازی

$$\theta_3 = \theta_2 = \theta_1 = \theta$$

$$\frac{T_3}{\frac{1}{3} G a_3 t_3^3} = \frac{T_2}{\frac{1}{3} G a_2 t_2^3} = \frac{T_1}{\frac{1}{3} G a_1 t_1^3} = \frac{T}{GJ}$$

$$\begin{cases} T_1 = T \dfrac{\frac{1}{3} a_1 t_1^3}{J} \\ T_2 = T \dfrac{\frac{1}{3} a_2 t_2^3}{J} \\ T_3 = T \dfrac{\frac{1}{3} a_3 t_3^2}{J} \end{cases} \qquad T = T_1 + T_2 + T_3$$

$$T = T \frac{\frac{1}{3} a_1 t_1^3}{J} + T \frac{\frac{1}{3} a_2 t_2^3}{J} + T \frac{\frac{1}{3} a_3 t_3^3}{J}$$

برای مقطع چدار نازک باز

$$J = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{3} a_i t_i^3$$

a_i طول هر شاخه
t_i ضخامت هر شاخه
n تعداد شاخه‌ها

در مقطع چدار نازک باز که از چند شاخه تشکیل شده θ مانند θ یک شاخه‌ها باهم برابر و برابر است

$$\theta = \frac{T}{G \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{3} a_i t_i^3}$$

در مقطع جدار نازک باز که از چند شاخه تشکیل شده است، هم چنان θ از رابطه‌ی $\theta = \frac{T}{GJ}$ به دست می‌آید.

Subject:

Year. Month. Date. ( )

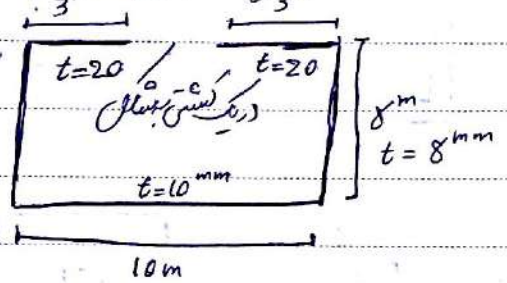
$$\theta = \frac{T}{GJ}$$

$$\begin{cases} T_1 = T \dfrac{\frac{1}{3}a_1 t_1^3}{\sum \frac{1}{3}a_i t_i^3} \\ T_2 = T \dfrac{\frac{1}{3}a_2 t_2^3}{\sum \frac{1}{3}a_i t_i^3} \\ T_3 = T \dfrac{\frac{1}{3}a_3 t_3^3}{\sum \frac{1}{3}a_i t_i^3} \end{cases}$$

برای هر شاخه در مقطع جدار نازک باز $\tau_i = \frac{T \cdot t_i}{J}$ کل J

$$\tau_1 = \frac{T_1}{\frac{1}{3}a_1 t_1^2} = \frac{T \frac{1}{3}a_1 t_1^3}{\frac{1}{3}a_1 t_1^2} = \frac{T t_1}{\sum \frac{1}{3}a_i t_i^3} \Rightarrow \frac{T t_i \sum \frac{1}{3}a_i t_i^3}{J_{3^m}}$$

تمرین:



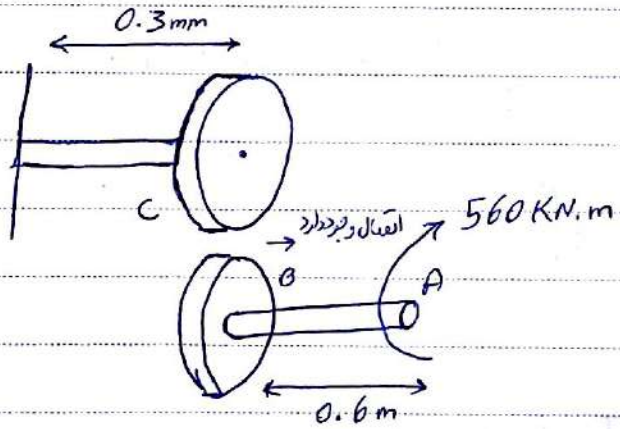
$T_w = 1.00\ KN.m$

$\tau_{max} = ?$

$\theta = ?$

$G = 70\ Gpa$

چاپ شود.



$d_{میله} = 5$

سؤال دوم برگه جواب

سؤال چهارم نمونه سؤالات

$$P = \frac{W}{T} = \frac{T\phi}{t} = T\dot{\phi} = T 2\pi f \ Hz$$

$$T_\phi = \frac{T 2\pi N}{60} = P \quad (W)$$

$$P = \frac{2\pi T N}{60 \times 10^3} \ \ldots$$

صفحه توان از روی پلوف فصل انتقال مطالعه کردد.

$T_1+T_2+\cdots+T_n=T$

$\theta_1=\theta_2=\cdots=\theta_n=\theta$

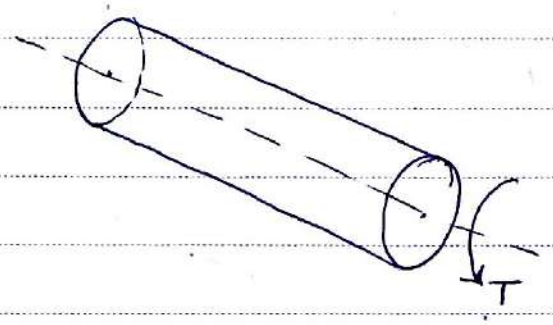
Subject:

Year. Month. Date. ( )

$J=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{3}a_i t_i^3$

$\tau_i=\frac{T.t_i}{J\to\text{کل}}$ $\quad \theta=\frac{T}{GJ}$

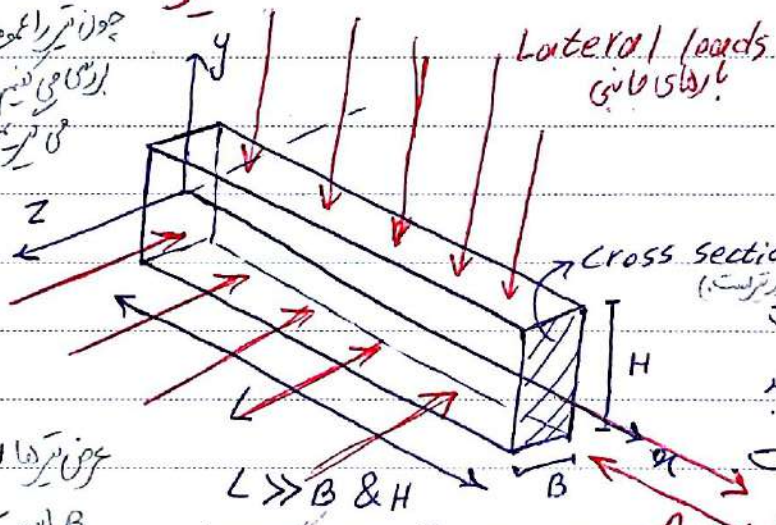
به شکل خلاصه برای مقطع جدارنازک تشکیل شده از n شاخه:



توان $= T \times 2\pi f$

Beams تیرها

چون تیر را عموما" در دستگاه دو بعدی بررسی می کنیم محورها را این گونه در نظر می گیریم.

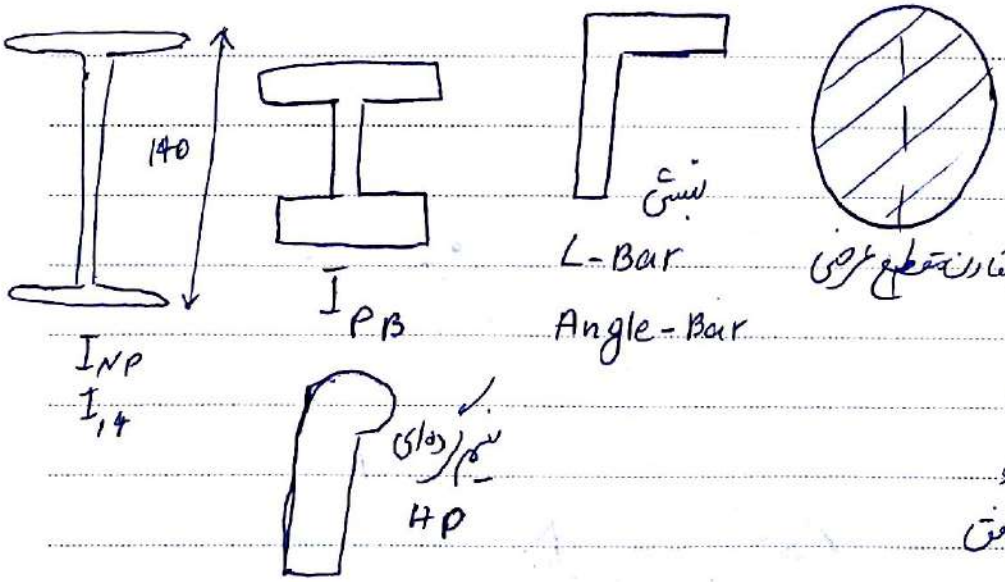


تیر عضو سازه‌ای برای تحمل بار جانبی است و دارای این خصلت است که یک بعد آن از دو بعد دیگر آن خیلی بزرگتر است

تیر می تواند دارای تقارن عرضی نباشد

عرض تیر با H و ارتفاع بالها B است.

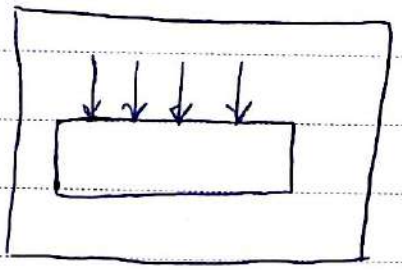
تیرهای توان تحت دو نوع بار گذاری جانبی و به صورتی قرار دارند.

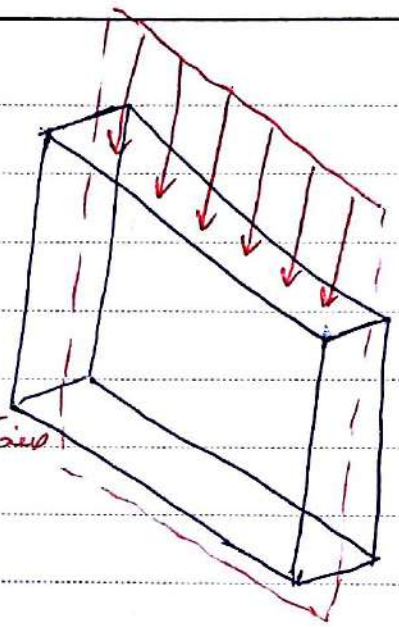


بارهای وارده به تیر می توانند در امتداد تیر به صورت کششی خمشی و یا به صورت قائم در صفحه افق یا قائم وارد شوند. بارهای متعلقه

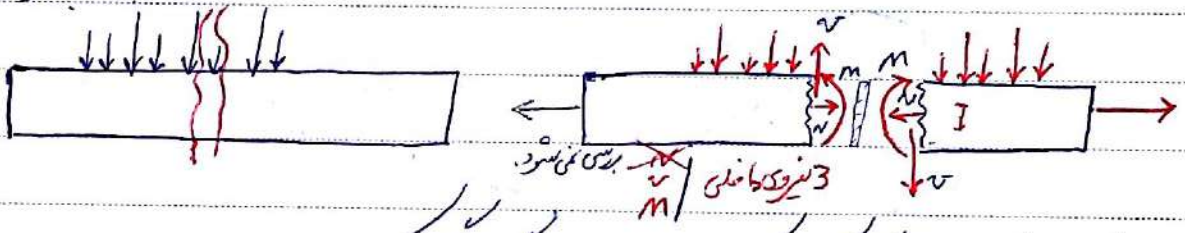
محورهای تقارن خیلی کوچک هستند یا اصلا" وجود ندارند بیشتر تیرها با تحت بارگذاری قائم بررسی می کنیم

Subject:
Year. Month. Date. ( )

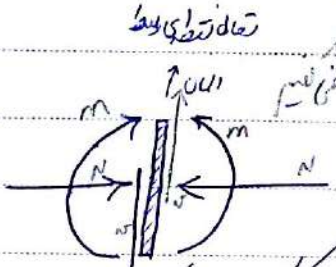




نیروهای داخلی:



* نیروی داخلی به وجود می آید که از حرکت جزء نسبت به جزء دیگر جلوگیری کند.
* در صورت برش تیر در هر نقطه با به سه نیروی داخلی داشته باشیم.
چون قسط در هر نقطه دو نیروی داخلی را بررسی می کنیم:



* تکیه گاه ها: محلی که از حرکت جسم جلوگیری می کند. برای جلوگیری از حرکت از تکیه گاه استفاده می کنیم.

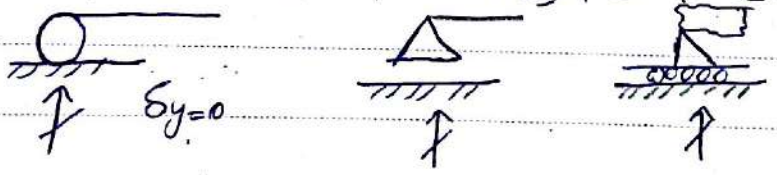
به صورت جسم صلب



تکیه گاه ها به سه حرکت (آزادی حرکت) که حرکت در راستای x یا y یا دوران است رخنه کند.

با ایجاد نیروهای عکس العمل تکیه گاهی، حرکت جسم کنترل می شود. تکیه گاه ها را براساس نیروهای عکس العمل آن ها می توان دسته بندی کرد.

تکیه گاه غلتکی: از جابه جایی در جهت y جلوگیری می کند. در نتیجه یک نیرو در راستای y بر جسم وارد می کند.



PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

تکیه گاه مفصلی یا پینی یا پین :
دو نیرو در جهت x و y بر جسم وارد می کند.

تکیه گاه مفصلی دو نیروی والنشی در دو راستای قائم بر جسم وارد می کند.

تکیه گاه گیردار Fixed support : هر سه نوع حرکت را مهار می کند. در نتیجه دو نیرو در راستای x و y و یک لنگر خمشی به جسم وارد می کند

* انواع تیر بر حسب نوع تکیه گاه :

تیر با تکیه گاه ساده
Simply Supported beam
تشکیل شده از یک تکیه گاه مدلی و یک تکیه گاه مفصلی

Simply Supported over hang beam
همان تیر با تکیه گاه ساده است که دو سر آن بعد از اتصال به تکیه گاه ها ادامه یافته اند.

Cantilever Beam
تیر یک سر گیردار - یک سر آزاد.

مفصل داخلی
تیر سراسری (دو دهنه)

اتصالات داخلی

دوران آزاد است.

مفصل داخلی دو نیرو در جهت x و y بر هر کدام از عضوهای متصل به خود وارد می کند.
(البته در صورتی که هر کدام از آن عضوها را جداگانه در نظر بگیریم)

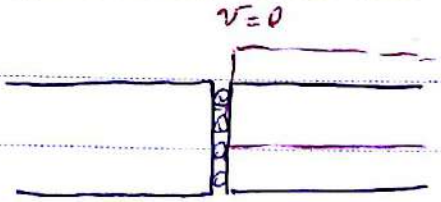
(دوران آزاد) M=0

نیروی عمودی N=0

نیروی برشی و لنگر خمشی داریم.

نیروی برشی و لنگر خمشی داریم.

Subject:
Year. Month. Date. ( )



نیروی محوری و لنگاور خمشی داریم.



نمایش مفصل داخلی

تیرها Beams

تعریف تیر

نیروهای داخلی M ، V (Q)

بارهای خارجی ← در صفحه عمود هستند و به دو دسته ی

concentrated load ↓ بار نقطه ای

Uni بار گسترده ↓↓↓↓

تکیه گاه ها

انواع تیر بر حسب تکیه گاه ها

بحث این جلسه تعیین نیروهای داخلی

تیرهای معین

تیرهای نامعین ← زمانی قابل بررسی هستند که تغییر شکل ها را داشته باشیم

تنش ها تحت اثر لنگاور خمشی / نیروی برشی

می خواهیم در تیرها، تنش های تحت اثر نیروی برشی و لنگاور خمشی را بدست آوریم.

تکیه گاه ها:

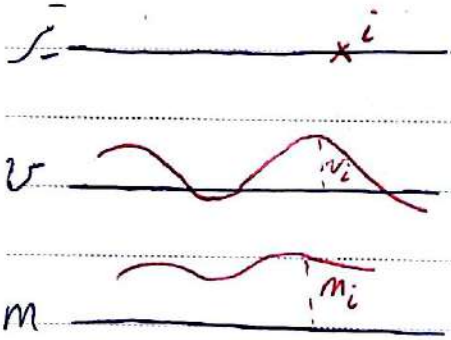


نمودار نیروی برشی
نمودار لنگاور خمشی

* در تیرها تغییرات نیروی داخلی زیاد است که برای نشان دادن آن از دو راه نمودار و ضابطه M(x) ، V(x) استفاده می کنیم که استفاده از نمودار بهتر است.

* برای فهمیدن این که دقیقاً در یک نقطه مقدار نیروی داخلی چقدر است، نمودارها را با مقیاس تیر در زیر آن رسم می کنیم

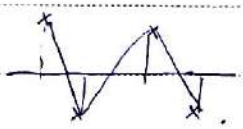
Subject:
Year. Month. Date. ( )

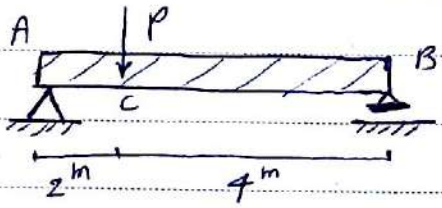


روش‌های رسم نمودار ① روش نقطه‌یابی

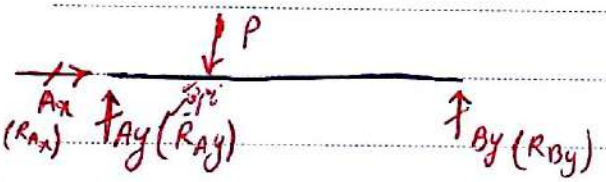
در این روش باید نقاط مهم را در نظر گرفته و نیروی داخلی را از طریق روش برش در این نقاط بیابیم.

در روش نقطه‌یابی { نقاط مهم (نقاط تکیه‌گاهی، نقاط با رمشترک، نقاط ابتدا و انتهای بارگستردہ، نقاط اعمال نشتاور خمشی)





مثال) چون تیر معین است با استفاده از دیاگرام آزاد می‌توان نیروهای عکس‌العمل تکیه‌گاهی را یافت. می‌خواهیم نمودار را با استفاده از روش نقطه‌یابی رسم کنیم.



دیاگرام آزاد
Free body diagram

دقت: بعد از برش ← گذاشتن نیرو در محل برش

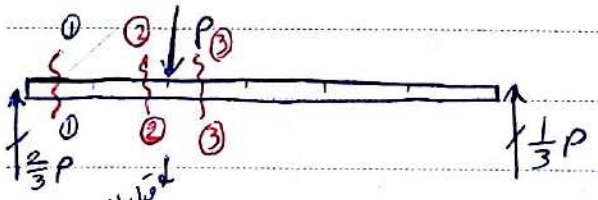
$$\sum F_x = 0 \rightarrow A_x = 0$$

$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 \rightarrow A_y(6) - P(4) = 0 \rightarrow A_y = \frac{2}{3}P$$

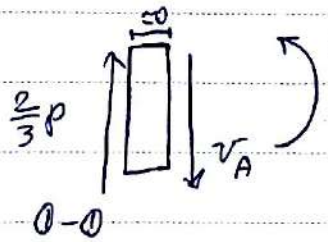
$$\left.\begin{matrix}\sum F_y = 0 \\ \sum M_A = 0\end{matrix}\right\} \rightarrow A_y - P + B_y = 0 \rightarrow B_y = \frac{1}{3}P$$

برای یافتن نیروهای داخلی:
(دیاگرام آزاد را رسم می‌کنیم و برش می‌زنیم)

برای یافتن نیروهای داخلی در روش نقطه‌یابی باید نقاط مهم برش می‌زنیم



قبل از اعمال بار



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -V_A + \frac{2}{3}P = 0$$

$$\boxed{V_A = \frac{2}{3}P}$$

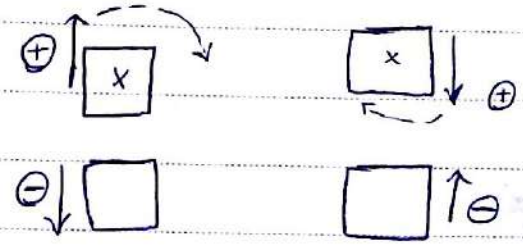
$$\sum M_A = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2}{3}P\right)(0) - M_A = 0 \rightarrow \boxed{M_A = 0}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

قرارداد علامت برای نیروهای داخلی:

۱ـ نیروهای برشی: هنگامی مثبت است که کشش در این نیرو حول هر نقطه داخل جسم در جهت ساعت باشد.



قرارداد گذاشته ایم تا نیروی برشی را این گونه علامت دهی کنیم.

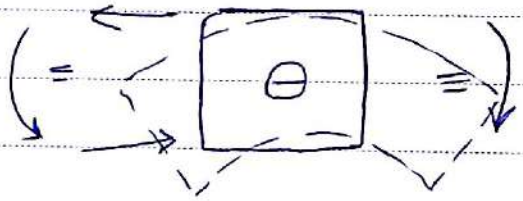
* اگر نیروی برشی طبق قرارداد جهت گذاری شود، مقدار آن چه مثبت و چه منفی شود، آن را وارد نمودار می کنیم.

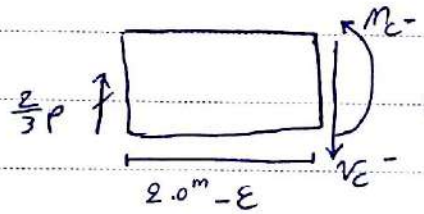
۲ـ کشش در خمشی:

فشار در تار بالا ⟵

کشش در خمشی در صورتی که باعث فشار در تار بالا شود مثبت و در صورت ایجاد فشار در تار پایین منفی است.

کشش در تار پایین ⟶



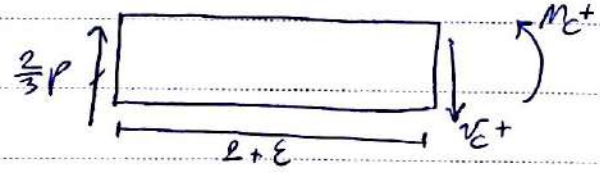


یعنی قبل از نقطه C

$\Sigma F_y = 0 \rightarrow V_{C^-} = \frac{2}{3}P$

$+\circlearrowleft \Sigma M_A = 0 \rightarrow \frac{2}{3}P \times 2 = M_{C^-} \rightarrow M_{C^-} = \frac{4}{3}P$

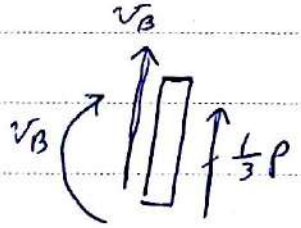
یعنی بعد از نقطه C



$\Sigma F_y = 0 \rightarrow \frac{2}{3}P - P - V_{C^+} = 0$

$V_{C^+} = -\frac{1}{3}P$

$\Sigma M_{C^+} = 0 \rightarrow M_{C^+} = \frac{4}{3}P$



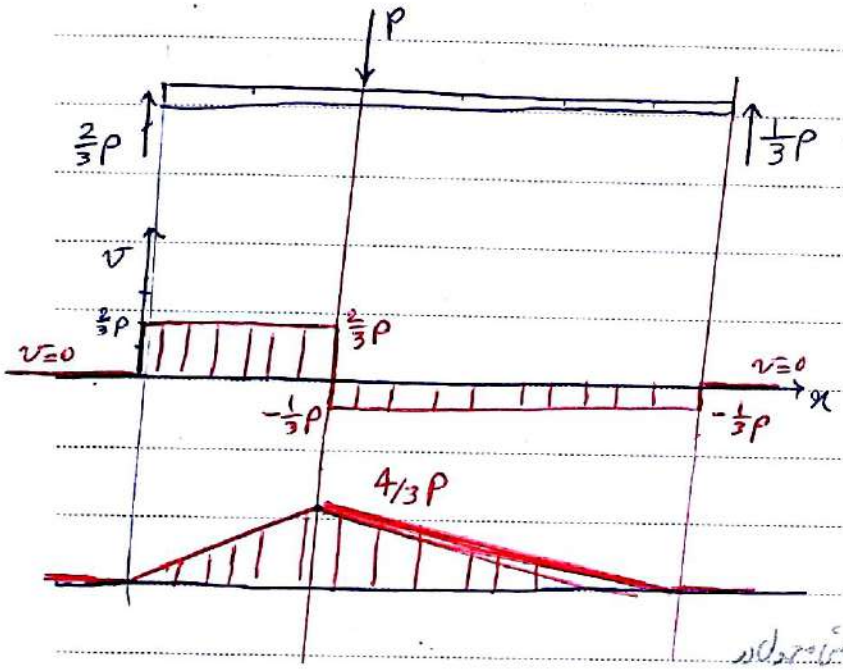
$\Sigma F_y = 0 \rightarrow V_B = -\frac{1}{3}P$

$\Sigma M = 0 \rightarrow M_B = 0$

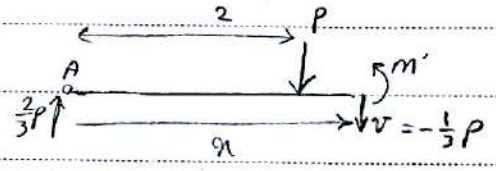
PqPCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )



در بدست آوردن ضابطه ای لنگر و یا نیروی برشی، می توان بدون اطلاع از مقدار مقدار های قبلی ضابطه را بدست آورد.

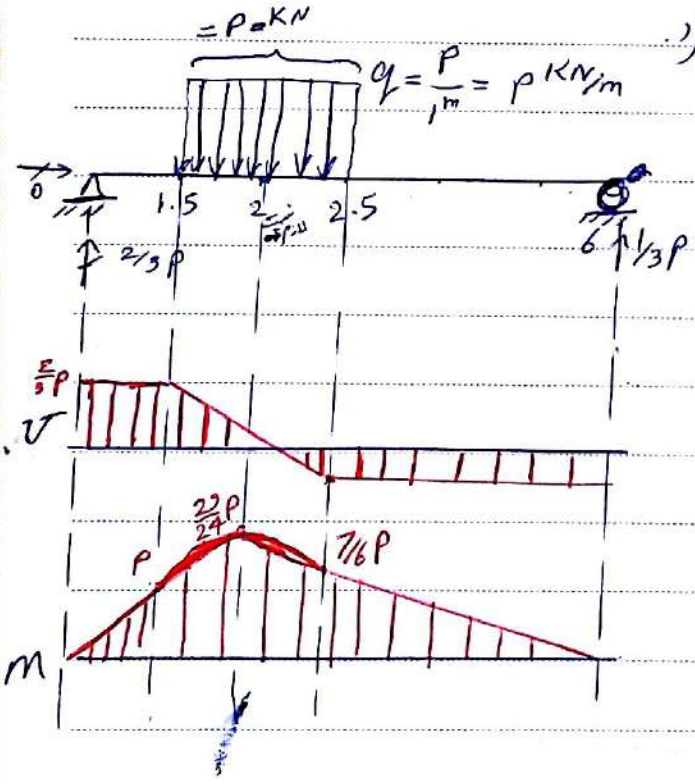


$$\Sigma M_A = 0$$
$$M'_A + \frac{1}{3}Px - 2P = 0$$
$$M' = 2P - \frac{1}{3}Px$$

در بدست آوردن ضابطه ای لنگر و یا نیروی برشی لازم شود که در دیاگرام آزاد، لنگر و سایر نیروها را هم چون لنگر و نیروی مجهول در نقطه ای برش در نظر گرفته شود.

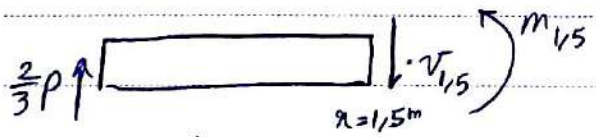
در معادلات تعادل می توان بار گسترده را با بار متمرکز در مرکز سطح آن جایگزین کرد.

q: میزان بار گسترده در واحد طول



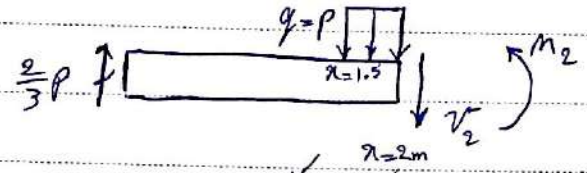
$$\begin{cases} V_A = \frac{2}{3}P \\ M_A = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_B = -\frac{1}{3}P \\ M_B = 0 \end{cases}$$



$$V_{1/5} = \frac{2}{3}P$$
$$M_{1/5} = \frac{2}{3}P \times 1/5 = P$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )



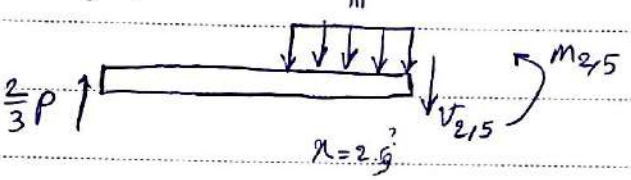
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \rightarrow \frac{2}{3}P - q \times 0.5 - V_2 = 0$$

$$V_2 = \frac{2}{3}P - P\frac{1}{2} = \frac{P}{6}$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_2 = 0 \rightarrow \left(\frac{2}{3}P\right)(2) - (q \times 0.5)\left(\frac{0.5}{2}\right) - M_2 = 0$$

$$M_2 = \frac{4}{3}P - \frac{P}{8} = \frac{29}{24}P$$

برای نقطه‌ای که روی بار گسترده است از نقطه تعادل یا بعد استفاده می‌کنیم دلیلش این نقطه را آنهایی برای نقاط بار متمرکز استفاده می‌کنیم و نقاط ابتدا و انتهای بار گسترده

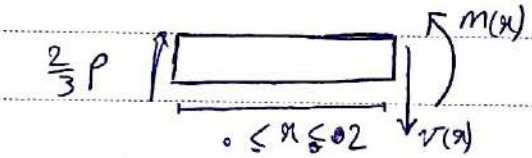


$$+\circlearrowleft \Sigma M_{2.5} = 0$$

$$\left(\frac{2}{3}P\right)(2.5) - (P)(0.5) - M_{2.5} = 0$$

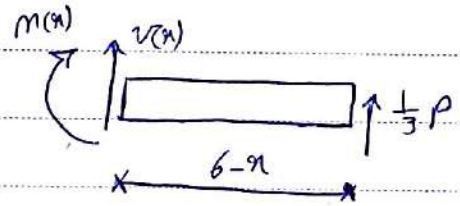
$$M_{2.5} = \frac{7}{6}P$$

روش ریاضی: برای کشک



$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow V(x) = \frac{2}{3}P$$

$$\Sigma M_x = 0 \rightarrow M(x) = \frac{2}{3}Px$$

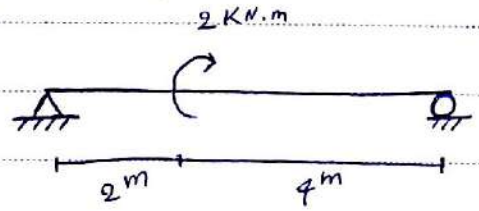


$$2 \le x \le 6$$

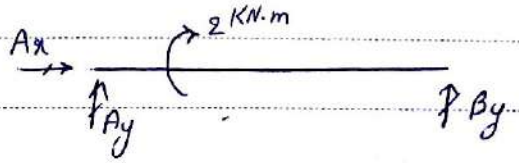
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \rightarrow V(x) = -\frac{1}{3}P$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_x = 0 \rightarrow M(x) = \frac{1}{3}P(6-x) = 2P - \frac{Px}{3}$$

مثال



ابتدا رسم دیاگرام آزاد:



$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow A_x = 0$$

$$\Sigma M_B = 0 \rightarrow A_y \cdot 6 + 2^{KN.m} = 0$$

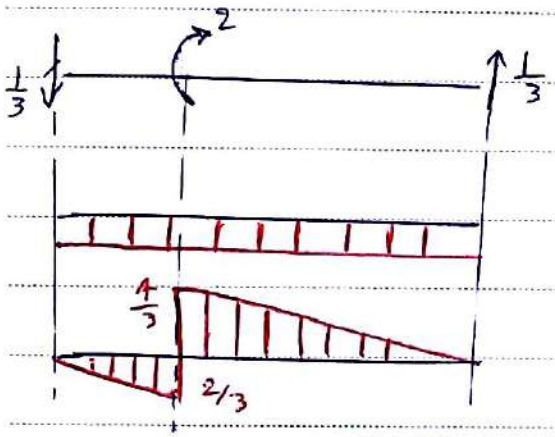
$$A_y = -\frac{1}{3}KN$$

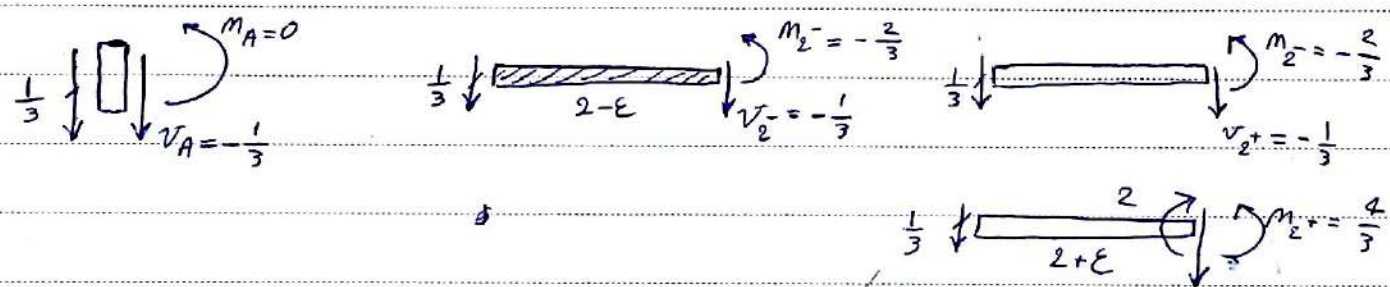
$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow B_y = \frac{1}{3}KN$$

PdPCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )



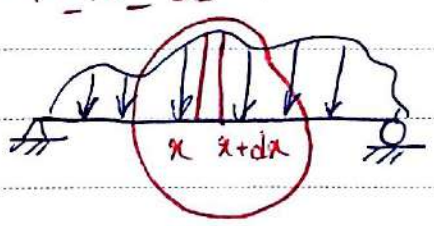


روش دوم برای رسم نمودار نیروی برشی و گشتاور خمشی:

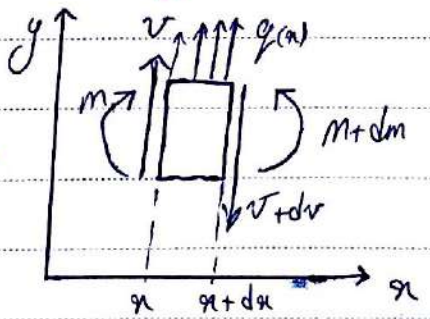
روش انتگرال گیری یا روش جمع زدن سطح زیر منحنی یا استفاده از روابط دیفرانسیلی بین بار (q)، نیروی برشی (V) و گشتاور خمشی (M)

یک المان از تیری که بارگذاری شده است را در نظر می‌گیریم:

(دقت شود که در این روش، بار متمرکز در نظر گرفته نشده است!)



یا



تمام جهات مثبت فرض شده‌اند.

اگر q مثبت ← مماس در ربع اول و سوم

منفی ← مماس در ربع دوم و چهارم

$$\Sigma F_y = 0$$

$$\rightarrow V + q(x)\,dx - (V+dV) = 0$$

اگر بار گسترده صفر باشد، پس شیب صفر است و لذا منحنی نیروی برشی به صورت افقی است.

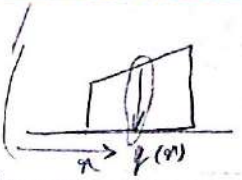
$$dV = q \cdot dx$$

$$\boxed{\frac{dV}{dx} = q}$$

شیب خط مماس بر منحنی نیروی برشی در هر نقطه برابر بار (q) است.

$\frac{dV}{dx}$ $\tan\alpha = \frac{dV}{dx}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

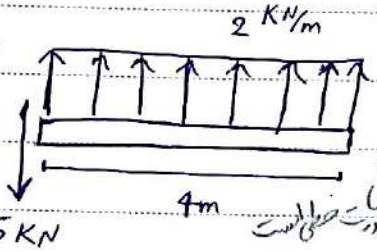


$q(x)$ در هر نقطه مقدار نیروی گسترده را به ما می دهد.

$$\rightarrow \int dV = \int q\,dx \rightarrow V_B - V_A = \int_A^B q\,dx \rightarrow V_B = V_A + \int_A^B q\,dx$$

نیروی برشی در هر نقطه برابر جمع نیروی برشی در نقطه‌ی مبنا به علاوه‌ی مجموع مساحت‌های زیر منحنی بار گسترده است.

مثال ①:

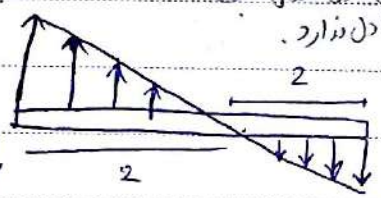


این بار گسترده است که به منحنی نیروی برشی زاویه می‌دهد.
در صورت نبود بار گسترده منحنی نیروی برشی به صورت افقی است که درجه منحنی نشان‌دهنده‌ی درجه‌ی بالا بودن است.

با استفاده از روابط دیفرانسیلی می‌توان ضابطه‌های ریاضی را دقیقا بدست آورد. اما باید دقت کرد که نیروی برشی نقطه‌ای مبنا به شکل اسکالر وارد شود.

چون q ثابت است پس شیب خط‌ها ثابت است.

دوباره تکرار می‌شود که در بدست آوردن ضابطه‌های ریاضی برای تیرها ضابطه‌های هر بخش تیر را می‌توان مستقلا بدست آورد.

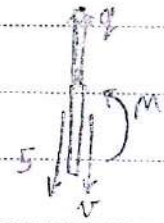


مثال ②:

* مثال دارای اشکال است تعادل ندارد.

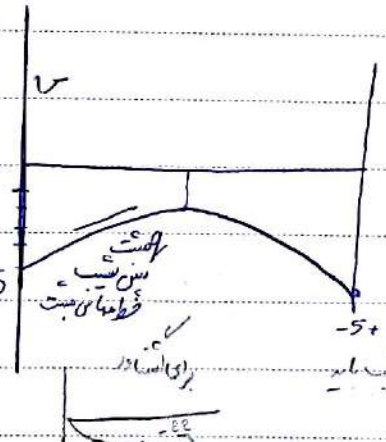
* روابط دیفرانسیلی را باید برای انتقال بین بارهای نقطه‌ای به کار برد ولی ایرادی ندارد که اگر در این بازه، چند نوع بار گسترده با جهات مختلف بر تیر وارد شود.

جمع مساحت‌های زیر منحنی صفر است.



برای بدست آوردن نیروی برشی در نقطه‌ی آغاز:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -5 - V + q(0) = 0 \Rightarrow \boxed{V = -5}$$



در بازه‌ی $0 \le x \le 2$ q مثبت است پس شیب مثبت است.

اما q در حال کاهش است پس شیب خط‌ها باید کاهش یابد (↘)

در بازه‌ی $2 \le x \le 4$ q منفی است پس شیب منفی است و q باز هم در حال کاهش است پس شیب باید منفی و منفی‌تر شود.

اگر برای ادامه تعریف ادامه دهیم:

$$+\circlearrowleft \Sigma M_{x+dx} = 0 \qquad \cong 0$$

$$\rightarrow M + V\cdot dx + q\cdot dx \cdot \frac{dx}{2} - (M + dM) = 0$$

$$dM = V\cdot dx$$
$$\Leftarrow \frac{dM}{dx} = V$$
$$\Leftarrow M_B = M_A + \int V\,dx$$

برای رسم نمودار لشتا و خمشی از منحنی نیروی برشی استفاده می‌کنیم.

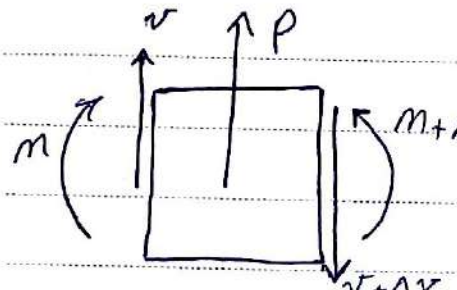
شیب خط‌های مماس بر منحنی لشتاوردمان برابر نیروی برشی است.

PARCO

در بازه‌ی $2 \le x \le 4$ نیروی برشی منفی است پس شیب منحنی لشتاوردمان منفی است. چون نیروی برشی در حال افزایش است پس شیب باید افزایش یابد یعنی باید به سمت شیب صفر برود. در بازه‌ی $2 \le x \le 4$ نیروی برشی منفی و در حال کاهش است.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

اگر به اعمال تنها بار متمرکز P و یا گشتاور متمرکز m اعمال شود:



$\Sigma F_y = 0 \rightarrow V + P - (V + \Delta V) = 0$

$\Delta V = P$ ← یعنی در نمودار، بسته به مثبت یا منفی بودن P، تا بالا یا پایین می‌آییم

در محل اعمال بار متمرکز:

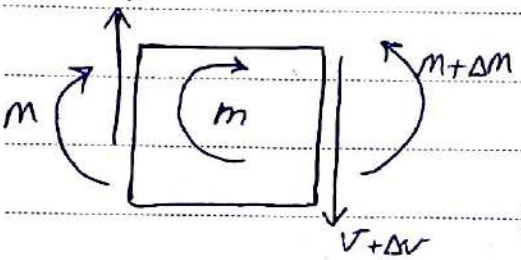
$+\circlearrowleft \Sigma M = 0$

$M + V\Delta x + \frac{P\Delta x}{2} - (M + \Delta M) = 0$

$\Delta x \to 0 \quad \Delta M = 0$

در محل اثر گشتاور متمرکز، نمودار جهش نخواهد داشت.

چون بار متمرکز می‌تواند مقدار خیلی زیادی باشد و پس تغییرات نیروی برشی در آن را به جای ΔV با V جایگزین می‌دهیم



اگر m در جهت عقربه‌های ساعت در محل اعمال گشتاور باشد، با اندازه‌ی m متمرکز جهش به سمت پایین دارد.

$\Sigma F_y = 0 \rightarrow V - (V + \Delta V) = 0 \rightarrow \Delta V = 0$

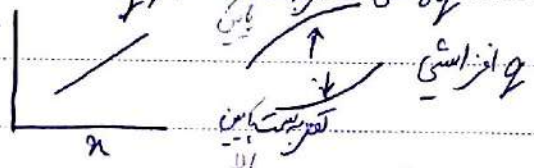
$\Sigma M = 0 \rightarrow M + m - (M + \Delta M) = 0 \rightarrow \boxed{\Delta M = m}$

در محل اعمال گشتاور متمرکز

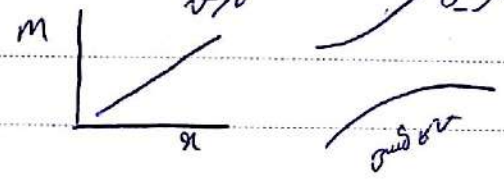
در نمودار، در محل اعمال گشتاور متمرکز بسته به مثبت یا منفی بودن آن گشتاور به سمت بالا یا پایین جهش می‌دهیم.

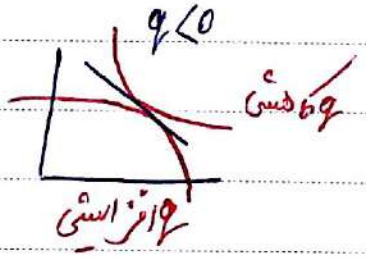
سپس دیاگرام نیروی برشی و گشتاور خمشی با استفاده از روابط دیفرانسیلی بین بار و نیروهای داخلی یا روش جمع زدن سطح

$\frac{dV}{dx} = q(x)$



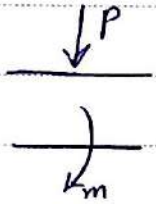
$\frac{dM}{dx} = V(x)$





$\Delta V = V_B - V_A = \int_{x_A}^{x_B} q(x)\,dx$

$\Delta M = M_B - M_A = \int_{x_A}^{x_B} V(x)\,dx$



$\Delta V = -P$

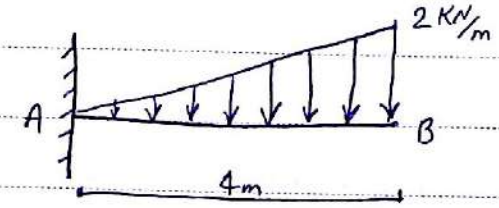
$\Delta M = m$

نمودار جهش می‌کند.

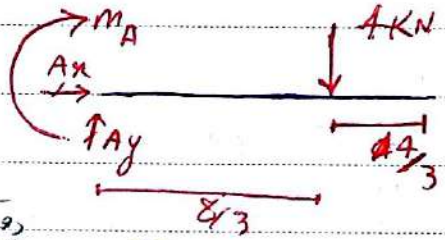
Subject:
Year. Month. Date. ( )

مرکز سطح مثلث قائم الزاویه: $\frac{1}{3}$ روی قطع برتر و $\frac{2}{3}$ روی قطع کوچکتر از رأس

مثال)



همانطور که می خوانیم عکس العمل ها را به دست آوردیم می توان بارگسترده را با یک بار نقطه ای در مرکز سطح آن جایگزین کرد.



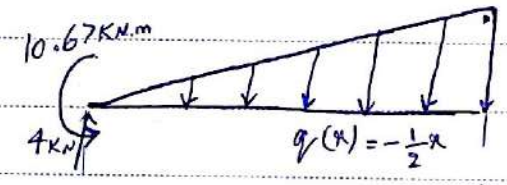
اگر جهت نیروهای را دوبرعکس باشد منفی است

دقت شود که نیروهای عکس العمل که کاهش از ما بستاند نیروی برشی و گشتاور خمشی در آن نقطه برابر است

$\Sigma F_x = 0 \rightarrow A_x = 0$

$\Sigma F_y = 0 \rightarrow A_y = 4\ KN$

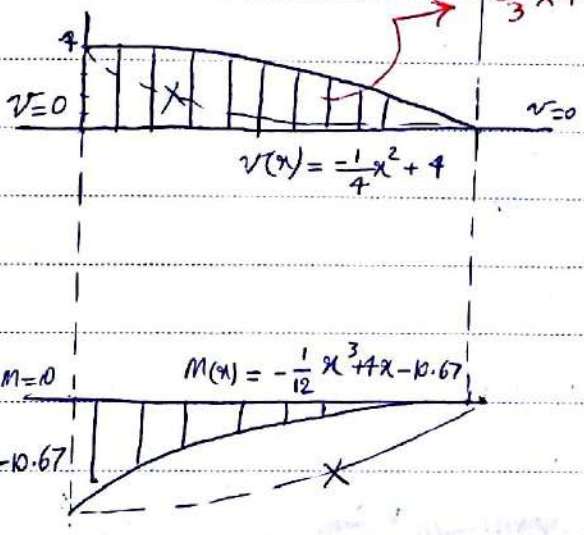
$\Sigma m_A = 0 \rightarrow M_A = -\frac{32}{3} = -10.67\ KN.m$



برای رسم نمودار باید بارگسترده بصورت گسترده در نظر گرفته شود.

دقت: گشتاور خمشی که نیروی داخلی است از ما گشتاور عکس العمل بیرونی

برابر است و بهتر است معادلات تعادل اینان نوشته شود.

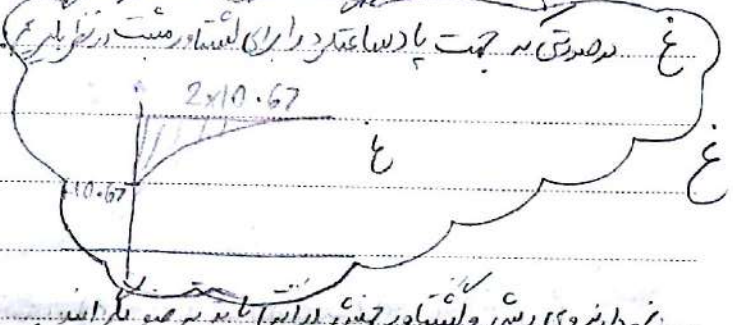


چون در حال افزایش است پس $\frac{dv}{dx}$ کاهش یافته

کاهش

پس

در صورتی به جهت پادساعتگرد برای گشتاور مثبت در نظر بگیرید

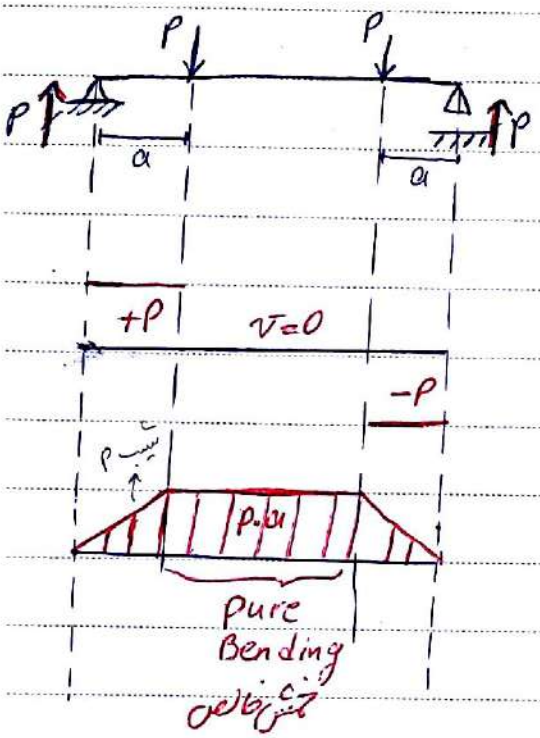


نمودار نیروی برشی و گشتاور خمشی را اینها باید به صورت کامل باشد.

Subject:

Year. Month. Date. ( )

مثال



نمودار استاد خمشی تنها در صورتی افقی می‌شود که نیروی برشی صفر باشد

تنها یک نیروی داخلی وجود دارد ← استاد خمشی داشته باشیم

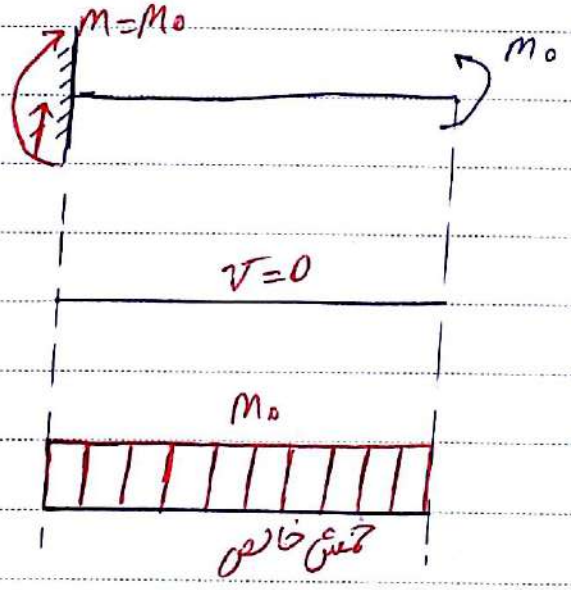
خمش خالص pure Bending

استاد پیچشی ←

pure torsion پیچش خالص

در صورتی که تنها یک نیروی داخلی وجود داشته باشد آن استاد پیچشی باشد

* در حالت خمش خالص مقدار نیروی برشی همیشه صفر است



Subject:
Year. Month. Date. ( )

محاسبه‌ی تنش‌های نرمال ناشی از خمش خالص

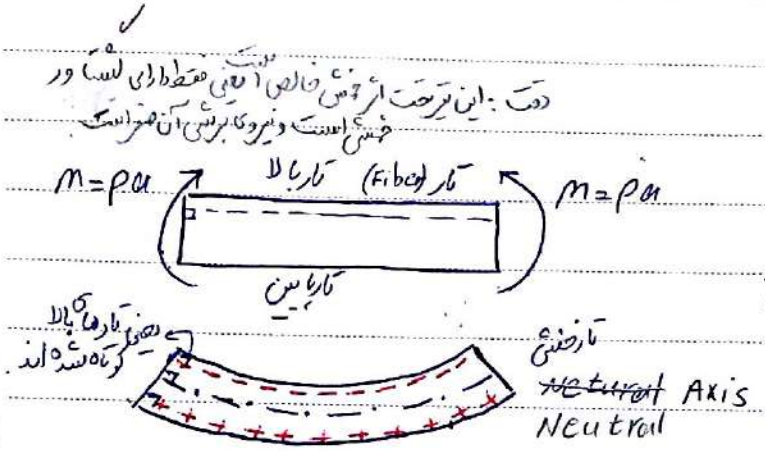
تیر اول - برنولی

Euler - Bernolli Beam

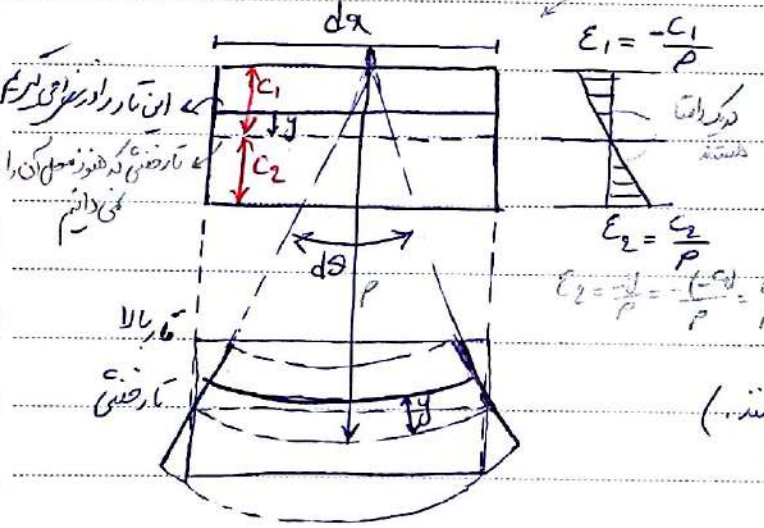
فرضیات اول:

* در اثر تنش و خمش باید تغییر شکلی بشکل یکنواخت داشته باشیم.
* به خطوط طولی تیر، تار می گویند.
* برای تغییر شکل، بعضی از تارها باید کشیده و بعضی دیگر فشرده شوند.
* تار خنثی: تاری که کشش و فشار در آن صفر است و طول آن ثابت است.

دقت: این تیر تحت اثر خمش خالص (یعنی فقط دارای لنگر خمشی است و نیروی برشی آن صفر است)



در این تیر مقطع عرضی می‌تواند به شکل‌های مختلف باشد



المانی از تیر:

در صورت خمش، مقطع عرضی که مسطح بود، مسطح می ماند.

1- مقطع مسطح، مسطح باقی می ماند.

2- تارهای طولی و صفحات عرضی، عمود هم باقی می مانند.

مصالحی که در تیر برای خمش مورد بررسی قرار می دهیم:

مصالح الاستیک و خطی (از قانون هوک تبعیت کنند.)

ρ: شعاع انحنای تار خنثی

c_1: فاصله‌ی تار خنثی از تار بالا

c_2: فاصله‌ی تار خنثی از تار پایین

$$dx = \rho \cdot d\theta$$

طول تاری به فاصله‌ی y از تار خنثی بعد از تغییر شکل $ds' = (\rho - y) \cdot d\theta$

کرنش تابعی خطی بر حسب y است.

$$\varepsilon(y) = \frac{(\rho - y)d\theta - \rho \cdot d\theta}{\rho \cdot d\theta}$$ کرنش در تاری به فاصله y از تار خنثی

کرنش‌ها به صورت خطی در مقطع توزیع شده‌اند.

$$\boxed{\varepsilon_y = \frac{-y}{\rho}}$$

توزیع تنش‌ها

$$\sigma = E\varepsilon = \frac{-Ey}{\rho}$$ تنش قائم در تاری به فاصله‌ی y از تار خنثی

تنش هم تابعی خطی بر حسب y است. (در اثر خمش خالص، تنش قائم تیر تابعی خطی بر حسب y است.)

P4PCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

آیا جهت تنش‌ها هم است؟ خیر

صلبیت نقطه تحت فشار

$\sigma_1 = \frac{-EC_1}{\rho}$

$C \rightarrow$ فشار

$T = C$

$I \leftarrow$ کشش

$\sigma_2 = +\frac{EC_2}{\rho}$

باید نیروی بخش کششی و نیروی بخش فشاری برابر شود.

چون نیروی محوری (کشش یا فشار نداریم) باید مجموع σ_1 و σ_2 صفر شود.

معادله‌ی تعادل و قانون صادق

$$\int_A \sigma \, dA = 0 = N = 0$$

dF

داریم المانی از تیر را که تحت خمش خالص است یعنی تنها لنگاور خمشی به آن وارد می‌شود را بررسی می‌کنیم پس نیروی محوری آن باید صفر باشد.

$$\int \frac{-Ey}{\rho} dA = 0$$

برای یافتن مرکز سطح: $y_c = \frac{\int y \, dA}{\int dA}$

که y را نسبت به یک محور دلخواه در راستای تیر در نظر می‌گیریم

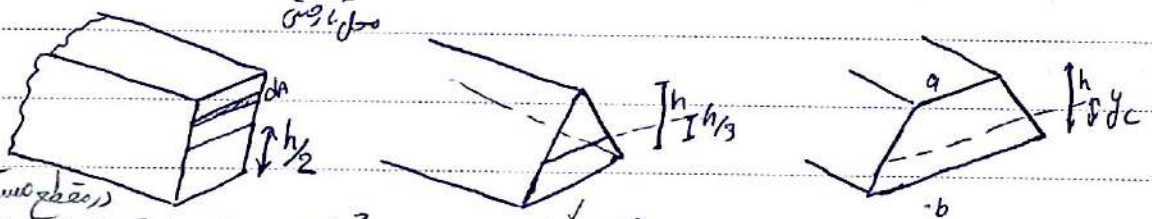
$$\frac{-E}{\rho} \int y \, dA = 0$$

$$-\frac{E}{\rho} \cdot A \cdot y_c = 0 \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y_c = 0 \end{cases} \rightarrow$$ موقعیت تار خنثی

تار خنثی در مرکز سطح * قرار دارد.

برای یافتن محل تار خنثی باید y را بیابیم و تار خنثی را در آن نقطه عبور می‌دهیم.

محل تار خنثی



در مقطع مستطیل مرکز سطح (موقعیت تار خنثی) در محاسبه‌ی I از تار پایین $\frac{h}{2}$ است

$I = \frac{bh^3}{12}$

$I = \frac{bh^3}{36}$

$y_c = \frac{2a+b}{a+b} \cdot \frac{h}{3}$

معادله‌ی تعادل و قانون صادق

$$\int_A \sigma \, y \, dA = M$$

$$\int_A \frac{-E \cdot y}{\rho} y \, dA = M$$

گشتاور نیروی بخش فشاری و گشتاور نیروی بخش کششی هم‌جهت بوده و مجموع آن‌ها برابر گشتاور خمشی است

(گشتاور خمشی هم در واقع به صورت یک نیروی کنترل در سطح عمل می‌کند)

$$\frac{-E}{\rho} \int y^2 \, dA = M \Rightarrow M = \frac{-EI}{\rho}$$

$I_{xx} = I$

از این به بعد به جای I_{xx} از I استفاده می‌کنیم

* در خمش تیرها I نسبت به محور تار خنثی محاسبه می‌شود.

$$\sigma = E\varepsilon = \frac{-Ey}{\rho} \Rightarrow -\frac{E}{\rho} = \frac{\sigma}{y} \Rightarrow M = \left(\frac{-E}{\rho}\right) I$$

$$\Rightarrow M = \frac{-\sigma}{y} I$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{-My}{I}$$

در y مثبت تنش منفی و برعکس

$$\sigma = \frac{M \cdot y}{I}$$

PAPCO

تنش در فاصله‌ی y از تار خنثی

$$\sigma = \frac{My}{I}$$

دقت: به علامت تنش کششی و فشاری دقت شود.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\begin{cases} \sigma = \frac{N}{A} \\ \tau = \frac{T\rho}{J} \\ \sigma = \frac{My}{I} \end{cases}$$

* ما این روابط را با فرض وارد شدن گشتاور خمشی مثبت M نوشتیم (حال اگر ...) در کشش
در پیچش
در خمش (تابعی خطی برحسب y)

* در فرمول تنش قائم در خمش (که یکی از پارامترها را مثبت وارد می‌کنیم) وابسته به مسئله به تنش علامت مثبت برای تار کششی یا منفی برای تار فشاری می‌دهیم.

تنش ماکزیمم کششی و فشاری در دو تار حرج می‌دهد.

تنش ماکزیمم کششی و فشاری در تار بالا و پایین رخ می‌دهد.

دنبال کشش فشار است

$$\sigma_{max} = \frac{MC_2}{I} = \frac{M}{I/C_2}$$

تار $y = c_2$ بیشترین کشیدگی

$$\sigma_{min} = \frac{M \cdot C_1}{I} = \frac{M}{I/C_1}$$

تار $y = c_1$ بیشترین فشردگی

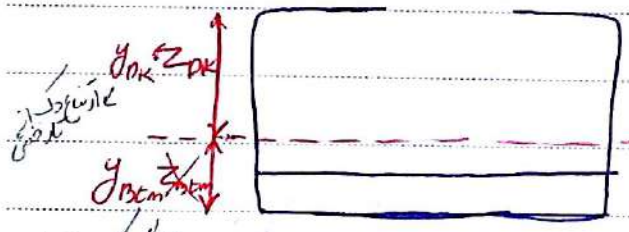
$$S = \frac{I}{C} =$$

اساس مقطع ← جزو مشخصات هندسی مقطع

Section Modulus

فاصله‌ی دورترین تار از تار خنثی

در کشتی تار خنثی به کف کشتی نزدیک‌تر است چون سطح مقطع پرکف کشتی نزدیک‌تر است.



فاصله‌ی تار بالا از تار خنثی

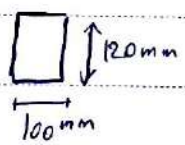
فاصله‌ی تار پایین از تار خنثی

$$\frac{I}{Z_{DK}} = Z_{DK}$$

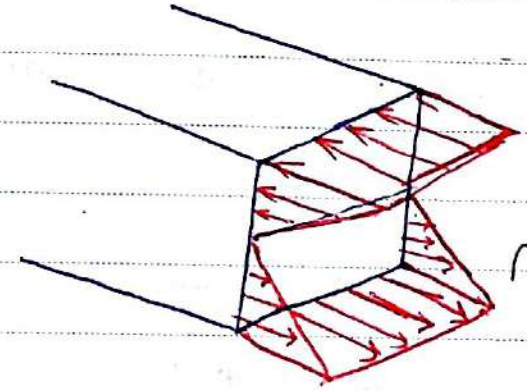
$$\frac{I}{Z_{Btm}} = Z_{Btm}$$

مثال)





توزیع تنش‌های حاصل ناشی از خمش



جهت تنش‌ها در این شکل هم مشخص است

نیز تحت خمش خالص قرار دارد.

P4PCO

Subject: قائم تحت اثر خمش

Year. Month. Date

برای یافتن توزیع تنش σ در مقطع دلخواهی از تیر ابتدا آن را از طریق یافتن مرکز سطح می‌یابیم، سپس ثانیاً دوم سطح نسبت به تار خنثی (I) را می‌یابیم و بعد تنش قائم ماکزیمم و مینیمم را می‌یابیم

با توجه به این که توزیع تنش به صورت خطی است

$$I = \frac{BH^3}{12}$$

اساس مقطع: $S = \frac{BH^2}{6} = \frac{(100)(120)^2}{6} = 24\times10^4\ mm^3$

در مقطع مستطیلی $C_1 = C_2 = \frac{H}{2}$

$$\sigma_{min/max} = \frac{2\times10^6\ N.mm}{24\times10^4\ mm^3} = \frac{100}{12}\ \frac{N}{mm^2} = 8.5\ mpa$$

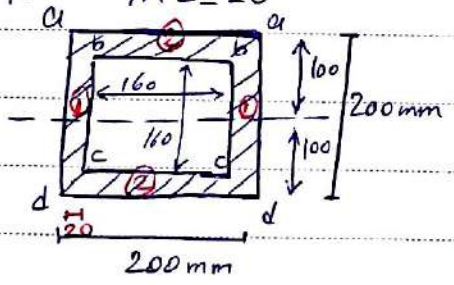
$$\sigma = \pm \frac{M.y}{I}$$

در مقطع مستطیلی $\sigma_{max/min} = \pm \frac{M}{S}$ ← اساس مقطع: $\frac{I}{c}$

تنش قائم ماکزیمم و مینیمم ناشی از خمش را می‌دهد

σ_{max} و σ_{min} در لبه‌های مقطع با هم برابرند.

$M = \pm 20\ KN.m$



مثال) توزیع تنش نرمال = ؟

برای یافتن توزیع تنش نرمال در مقطع باید توجه به نکات زیر

ابتدا باید موقعیت تار خنثی را از طریق یافتن مرکز سطح بدست آوریم و سپس I را برای مقطع بدست آوریم

برای برقراری روابط زیر که در اینجا اثبات کردیم باید:

$(h \ll L)$ $\sigma = \frac{My}{I}$ ← تنش خالص

تیر متقارن (در غیر این صورت: تنش نامتقارن)

تیر منشوری: مشوری ▭ غیرمنشوری ▭

مصالح الاستیک

چون تار خنثی مقطع و مرکز سطح بر هم منطبقند:

$$I = I_2 - I_1 = \frac{200^4}{12} - \frac{160^4}{12}$$

از روش دیگر: $I = I^{①} + I^{②}$

$$I^{①} = 2\left(\frac{20\times200^3}{12}\right) = 2.6\times10^6$$

$$I^{②} = 2\left(\frac{160\times20^3}{12} + 160\times20\times90^2\right) = 52\times10^6$$

$$I = 54.6\times10^6$$

$I_{nn} = I_{n'n'} + Ad^2$

برای مربع $I_{xx} = I_{x_cx_c} + Ad^2$

فاصله مرکز آن سطح تا محور xx

$I_{x_cx_c} = \frac{bh^3}{12}$ ▭ h, b

Subject:

Year. Month. Date. ( )

تیر و توخالی بودن تیر در I آن ایجاد تغییری کند. (گرچه I بیشتر یا کمتر یعنی مقدار ماده‌ی بیشتری در فاصله‌ی دورتری از تار خنثی قرار باشند، تنش لهم کاهش می‌یابد. (جمله‌ی دوم به این معناست که توخالی کردن باعث افزایش مقاومت در برابر تنش می‌شود.)

$$\sigma_{a-a} = -\frac{(20\times10^6)(100)}{54.6\times10^6} = -36.63 \text{ mpa}$$

آیا این مقطع تیر بود I بیشتری داشت پس نسبت به خمش مقاوم‌تر بود.

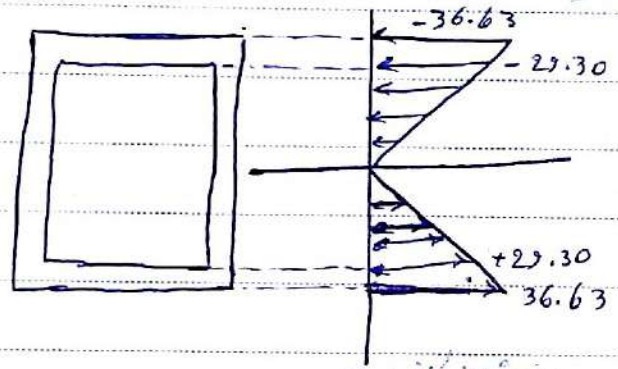
$$\sigma_{b-b} = -\frac{(20\times10^6)(80)}{54.6\times10^6} = -29.30 \text{ mpa}$$

در مقطع تیری نسبت به حالتی که بخشی از آن خارج شود، مقاومت خمشی بیشتری دارد.

$$\sigma_{c-c} = +\frac{(20\times10^6)(80)}{54.6\times10^6} = +29.30 \text{ mpa}$$

$$\sigma_{d-d} = \frac{(20\times10^6)(100)}{54.6\times10^6} = +36.63 \text{ mpa}$$

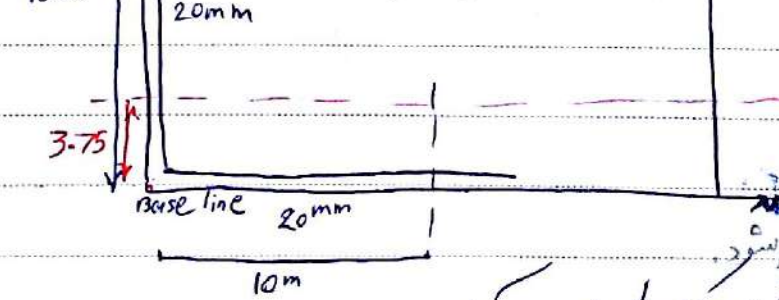
برای توزیع تنش نرمال بهتر است از تنش برآیند استفاده شود.



برای مقطع توخالی، توزیع تنش نرمال را مثل مقطع تیر رسم می‌کنیم.

* رسم مثبت و منفی‌ها برای توزیع تنش نرمال فایده‌ی ثانویه‌ای دارد و آن این است که جهت فلش‌ها در طرفین تار خنثی مخالف هم باشد توجه کرد.

* برای رسم توزیع تنش‌های برشی که تنها یک نوع ماده داشته باشند کافی است تنش در تار بالا و پایین محاسبه شود و سپس خطی وصل شود.



تنش برشی عرضی

می‌خواهیم ببینیم که در یک تیر با مقطع عرضی داده شده، ماکزیمم و مینیمم تنش قائم نسبت از تنش‌های برشی چند درصد تار خنثی

* می‌توان تنها بخش سمت چپ را برای بدست آوردن I در سطح محاسبه کرد اما برای بدست آوردن I باید کل سطح در نظر گرفته شود.

برای بدست آوردن تار خنثی باید مرکز سطح را بدست آوریم: (با توجه به تقارن)

$$y_c = \frac{\int y\,dA}{\int dA}$$

نسبت به مبدأ دلخواه گشتاورگیری کنیم.

Bottom A $y_{c_{bottom}}$

ف $= 10^m \times 0.020 \times 0.010 = 2\times10^{-3}$

Side $= 10^m \times 0.02 \times 5.00 = 1.0$

Deck عرشه $= 4.0 \times 0.02 \times 10.00 = 0.8$

1.802

PqPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$y_c = \frac{1.80}{0.48} = 3.75$$

ممان اینرسی نسبت به محور گذرنده از مرکز سطح

کف	مساحت A_m^2	$A \times y$	$I_{x'x'}$	$A.d^2$
10×0.02	0.2	0.02	$\frac{10 \times 0.02^3}{12} \simeq 0$	$0.2(3.75-0.1)^2 = 2.66$
Side				
10×0.02	0.2	1.0	$\frac{0.02 \times 10^3}{12} = \frac{20}{12} = 1.66$	$0.2 \times (5-3.75)^2 = 0.31$
Deck				
4.0×0.02	0.08	0.8	$\simeq 0$	$0.8 \times (10-3.75)^2 = 31.25$
			1.66	34.22

$$\frac{1}{2} I = 35.88 \ m^4$$

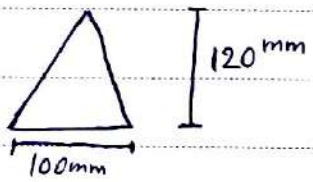
$$I = 71.76 \ m^4$$

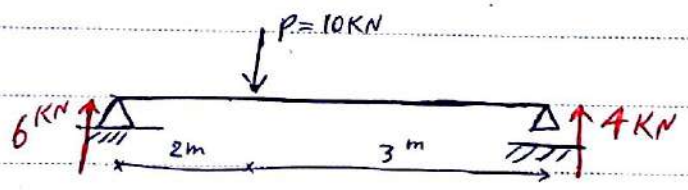
$$\sigma_{DECK} = \frac{(200 \times 10^3)^{N.m} (6.25)^{m}}{71.76^{m4}} = 17424.03 = 17.4 \ KPa$$

$$\sigma_{Btm} = \frac{(200 \times 10^3)(3.75)}{71.76} = 10451 \simeq 10.5 \ KPa$$

بیشترین تنش وارد عرشه بیشتر است پس یا باید ضخامت آن را زیاد کنیم یا از مواد با استحکام بیشتر در ساخت استفاده کنیم.
مثلاً می‌توان در عرشه از فولاد سخت ($\sigma_{ys} \simeq 350$: HTS) و در کف چون کشش و خمش کمی تحمل می‌کند می‌توان از فولاد نرم ($\sigma_{ys} = 245$: mild steel) استفاده کرد.

با افزایش ضخامت I افزایش و تنش کاهش می‌یابد چون فاصله مرکز سطح عایق جابجا می‌شود.





در این تیر خمش خالص نیست. ولی چون ارتفاع مقطع از طول تیر خیلی کوچک است هم‌چنان از این رابطه استفاده می‌کنیم.

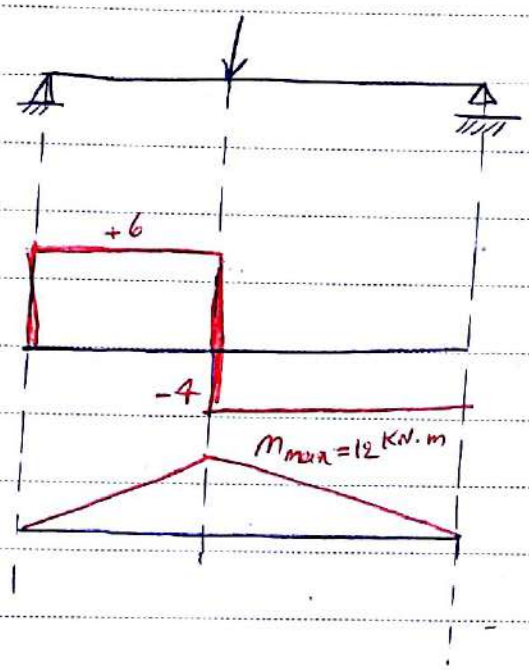
(چون مقطع مستطیل شکل است)

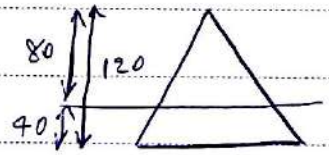
چون نیروی برشی داریم

Subject:

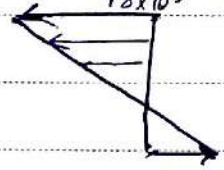
Year. Month. Date. ( )

$$I = \frac{BH^3}{36} = \frac{100 \times 120^3}{36} = 48 \times 10^5 \ mm^4$$





$$\sigma_{min} = \frac{(12 \times 10^6)(80)}{48 \times 10^5} = -200\ mpa$$



$$\sigma_{max} = \frac{(12 \times 10^6)(40)}{(48 \times 10^5)} = +100\ mpa$$

اگر به مانند شکل بارگذاری قطعه‌گاهی تیر را داده و توزیع تنش قائم است اثر خمش را خواستند، باید نمودار تنش برشی و گشتاور خمشی را رسم کرده و ماکزیمم گشتاور خمشی را یافته در روابط استفاده کنیم.

خمش ساده تیرها Simple Beam Theory

خمش متعارف

$$\sigma = \frac{M.y}{I}$$

فرضیات اولر-برنولی

- مقطع مسطح، مسطح باقی می‌ماند.
- مقطع عمود بر تار طولی، عمود باقی می‌ماند.

* رابطه‌ی $\sigma = \frac{N}{A}$ تا زمانی اعتبار دارد که نیرو در مرکز سطح اثر کند. در غیر این صورت آن را به مرکز سطح انتقال می‌دهیم (به علاوه‌ی یک لنگر خمشی)

* در خمش شکل مقطع در توزیع تنش مؤثر است. به ازای مقطع‌های مختلف I و مدول مقاومت مقطع S متفاوت است.

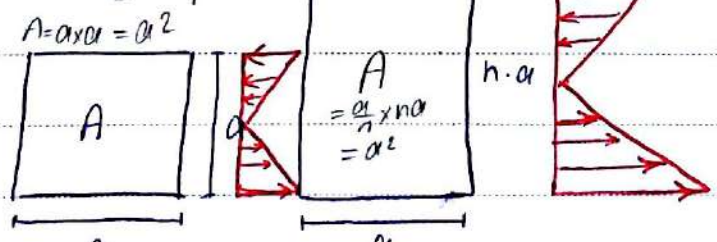
$$\sigma = \frac{N}{A} \pm \frac{M.y}{I}$$ ← اگر در جهت اعمال گشتاور خمشی نیروی محوری N هم وارد شود.

$$S = \frac{I}{C} = \frac{\frac{bh^3}{12}}{\frac{1}{2}h}$$

$$S = \frac{BH^2}{6}$$

$$S_{\square} = \frac{a^3}{6} = \frac{A.a}{6}$$

$$S_{\square} = \frac{(\frac{a}{n})(na)^2}{6} = n\frac{a^3}{6}$$



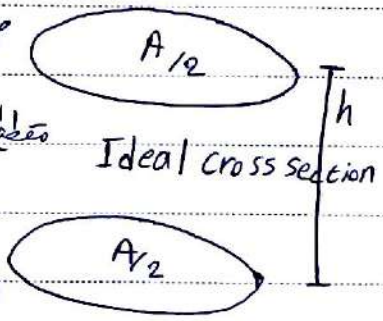
مستطیل از مربع برای مقاومت در برابر خمش بهتر است چون S بیشتری دارد.

از ارتفاع مقطع را n برابر و طول مقطع را $\frac{1}{n}$ کنیم یعنی در واقع در کل مساحت و تصویر شکل مقطع تغییر

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$\sigma = \frac{M \cdot y}{I}$ $\sigma_{max/min} = \pm \frac{M}{S}$ در مقطع مستطیلی

مقطع ایده آل در برابر خمش برای بیشترین اشکال مقطع می باشد.



چنین چیزی وجود ندارد

مقطع ایده آل نیمه بالا و نیمه پایین آن را در پایین و بالا قرار داده ایم

(چون دو جسم را نمی توان در هوا معلق کرد.)

$I = 2\left(i\simeq 0 + \left(\frac{A}{2}\right)\left(\frac{h}{2}\right)^2\right)$

$\simeq \frac{Ah^2}{4}$ I مقطع ایده آل

چون تأثیر دور تر بودن اجزا بر افزایش I بیشتر از افزایش c است پس بهتر است در مقطع ایده آل دو نصف مساحت را به شکل خط موازی با تار خنثی در فاصله ی دور قرار دهیم و در واقعیت برای متصل کردن این دو باید مستطیلی بسیار کشیده اند ما دنبال شکلی تا آ را داشته باشد

$S = \frac{I}{h_{max} \,/\, c} = \frac{\frac{Ah^2}{4}}{\frac{h}{2}} = A\frac{h}{2}$

برای ایجاد مقطع ایده آل مقاوم در برابر خمش، طوری اطلاعات را جابجا کنیم که بیشترین مقدار I را داشته باشیم.

$\frac{S_{Ideal}}{S_{\square}} = \frac{Ah/2}{Aa/6} = \frac{3h}{a}$ Even if $h=a$

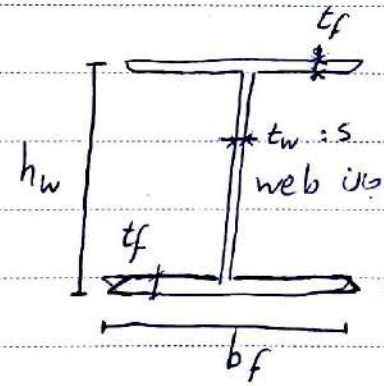
$S_{Id} \simeq 3S_{\square}$

اگر هم h بیشتر از a باشد هر چقدر بیشتر باشد اساس مقطع ایده آل از اساس مقطع مستطیل بزرگتر می شود.

بهترین حالت مقطع ایده آل مقطع مستطیل توخالی است که $S = \frac{ma^3}{6}$ (در شکل مثل ⊞) بهترین حالت هایی که بتوان با کمترین مقدار A بیشترین مقدار I را ایجاد کرد بهترین حالت است.

به همین خاطر تیرها را به شکل I می سازند.

بهتر است که ضخامت بال بیشتر و ضخامت جان کمتر باشد اما این نسبت نمی تواند خیلی زیاد شود چون در اثر وزن بال، جان دچار اعوجاج می شود.



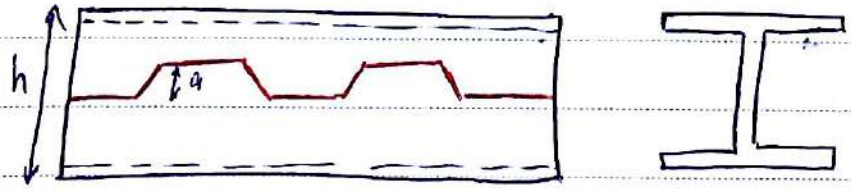
$I_{NP} = I$

ضخامت جان باید

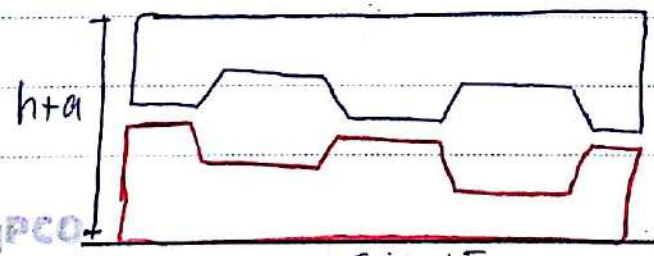
$t_w < \frac{1}{2} t_f$ ضخامت بال از ضخامت جان بیشتر باشد

8	12
14	20
X 20	10 X

نباید



هر چه تعداد مصالح دور تر از تار خنثی



RaPCO

تیر آلومینیوم

Subject:

Year. Month. Date.

محاسبه‌ی تنش قائم در تیرهای مرکب: تیرهایی که از چند نوع مصالح ساخته شده‌اند (یا مشخصات مکانیکی مختلف)

تیر ساندویچی

(مثال)

Steel	E_{St} , $\sigma_{St}^{\pm}$
Wood چوب	E_W , $\sigma_W^{\pm}$
Steel	E_{St} , $\sigma_{St}^{\pm}$

تیر مرکب

Composite beam

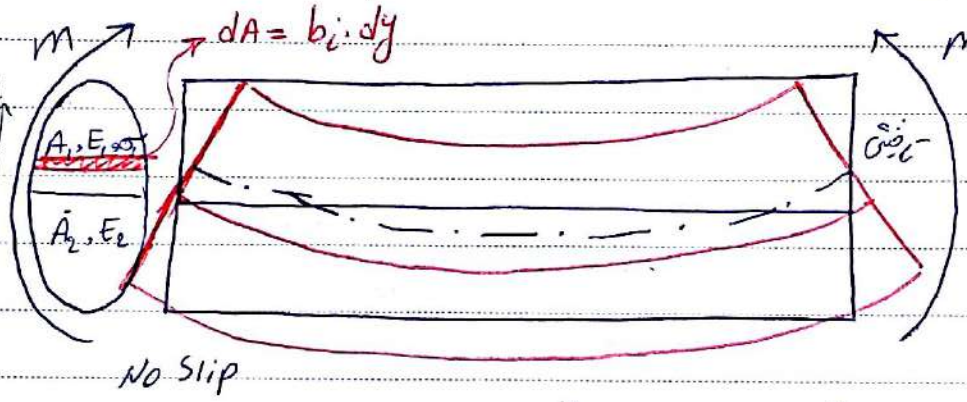
Compound beam

$\sigma_i = ?$

در تیر مرکب هیچ تنشی در صفحه‌ی اتصال رخ نمی‌دهد یا به تعبیر خیلی اولریون صادق است.

می‌خواهیم بدانیم در هر نقطه‌ی تیر مرکب، تنش قائم چه مقداری دارد.

فرض کنیم که تیر مرکب از دو ماده‌ی مختلف ساخته شده باشد:



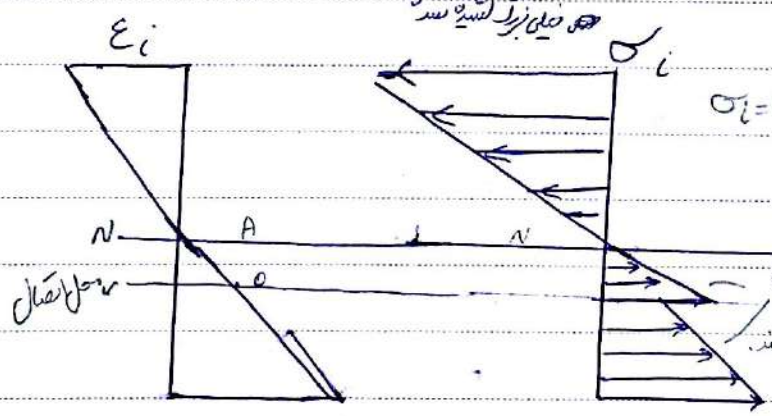
$$\varepsilon = \frac{y}{\rho}$$

ρ: شعاع انحنای تار خنثی در تیر مرکب.

همان قانون هوک صادق

چون تارهای تیر هم‌جنس

پس باید هم تغییر طول دهند



تنش‌های زبانه‌ی قطعات تابع y هستند

در مورد تیر ساندویچی:

$\sigma_i = E_i \varepsilon_i$

$$\begin{cases} \int \sigma \cdot dA = 0 \\ \int \sigma y dA = M \end{cases}$$

اگر کرنش در نقطه‌ی 1، N بود، تنش $E_1 \times N$ و $E_2 \times N$

تنش در هر نقطه‌ی تیر مرکب از رابطه‌ی $\sigma_i = E_i \varepsilon_i$ به دست می‌آید.

در نقاط اتصال دو ماده‌ی مختلف، چون ضریب‌های الاستیسیته مختلف و کرنش‌ها یکسان است پس تنش‌های تیر یکسان به وجود می‌آید.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$\int_A \sigma\, dA = 0$

$$\Rightarrow \int_{A_1} E_1 \frac{y}{\rho} dA + \int_{A_2} E_2 \frac{y}{\rho} dA = 0$$

با انتخاب کردن یک E مرجع (نرمالیزه کردن) Eها را یکی می‌کنیم. این E مرجع می‌تواند E یکی از مصالح باشد یا این که یک E خارج از مسئله و دلخواه باشد.

ضریب الاستیسیته مرجع E_0

$$\begin{cases} n_1 = \frac{E_1}{E_0} \\ n_2 = \frac{E_2}{E_0} \\ \vdots \\ n_N = \frac{E_N}{E_0} \end{cases}$$

ممکن $E_0 = E_1$
ممکن $E_0 = E_2$

$$\int_{A_1} \frac{n_1 E_0}{E_1} \frac{y}{\rho} b_1(y) dy + \int_{A_2} \frac{n_2 E_0}{E_2} \frac{y}{\rho} b_2(y) dy$$

$$n_1 \cdot b_1(y) = b'_1(y) \times dy = dA'_1$$
$$n_2 \cdot b_2(y) = b'_2(y) = dA'_2$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$n_N \cdot b_n(y) = b'_n(y) = dA'_N$$

عرض مقطع‌ها را n برابر می‌کنیم
مرکز این سطح جدید تا رضی است.

$$\Rightarrow \int_{A'_1} y\, dA'_1 + \int_{A'_2} y\, dA'_2 = 0$$

گشتاور اول یک سطح نسبت به یک محور برابر است با حاصل ضرب گشتاور اول همان سطحی که از آن تبدیل شده است.

$$\int_{A'} y\, dA' = 0 \Rightarrow y_c A' = 0 \Rightarrow \boxed{y_c = 0}$$

تا رضی مرکز سطح جدید همان تا رضی مرکز سطح اولیه است. تا رضی در مرکز سطح جدید است.

پس در تیرهای مرکب، با انتخاب یک E مرجع (E_0) و بدست آوردن n_1 و n_2 و ... عرض مقطع‌های هر مصالح را در این n_1، n_2 و ... ضرب کرده و سطح جدید را بدست آورده و تا رضی را در مرکز سطح این مقطع جدید قرار می‌دهیم.

حال برای رابطه دوم:

$$\int_{A_1} \frac{n_1 E_0}{E_1} \cdot \frac{y}{\rho} \cdot y\, dA + \int_{A_2} \frac{n_2 E_0}{E_2} \cdot \frac{y}{\rho} \cdot y\, dA = M \rightarrow \frac{E_0}{\rho} \underbrace{\int_{A'} y^2 dA'}_{I'} = M$$

پس سطح را به سطح تبدیل یافته تبدیل می‌کنیم و با سطح جدید مثل تیر معمولی برخورد می‌کنیم.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\frac{E_0}{\rho} = \frac{M}{I'}$$

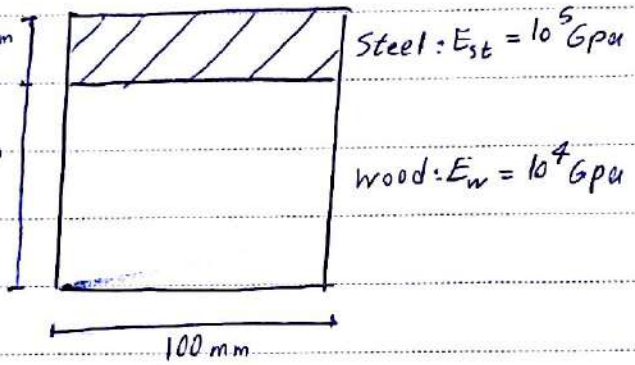
$$\sigma_1 = E_1 \frac{y}{\rho} = E_0 n_1 \frac{y}{\rho} = n_1 \frac{My}{I'}$$

$$\sigma_2 = E_2 \frac{y}{\rho} = E_0 \cdot n_2 \cdot \frac{y}{\rho} = n_2 \frac{My}{I'}$$

⋮

برای حل مسائل تیر مرکب
↓
انتخاب E_0 (ضریب الاستیسیته مرجع)
↓
بدست آوردن ضرایب n_1 و n_2 و ...
↓
تبدیل سطح به سطح تبدیل یافته
↓
بدست آوردن تار خنثی (مرکز سطح جدید) و I'
↓
استفاده از رابطه $\sigma_i = n_i \frac{My}{I'}$ برای مصالح

مثال) توزیع تنش‌ها را بدست آورید.



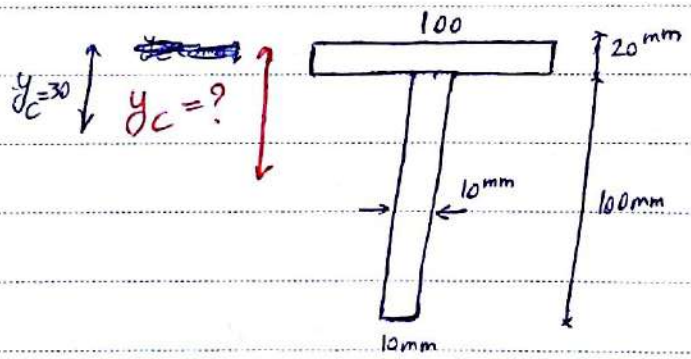
می‌توان E مرجع را E چوب یا فولاد یا یک E دیگر فرض کرد.

توزیع تنش در مقطع را رسم کنید. $M = 10^2$ KN.M

اگر مرجع $E_0 = E_{st} = 10^5$ باشد:

$$n_{st} = \frac{E_{st}}{E_0} = 1$$

$$n_{wood} = \frac{E_w}{E_0} = \frac{1}{10}$$



در نتیجه:

اگر مرجع $E_0 = E_w = 10^4$
در این مقاطع تار خنثی تغییر نمی‌کند.

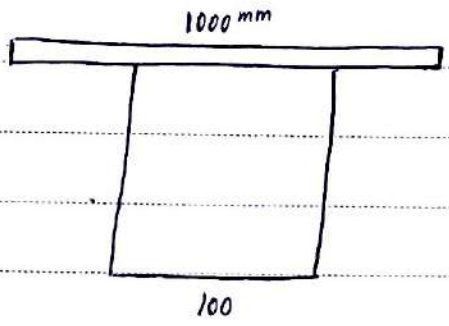
$$n_{st} = \frac{E_{st}}{E_w} = 10$$

$$n_w = \frac{E_w}{E_w} = 1$$

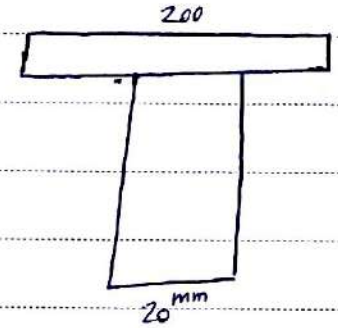
PdPCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )



اگر $E_c = 5\times10^4$ Gpa



$n_{st} = 2$

$n_w = \frac{1}{5}$

همان اینرسی این سطوح متفاوت است.

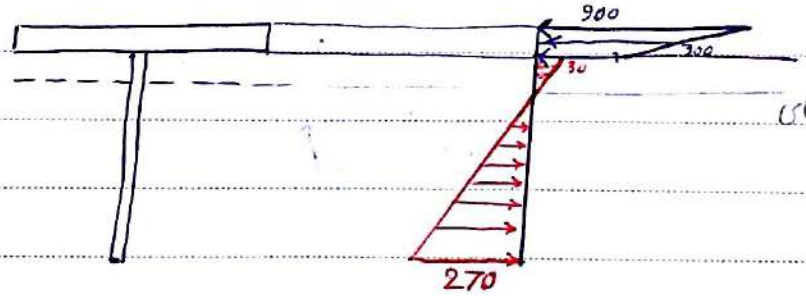
برای شکل اول:

$$y_c = \frac{100\times20\times10 + 10\times100\times70}{100\times20 + 10\times100} = 30^{mm}$$

$$I_{Tr} = I' = \frac{20\times100^3}{12} + 20\times100\times(10-30)^2 \quad \text{برای فولاد}$$

$$+ \frac{10\times100^3}{12} + 10\times100\times(70-30)^2 = 3'300'000^{mm^4} \quad \text{برای چوب}$$

transformed تبدیل یافته



برای رسم توزیع تنش تیرهای مرکب باید برای هرکدام از مصالح تنش های مرزی را محاسبه نمود.

$$\sigma_{st} = n_{st}\cdot\frac{M.y}{I_{Tr}} = (1)\frac{(100\times10^6)^{N.mm}\,y}{3.3\times10^6} \cong 30.y^{mm}\,(mpa)$$

در بالا تنش فولاد $\sigma_1 = 30\times30 = 900^{mpa}$

در محل اتصال به چوب $\sigma_1 = 30\times10 = 300$

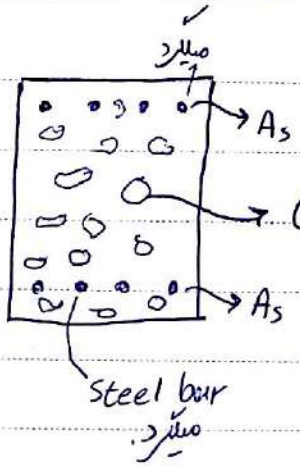
$$\sigma_w = n_w\cdot\frac{My}{I_{tr}} = \frac{1}{10}\cdot\frac{10^8.y}{3.3\times10^6} = 3y^{mm}\,mpa$$

σ در محل اتصال به فولاد $= 3\times10 = 30^{mpa}$

σ در پایین $= 3\times(90) = 270$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

تیر بتن آرمه



* برای تقویت تیر در برابر خمش:
① با مصالح قوی تر در برابر تنش کام
② با I شکل کردن
③ با خمیده کردن تیر در خلاف جهت انحنای احتمالی در اثر بارها

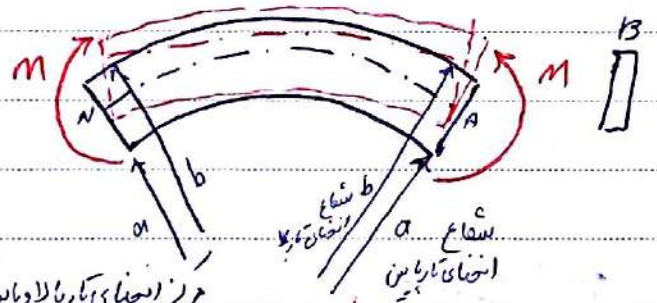
تیر خمیده



تیر مستقیم



محاسبه‌ی تنش در تیرهای خمیده:
در خمش خالص تیرها فرضیات اولر برنولی صادق می‌ماند.
دوار M شعاع انحنا بزرگتر می‌شود.
در ناحیه خنثی هیچ گونه تغییر طول رخ نمی‌دهد.



مرکز انحنای تارهای بالا و پایین یکی نیست

$R = \frac{b-a}{\ln b/a}$ شعاع انحنای مرکز سطح مقطع مستطیل $r_c = \frac{a+b}{2}$

$R \cdot d\phi = R' \cdot d\phi'$ تار خنثی تغییر طول نمی‌دهد.

طول اولیه: $(R+y) \cdot d\phi$ اگر تار خنثی را مبدا y ها در نظر بگیریم

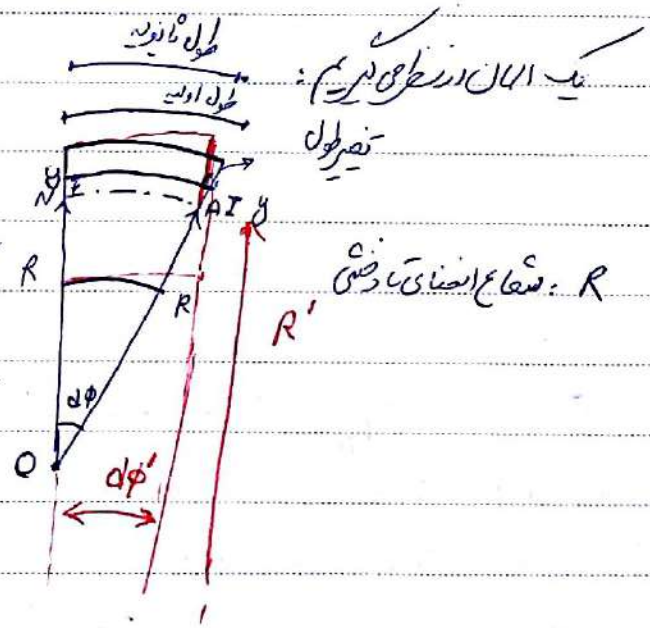
تغییر طول: $y \cdot d\phi'' = (R+y) d\phi'$ — جهت منفی می‌شود

$d\phi'' = d\phi - d\phi'$

$\varepsilon = \frac{y}{R+y} \cdot \frac{d\phi''}{d\phi}$

$\sigma = E \cdot \frac{d\phi''}{d\phi} \cdot \frac{y}{R+y}$

یک المان از سطح مقطع تیر:



R: شعاع انحنای تار خنثی

Subject:
Year. Month. Date

$\int_A \sigma dA = 0$

r شعاع انحنا برای هر نقطه

$$\int_{y_1}^{y_2} E\frac{d\phi''}{d\phi}\cdot\frac{y}{R+y}\cdot B\cdot dy = 0$$

این قسمت غیر صفر است پس قسمت دوم باید برابر صفر باشد

$$E\frac{d\phi''}{d\phi}\int_{r=a}^{b}\frac{r-R}{r}dr = 0$$

$y = r - R$

r: شعاع انحنای نقطه روی مقطع

* طبق فرضیات اولر-برنولی: $y = r - R = r' - R'$

* $B\cdot dr = dA$

* $R = \frac{\int dA}{\int \frac{dA}{r}}$ شعاع انحنای تار خنثی برای هر مقطع دلخواه تیر خمیده

$$B\int_a^b dA - R\int\frac{dA}{r} = 0$$

$$R\int\frac{dA}{r} = A$$ *

برای وقتی که مقطع مستطیلی باشد شعاع انحنای تار خنثی

$$R = \frac{A}{\int\frac{dA}{r}} = \frac{B(b-a)}{B\ln\frac{b}{a}} = \frac{b-a}{\ln b/a}$$

$\int \sigma y dA = M$

رابطه‌ی دوم

$$\int E\frac{d\phi''}{d\phi}\cdot\frac{y}{R+y}\cdot y\cdot dA = M$$

در صورتی که مقطع ذوزنقه‌ای تیر مستطیلی نباشد، شعاع انحنای تار خنثی $R = \frac{b-a}{\ln b/a}$

$$E\frac{d\phi''}{d\phi}\left[\int_A\frac{(r-R)^2}{r}dA\right] = M$$

$$E\frac{d\phi''}{d\phi}\left[\int r\cdot dA + R^2\int\frac{dA}{r} - 2R\int dA\right] = M$$

انتگرال اول سطح نسبت به محور اولر از مرکز انحنا این محور

$$E\frac{d\phi''}{d\phi}\left[r_c\cdot A + R\cdot A - 2RA\right] = M$$

$$E\frac{d\phi''}{d\phi}\left[A(r_c - R)\right] = M$$

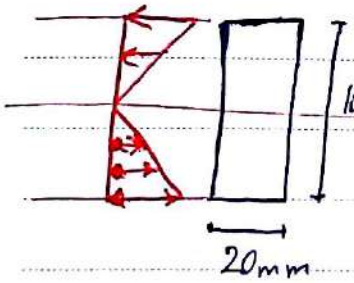
$$E\frac{d\phi''}{d\phi} = \frac{M}{A(r_c-R)} \Rightarrow \sigma = E\cdot\frac{d\phi''}{d\phi}\cdot\frac{r-R}{r}$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{M(r-R)}{Ar(r_c-R)}$$

تنش ناشی از تیر خمیده در حالت الاستیک تیر مستعمل

r_c: شعاع انحنای مرکز سطح

$M = 100$ KN.m



$$\sigma_{max/min} = \frac{\pm M}{S} = \frac{\pm 100\times10^6}{\frac{20\times100^2}{6}} = \pm\frac{6\times10^8}{2\times10^5} = \pm 3000\ Mpa$$

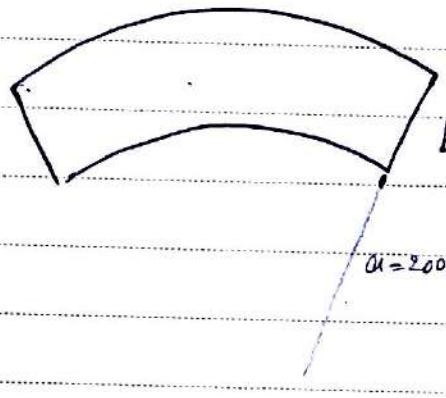
$y = r - R$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

در تیر خمیده، تار خنثی دیگر در مرکز سطح نیست

وقتی تیر خم شد، تار خنثی دیگر مرکز سطح نیست



$$R = \frac{A}{\int \frac{dA}{r}} = \frac{b-a}{\ln \frac{b}{a}} = \frac{300-200}{\ln \frac{3}{2}}$$

کل — مقطع مستطیلی

$$= \frac{100}{\ln 1.5} = 246.6^{mm}$$

$$r_c = \frac{a+b}{2} = 250$$

$$\sigma = \frac{M.(r-R)}{A.r(r_c-R)} \qquad y = r-R$$

در تار پایین

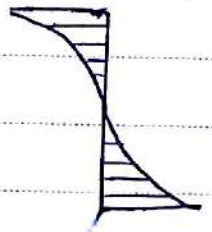
$$r = a = 200^{mm} \quad \sigma = \frac{(10^8)(200-246.6)}{(2000)(200)(250-246.6)} = +3426.4$$

در تار بالا

$$r = b = 300^{mm} \quad \sigma = \frac{(10^8)(300-246.6)}{(2000)(300)(250-246.6)} = 3926.4$$

توزیع تنش‌ها به صورت غیر خطی است

در تیر خمیده، توزیع تنش به صورت غیر خطی است



Shear stress in beams

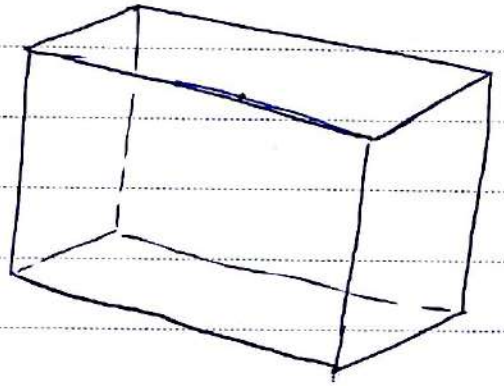
تنش برشی در تیرها:

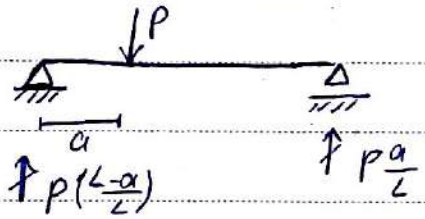
تا اینجا بررسی کردیم که گشتاور خمش چگونه ایجاد تنش عادی می‌کند. اکنون می‌خواهیم ببینیم تنش برشی چگونه ایجاد می‌شود و در تیرها چگونه باید آن را محاسبه کرد.

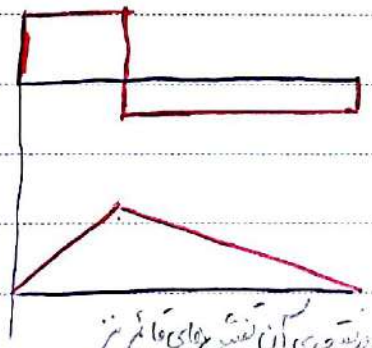
نیروی محوری		
N	$\sigma = \frac{N}{A}$	$\delta = \frac{NL}{EA}$
T	$\tau = \frac{T\rho}{J}$	$\phi = \frac{TL}{GJ}$
M	$\sigma = \frac{My}{I}$	?
V	$\tau = ?$	?

Subject:
Year. Month. Date. ( )

* خمش خالص بیشتر در تیرها رخ می‌دهد و معمولاً هم نیروی برشی و هم گشتاور خمشی داریم.







IF $V=0$ IF $V\neq 0$

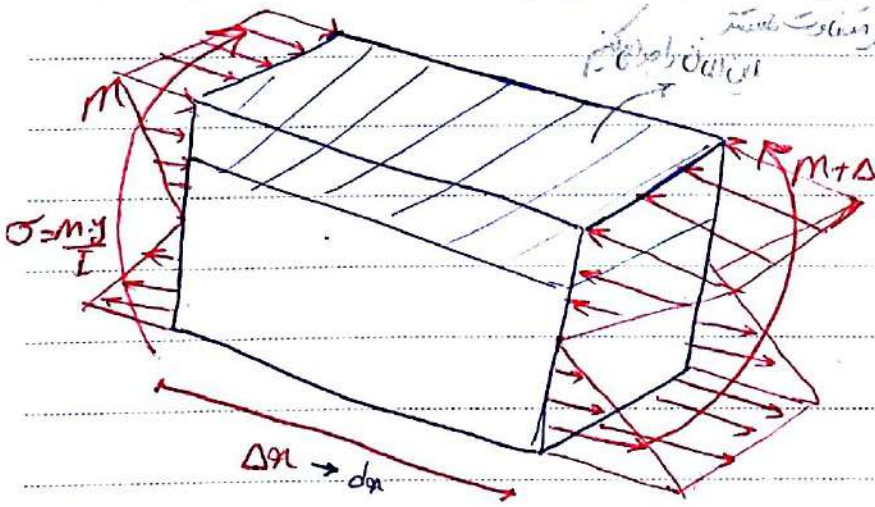
$\frac{dM}{dx} = V = 0$ $\frac{dM}{dx} = V$

$M = const$ $M(x) = Variable$ متغیر

در صورت صفر بودن نیروی برشی، گشتاور خمشی در تمام طول تیر ثابت است

اما در صورت غیر صفر بودن نیروی برشی، گشتاور خمشی در طول تیر تغییر می‌کند که نتیجه‌ی آن تنش‌های قائم نیز در مقطع تیر متفاوت هستند

تنش‌ها در طول تغییر می‌کنند



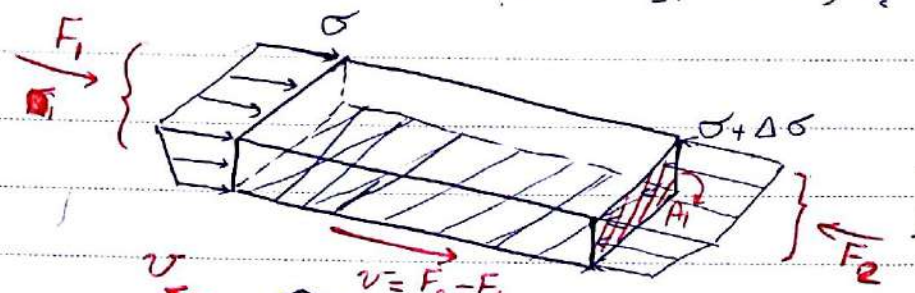
$\sigma+\Delta\sigma = \frac{(M+\Delta M)y}{I}$

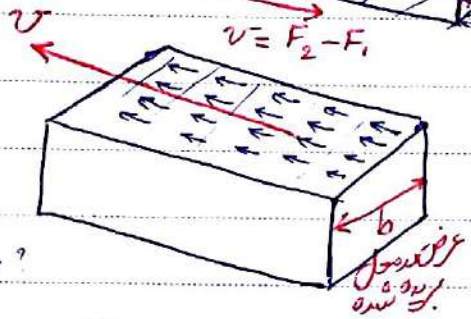
$= \frac{My}{I} + \frac{\Delta M y}{I}$

$\Delta\sigma = \frac{\Delta M\, y}{I}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

چون قطعه در حال تعادل است پس برآیند از آن باید در حال تعادل باشد.





$F_1 \neq F_2$ پس باید نیروی برشی در محل بریده شده باشد که ایجاد تنش برشی می‌کند تا تعادل قطعه را برقرار کند

$\tau \times b = q$ جریان برش
shear flow

چون این راه را طی کرد؟ (برآیند نیروهای وارد بر دو وجه محل برش است)

$$v = \tau \times b \times \Delta x = F_2 - F_1 = \int_{A_1} (\sigma + \Delta\sigma)\,dA - \int_{A_1} \sigma\,dA = \int_{A_1} \frac{\Delta M \cdot y}{I} \cdot dA$$

مساحت A — تغییر جمع دو انتگرال — فاصله از تار خنثی

$$\tau \times b \times \Delta x = \frac{\Delta M}{I} \int y \cdot dA$$

از دو طرف تقسیم بر Δx و حد وقتی $\Delta x \to 0$ آنگاه $\Delta M \to dM$ و $\frac{dM}{dx} = V$

$$\tau \times b = q = \left(\frac{\Delta M}{\Delta x}\right) \cdot \frac{1}{I} \int_{A_1} y \cdot dA$$

اگر $\Delta x \to 0$ آنگاه به dx تبدیل می‌گردد.

$$q = \frac{V}{I} \int_{A_1} y \cdot dA$$

A_1 سطح — لنگر اول

$$q = \frac{VQ}{I}$$

Q لنگر اول سطح — A_1 سطح مقطوع

جریان برش (صفحات موازی با محور تیر متغیر است.)

$$q = \tau \times t$$

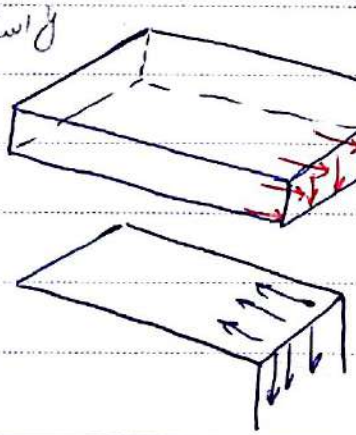
$$\tau = \frac{VQ}{I \cdot b} = \frac{VQ}{I \cdot t}$$

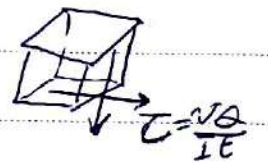
Q لنگر اول سطح مورد نظر نسبت به تار خنثی — t ضخامت محل بریده شده

τ تنش برشی برای هر بخش از مقطع

تنش برشی در تیر تابعی برحسب y است.

(ثبت شود که تنش‌های برش به صورت جفت عمل می‌کنند (دارای مکمل هستند.)
تنش‌های مکمل در سطح عرض با تنش‌های روی محل برش مساوی هستند.



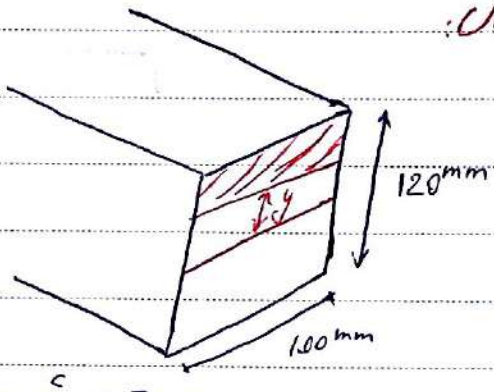


برای بدست آوردن تنش های برشی

Subject:

Year. Month. Date. ( )

مثال:

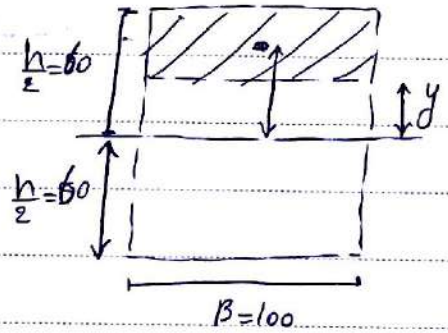


توزیع تنش برشی؟ $V = 10\ KN$

$$I = \frac{BH^3}{12} = \frac{(100)(120)^3}{12} = 144 \times 10^5\ mm^4$$

$$V = 10^4\ N$$

$$b = 100\ mm$$



$$Q = B \cdot \left(\frac{h}{2} - y\right) \cdot \left(\frac{\frac{h}{2} - y}{2} + y\right)$$

$$= B\left(\frac{h}{2} - y\right)\left(\frac{h}{4} + \frac{y}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} B \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

$$\tau(y) = \frac{V \cdot \frac{1}{2} B \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)}{\frac{Bh^3}{12} \cdot B}$$

$$= 6\frac{V}{Bh}\left(\frac{1}{4} - \frac{y^2}{h^2}\right) = 6\frac{V}{A}\left(\frac{1}{4} - \frac{y^2}{h^2}\right)$$

تنش برشی به صورت یک تابع درجه دو برحسب y است

$$\tau(y) = 1.5\frac{V}{A}\left(1 - 4\frac{y^2}{h^2}\right)$$

$$y = \pm\frac{h}{2} \rightarrow \tau\left(\pm\frac{h}{2}\right) = 0$$

یعنی تنش برشی در تارهای بالا و پایین صفر است

که درست است چون در این صورت روی سطح آزاد تنش برشی نداشتیم

در تار خنثی تنش برشی ماکزیمم

$$y = 0 \rightarrow \tau(0) = \tau_{max} = 1.5\frac{V}{A} = 1.5\frac{V}{Bh} = 1.5\frac{10^4}{100 \times 120} = \frac{15}{12} = 1.25\ mpa$$

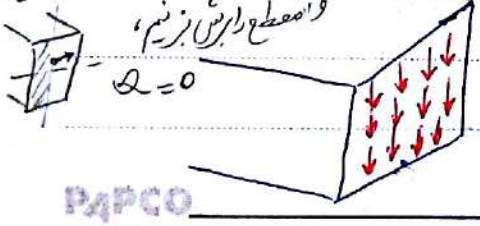
* تنش برشی در دورترین تار صفر و در تار خنثی ماکزیمم است.

در سطح مستقیل قطعه تنش برشی ماکزیمم داریم

چون اگر فرض کنیم که تنش برشی افقی داریم

و سطح را برش بزنیم،

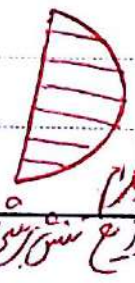
$Q = 0$



* در تار خنثی که $\sigma = 0$، τ_{max} است و در تارهای بالا و پایین که

$\tau_{min} = 0$ و σ_{max} است.

در تار خنثی که تنش قائم صفر است تنش برشی ماکزیمم است

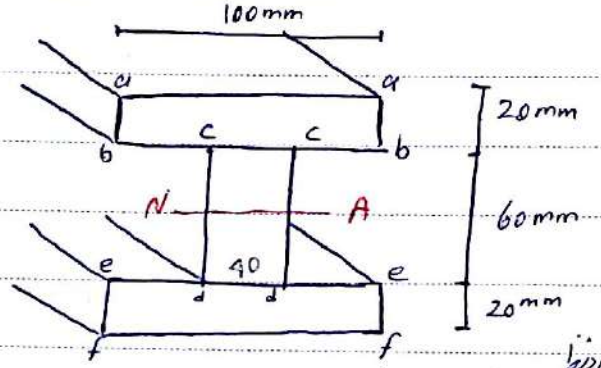


توزیع تنش برشی

PqPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

توزیع تنش برشی؟



برای رسم توزیع تنش برشی $V=100^{KN}$

اولین کار پیدا کردن تار خنثی و در واقع تنش برشی در مرز هاست

برای محاسبه‌ی Q می‌توان سطح بالای تار یا پایین آن را محاسبه کرد چون مورد نظر

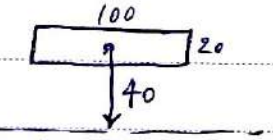
$$\int ydA = 0 \rightarrow y_1A_1 = y_2A_2$$

$$I = \frac{100\times100^3}{12} - \frac{60\times60^3}{12} = 72.5\times10^5\ mm^4$$

$Q_{a-a} = 0$ چون سطح نداریم

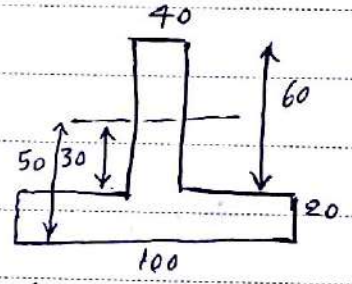
$Q_{b-b} = ?$

سطح بالای b-b



$100\times20\times40 = 80000$

سطح پایین b-b



$40\times60\times(0) + 20\times100\times40$

آیا هم برابرند.



اگر یکسان بود

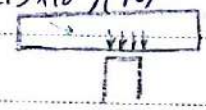
$$\tau_{b-b} = \frac{(100\times10^3)(80\times10^3)}{(72.5\times10^5)(100)} = 11.02^{mpa}$$

در مقطع زدن برای بدست آوردن تنش برشی، بهتر است برای بخش زیر تار خنثی از پایین و برای بخش بالای تار خنثی از بالا برش بزنیم.

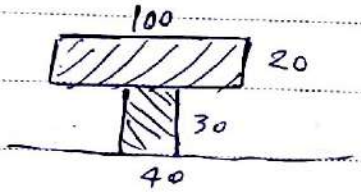
باهم ارزش متفاوتند

یکسان بود

$$\tau_{c-c} = \frac{(100\times10^3)(80\times10^3)}{(72.5\times10^5)(40)} = 275\ mpa$$



$Q_{N-A} = ?$



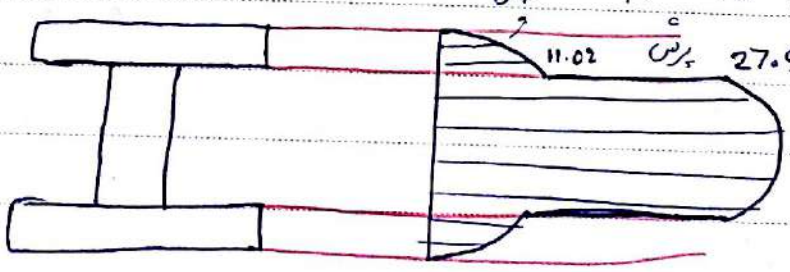
$$Q = 100\times20\times40 + 40\times30\times15$$

$$= 80\times10^3 + 18000$$

$$\tau_{N-A} = \frac{(100\times10^3)(98\times10^3)}{(72.5\times10^5)(40)} = 33.77\ mpa$$

تنش برشی قائم در کل مقطع دارای یک جهت است و فقط مقدار آن کم و زیاد می‌شود

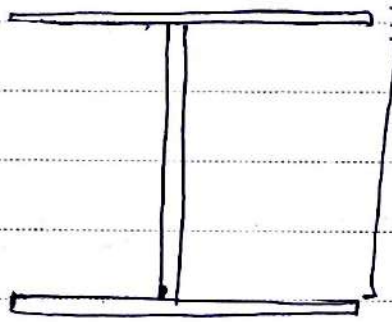
چون تنش برشی افقی را نمی‌توانیم به راحتی بدست آوریم، از آن صرف نظر می‌کنیم.



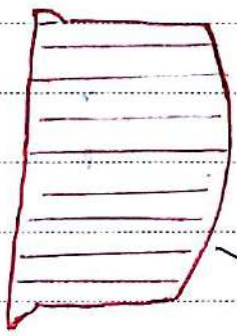
P4PCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

چون بال ها دارای t زیاد و a کم هستند



در تیرهای I شکل واقعی : بیشترین قسمت (قائم) بیشترین بخش تحمل تنش ها به جان ها است نه به بال ها

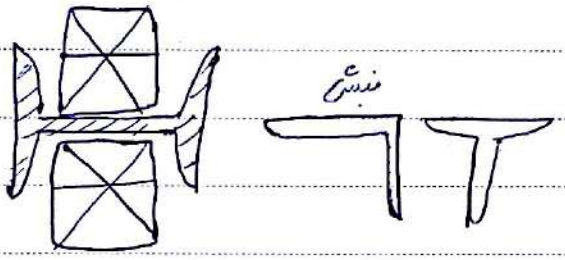


به طور ایده آل آن را مستطیل در نظر می گیریم

$\tau \simeq \frac{V}{A_{web}}$ در تیرهای I شکل واقعی به طور تقریبی می توان گفت

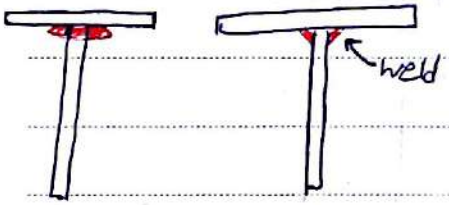
وسایل اتصال در تیر مرکب یا تیر ساخته شده

Built-in Beams



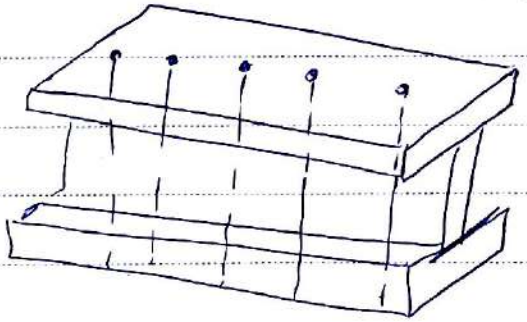
بعضی تیرها را از طریق نورد (ولتک) می سازند

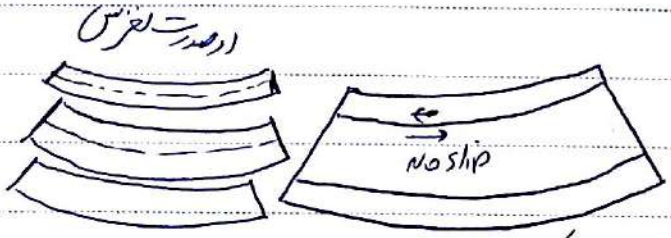
ممکن است از طریق جوش هم بسازند



قسمت های مختلف تیرها

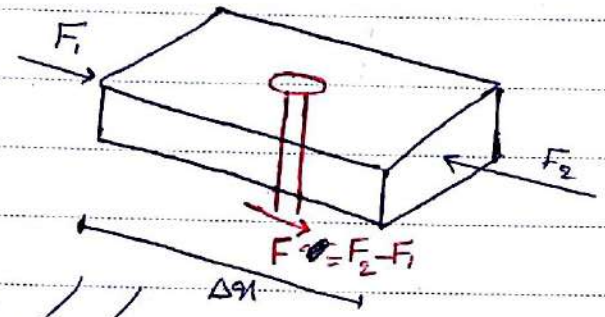
برای ساختن تیر ممکن است که از طریق میخ به هم وصل کنند که باید ببینیم از طریق چه فاصله ای میخ ها و با چه اندازه ای میخ های این قسمت ها را به هم وصل کنیم تا نلغزند. یعنی همه با هم خم شوند





در تیرهایی که از طریق میخ ساخته شده اند، این میخ ها هستند که نیروی برشی را تحمل می کنند.

Subject:
Year. Month. Date. ( )



$F_2 = \int (\sigma + \Delta\sigma)\, dA$, $F_1 = \int \sigma\, dA$

$F = F_2 - F_1 \leq F_d$

$= \int \Delta\sigma \cdot dA \leq F_d$

$= \frac{\Delta M}{I} \int y \cdot dA = \frac{\Delta M}{I} Q \leq F_d$

نیروی برشی مجاز میخ

S فاصله‌ی مرکز به مرکز میخ

$\left(\frac{dM}{dx} = V\right) \longrightarrow \frac{\Delta M}{\Delta x} = V$, $\Delta x = S$

$\Delta M = V \times S$

$F = \frac{V \cdot S}{I} Q = \frac{V \cdot Q}{I} \cdot S \leq F_d \Rightarrow q \cdot S \leq F_d$

Q: گشتاور اول سطحی که میخ باید آن را به تنهای اجزا متصل نگه دارد.

در تیرهایی که با میخ بهم متصل می‌شوند

این فرمول تنها در جایی که میخ دو صفحه را بهم متصل کند صادق است

میخ‌ها می‌توانند تحمل کنند

$F_d = \tau_{مجاز} \times \frac{\pi d^2}{4} \times$ تعداد میخ

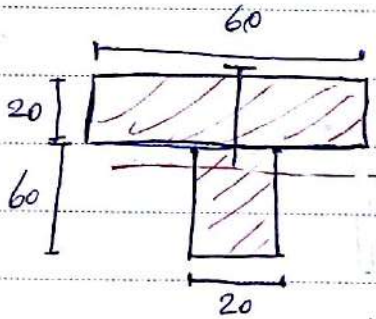
نیروی برشی در یک تیر بین میخ‌ها توزیع می‌شود.

مثال:

قطر میخ $\phi = 5^{mm}$

تنش مجاز برشی میخ 100^{MPa}

اگر $V = 100^{kN}$ فاصله‌ی حداکثر میخ‌ها؟



اگر میخ، سه بخش را بهم متصل نگه دارد، باید تنش برشی دو صفحه برآن وارد شود یعنی $(q_1 + q_2)\, s \leq F_d$ محاسبه کرد.

$q_1 = \frac{VQ_1}{I}$ $q_2 = \frac{VQ_2}{I}$

میخ نواحی دو بخش بالایی و پایینی تیر را به یکدیگر متصل نگه دارد. پس باید نیروی برشی که بین این دو قسمت وجود دارد را تحمل کند.

Q_2

اگر بخواهیم تار خنثی را نسبت به تار بالا بدست آوریم:

y_{NA} از بالا $= \frac{20\times60\times10 + 20\times60\times50}{20\times60 + 20\times60} = 30^{mm}$

$I = \frac{60\times20^3}{12} + 20\times60\times(30-10)^2 + \frac{20\times60^3}{12} + 20\times60\times(30-50)^2 = 1.36\times10^6\ mm^4$

$Q = 20\times60\times20 = 24000\ mm^3$

$\frac{VQ}{I} \cdot S \leq F_d$

$\frac{(100\times10^3)(24\times10^3)}{1.36\times10^6} \cdot S \leq 100 \times \frac{\pi\times5^2}{4} \times 1$

$S \leq 11$

وقتی $n=1$ ، S در واقع فاصله‌ی مرکز میخ در مرکز آن کوپله شده اول است.

چون فاصله‌ی میخ‌ها خیلی کم است یا باید قطر میخ‌ها را افزایش داد یا از مصالح بهتری برای ساخت میخ‌ها استفاده کرد.

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

خمش تیرها (ادامه)

گشتاور حد الاستیک M_y

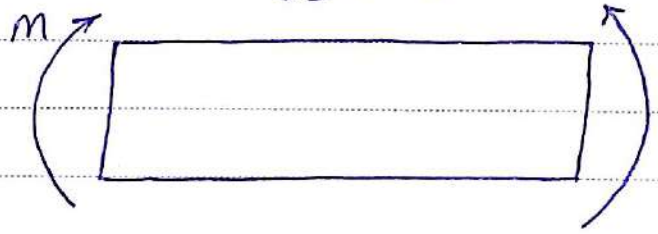
گشتاور حد پلاستیک M_p

حد الاستیک: همانی که تنش حداکثر به تنش حد جاری شدن (شروع منطقه پلاستیک) می‌رسد شروع تنش‌های غیر الاستیک

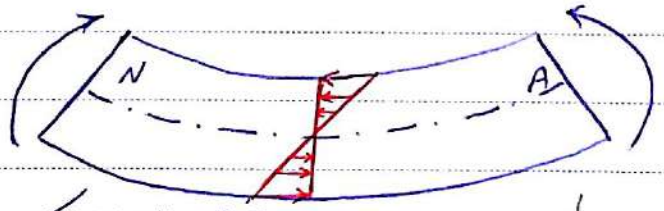
When $\sigma_{max} = \sigma_{yp}$

حد پلاستیک (یا نهایی): آخرین ظرفیت باربری، حداکثر بار قابل تحمل

خمش خالص تیر



برای بررسی گشتاور خمشی حد الاستیک و گشتاور خمشی حد پلاستیک حالت خمش خالص را بررسی می‌کنیم.

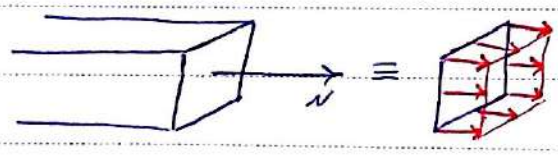


توزیع تنش در حالت الاستیک به صورت خطی

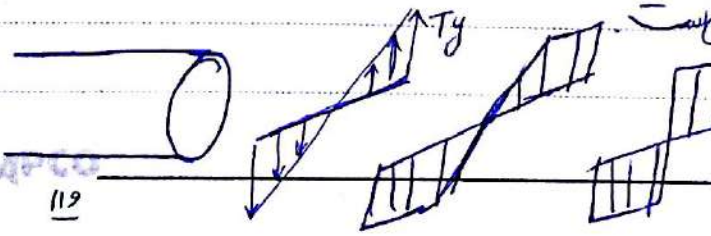
از مقاومت مصالح

$$\sigma = \frac{M \cdot y}{I} \quad \& \quad \sigma_{max} = \frac{M}{S}$$

در حالت کشش و فشار:
توزیع تنش ثابت بود.
در کل جسم از ملزی که فقط از یک مصالح ساخته شده بود) تنش‌شان به بار حد الاستیک خود می‌رسید



در پیچش: تنش تابعی خطی است.

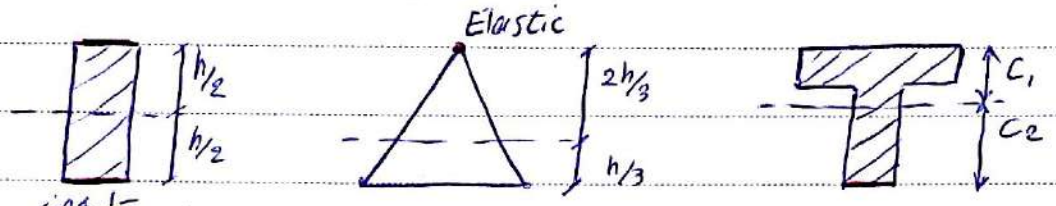


Subject:
Year. Month. Date. ( )

• ممکن است رفتار مواد در کشش و فشار یکسان نباشد و یا مقطع متقارن نباشد که در این صورت باید بررسی شود.

قرمزها زودتر به حد جاری شدن می رسند.

تنش بیشتری تحمل می کند لذا زودتر به حد الاستیک می رسد



مقطع عرضی

$M_y = \sigma_{yp} \cdot S$ (اساس مقطع)

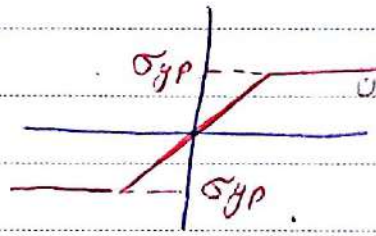
$M_y = \sigma_{yp} \cdot S^+$ (تار بالا)

$M_y = \sigma_{yp} \cdot S^-$

اساس مقطع برای تار پایین

$S^- = \frac{I}{C_2}$

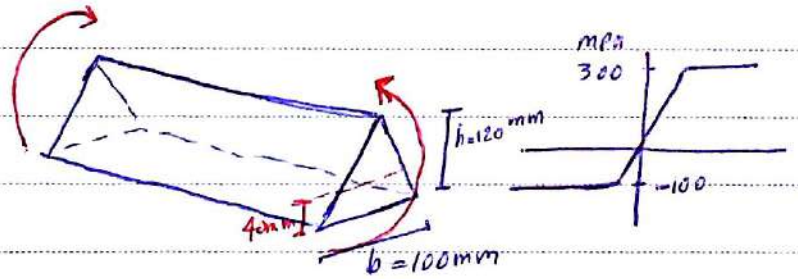
گشتاور حد الاستیک برابر گشتاوری است که به ازای آن اولین نقطه از ماده به تنش جاری شدن خود می رسد.



گشتاور تنش حد الاستیک $M_y = \sigma_{yp} \cdot S_{min}$

البته در صورتی که رفتار ماده در کشش و فشار یکسان باشد و هر دو تنش جاری شدن (در فشار با تنش جاری شدن در کشش) مساوی باشد. در این صورت باید بررسی شود.

(مثال)



برای بدست آوردن گشتاور حد الاستیک در مورد تیرهایی که رفتار آن ها در کشش و فشار یکسان نیست، باید M_y را برای تار بالا و پایین که دارای حداکثر تنش فشاری و کشش هستند بر طبق $\sigma = \frac{My}{I}$ بدست آوریم و با هم مقایسه کنیم هرکدام که کمتر بود، M_y تیر است

$$I = \frac{bh^3}{36} = \frac{(100)(120)^3}{36} = 4800000\ mm^4$$

اساس مقطع در تار بالا $S_{Top} = \frac{I}{\frac{2}{3}h} = \frac{4800000}{80} = 60000\ mm^3$

اساس مقطع در تار پایین $S_{Btm} = \frac{I}{\frac{1}{3}h} = \frac{4800000}{40} = 120000\ mm^3$

تنش فشاری در تار بالا $\sigma^- = \frac{M}{S_{Top}} = \frac{M}{60000}$

تنش جاری شدن در فشار $\sigma^- = -100\ MPa \longrightarrow M = 100 \times 60000 = 6 \times 10^6\ N.mm$

تنش کشش در تار پایین $\sigma^+ = \frac{M}{S_{btm}} = \frac{M}{120000}$

$\sigma^+ = 300\ MPa \longrightarrow M = 300 \times 120000$
$= 36 \times 10^6\ N.mm$

پس نتیجه می گیریم تنش جاری شدن $M = 6 \times 10^6\ N.mm$ است

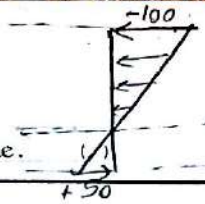
$M_{yp} = 6\ KN.m$ $= 6\ KN.m$

PAPCO

Subject:

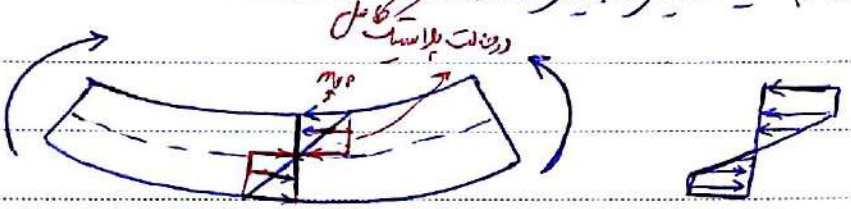
Year. Month. Date.

در لحظه ای که تیر مثلثی به بار حد الاستیک خود می رسد :



از رسیدن به بار حد الاستیک

مساحت از این به بعد مساحت بخش پلاستیک بیشتر و بیشتر می شود.



* در حالت پلاستیک دو رابطه ی جلو هم چنان برقرار است (چون روابط تعادل هستند.)

$$\begin{cases} \int_A \sigma \cdot dA = 0 \\ \int_A \sigma y\, dA = M \end{cases}$$

* با فرض این که رفتار ماده در کشش و فشار یکسان باشد،

در حالت پلاستیک تار خنثی در وسط سطح است مگر جایی که مساحت های بخش کشش و فشار مساوی باشند.

با فرض این که تنش های حدی کشش و فشار یکسان باشند → (در غیر این صورت نیست ***) بین آن ها رعایت شود.)

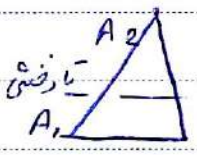
در حالت پلاستیک

$M = M_p$; $\sigma = \pm \sigma_{yp}$ (ممان داخلی در حالت پلاستیک)

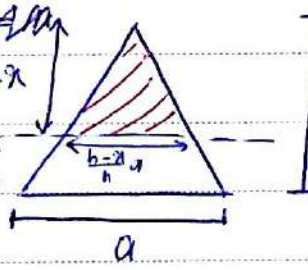
* در حالت پلاستیک، تنش در تار خنثی برابر σ_{yp} است

$$\int_A \sigma\, dA = 0 \longrightarrow \pm\sigma_{yp} \int_A dA = 0 \longrightarrow A_1 = A_2$$

مساحت ناحیه کششی و فشاری برابر



$\int_A \sigma y\, dA = M$



$A_1 = A_2 = \frac{1}{2}A$

$\frac{1}{2}(h-x)\left(\frac{h-x}{h}a\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}ha\right)$

$\frac{1}{2}\frac{(h-x)^2}{h}a = \frac{1}{4}hx$

$(h-x)^2 = \frac{h^2}{2}$

$h - x = \frac{h}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}h \simeq 0.707h$

$x = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}h \simeq 0.293h$

x ← موقعیت تار خنثی از پایین

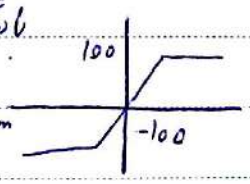
مساحت ناحیه کششی

مثال: فاصله ی تار خنثی از بالا در حالت پلاستیک $\frac{\sqrt{2}}{2}h$

مثال: $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}h$: " " " از تار پایین

مثال

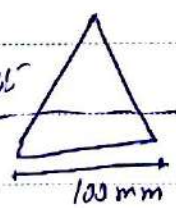
اگر نمودار تنش-کرنش به صورت



باشد

در صورتی که رفتار

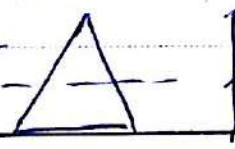
تار خنثی پلاستیک



$0.707 \times 120 = 84.84^{mm}$

$0.293 \times 120 = 35.16$

تار خنثی الاستیک



PAPCO

از طریق رابطه‌ی $\int \sigma \, dA = 0$ موقعیت تار خنثی پلاستیک در صورت برابر نبودن σ ها

و از طریق $M = \int \sigma \cdot y \cdot dA$ ، M_p بدست می‌آید.

Subject:

Year. Month. Date

$$\sigma_{yp}\left(\int_{A_1} dA + R\int_{A_2} dA\right) = 0$$

$$\int_A \sigma \cdot y \cdot dA = M$$

اگر سطح مقطع را به دو قسمت تقسیم کنیم:

$$\int_{A_1} +\sigma_{yp} \cdot y \cdot dA + \int_{A_2} -\sigma_{yp} \cdot y \cdot dA = M_p$$

$\bar{y}_1 \cdot A_1$, $\bar{y}_2 A_2$

$$\sigma_{yp}\left(\int_{A_1} y \, dA + \int_{A_2} y \cdot dA\right) = M_p$$

بخش کششی , بخش فشاری

چون لنگاورهای حاصل از σ_{yp} هم‌جهت هستند از هم صرف نظر می‌کنیم:

البته در صورتی که ارتفاع ناحیه‌ی کششی و فشاری یکسان باشد

$$\sigma_{yp} \cdot \frac{A}{2}\left(\bar{y}_1 + \bar{y}_2\right) = M_p \qquad M = \sigma S$$

اساس مقطع پلاستیک Z

$\bar{y}_1$: فاصله‌ی مرکز سطح ناحیه‌ی کششی تا تار خنثی پلاستیک

$\bar{y}_2$: " " " " فشاری " " " "

دقت شود که $\bar{y}_1$ و $\bar{y}_2$ هر دو مثبت هستند.

$\pm\sigma_{yp}$: $M_y = \sigma_{yp} \cdot S_{min}$

$M_p = \sigma_{yp} \cdot Z$

S_{min} : مقدار حداقل اساس مقطع الاستیک

Z : اساس مقطع پلاستیک

در مربع مستطیل:

$$I = \frac{bh^3}{12}$$

$$S^{\pm} = S_{top/Btm} = \frac{I}{h/2}$$

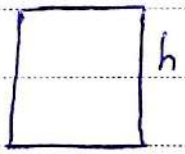
$$S = bh^2/6$$

$$M_y = \sigma_{yp}\frac{bh^2}{6}$$

$$M_p = \sigma_{yp}\frac{bh^2}{4}$$

$$M_p = 1.5\, M_y$$

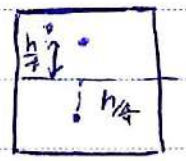
چون $Z = \frac{3}{2}S$



* در صورتی که ارتفاع ناحیه‌ی کششی و فشاری یکسان باشد، تار خنثی الاستیک و تار خنثی پلاستیک در مقطع مستطیل بر هم منطبق هستند.

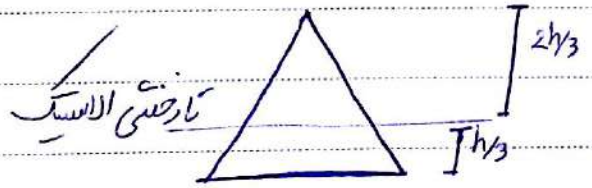
تار خنثی الاستیک ≡ تار خنثی پلاستیک

$$Z = \frac{1}{2}(bh)\left(\frac{h}{4} + \frac{h}{4}\right) = \frac{bh^2}{4}$$



$$\begin{cases} I = \frac{bh^3}{12} \\ S = \frac{bh^2}{6} \\ Z = \frac{bh^2}{4} \end{cases}$$

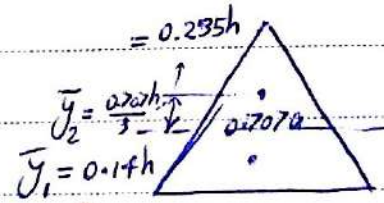
تار خنثی پلاستیک = تار خنثی الاستیک



$$I = \frac{bh^3}{36}$$

$$S_{min} = \frac{bh^3/36}{2/3h} = \frac{bh^2}{24}$$

$$M_y = \sigma_{yp} \cdot \frac{bh^2}{24} = 0.0416\, bh^2 \sigma_{yp}$$



$$\bar{y}_1 = \frac{2 \times 0.707a + a}{0.707a + a} \cdot \frac{0.293h}{3} = \frac{2.414}{1.707} \times \frac{0.293}{3} \times h$$

$$= 0.14h$$

$$\begin{cases} I = \frac{bh^3}{36} \\ S = \frac{bh^2}{24} \end{cases}$$

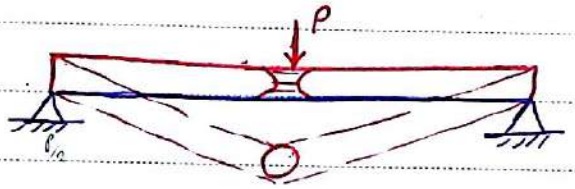
P4PCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

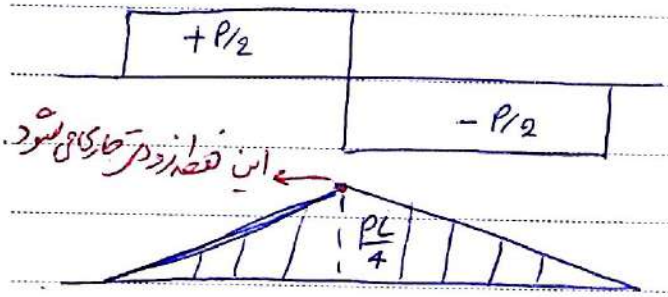
$$Z = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}ah\right)(0.235h + 0.14h) = 0.09375\,bh^2 \rightarrow M_p = 0.094\,bh^2\sigma_y$$

مفصل پلاستیک یا لولای پلاستیک



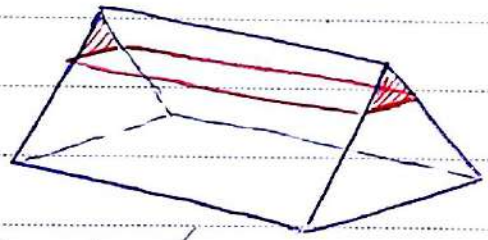
تیر را پایدار می‌شود. تیر همچنان جاری نمی‌شود.

نقطه‌ای که بار نیروی P مقاومت خود را از دست می‌دهد و مانند یک لولا عمل می‌کند و دیگر نمی‌تواند در برابر گشتاور خمشی مقاومت کند.



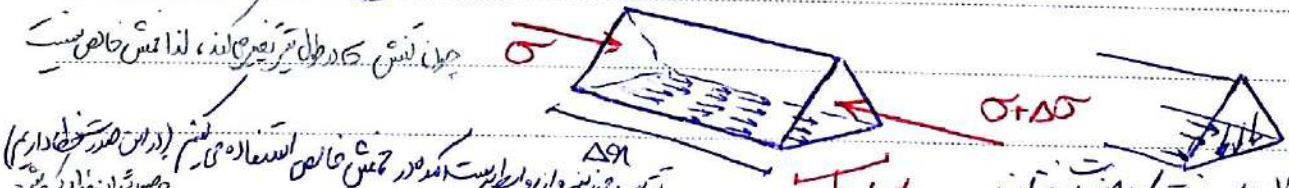
در صورتی که نمایش تکیه‌گاهی یک تیر ثابت باز گذاری را به ما داده باید نیروی برشی و گشتاور خمشی آن را رسم کرده و ببینیم که گشتاور خمشی در کدام نقطه بیشتر است. آن نقطه زودتر تسلیم شده و به صورت لولای پلاستیک درمی‌آید.

بازگشت به مبحث نیروهای برشی:



نیروی برشی

فرض می‌کنیم که تنش به صورت یکنواخت در سطح پخش شده باشد (در غیر این صورت نمی‌توانیم تنش را محاسبه کنیم).



چون تنش که در طول تیر تغییر می‌کند، لذا تنش خالص نیست

تقریب می‌زنیم و از روابط به دست آمده در تنش خالص استفاده می‌کنیم (در این صورت خطا داریم)

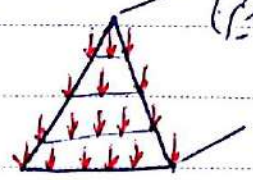
در صورتی این خطا کم می‌شود که طول از ضخامت خیلی بیشتر باشد

نامتقارن فقط در ضخامت مختلف

$$\tau = \frac{F}{b\cdot\Delta x} = \frac{\int \Delta\sigma\cdot dA}{b\cdot\Delta x} = \frac{\int \frac{\Delta m\cdot y}{I}\,dA}{b\cdot\Delta x}$$

$$= \frac{\Delta m}{\Delta x}\cdot\frac{1}{Ib}\int y\cdot dA = \frac{v}{I\cdot b}\int y\cdot dA = \frac{vQ}{Ib}$$

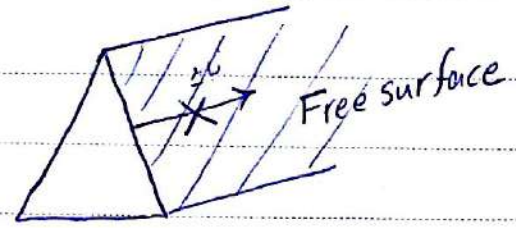
فرض می‌کنیم: (از طریق این فرض تنش متوسط در راستای قائم را به دست می‌آوریم)

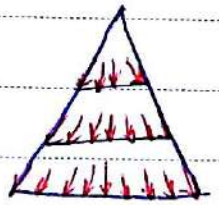


البته فرض ما غلط است چون در صورت داشتن تنش برشی در لبه، تنش مکمل در روی سطح آزاد به وجود می‌آید.

Subject:

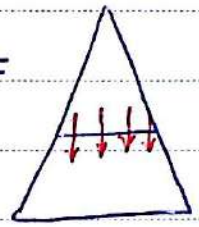
Year. Month. Date. ( )

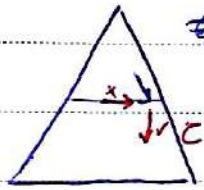




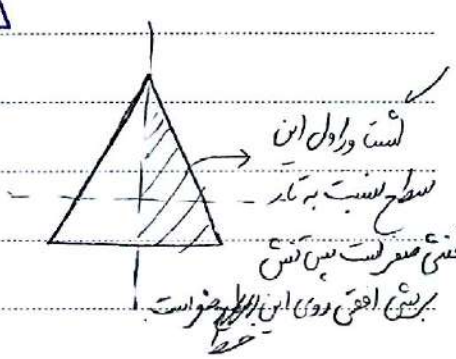
شکل صحیح:
اما دشوار است پس
از آن اشتباه می کنیم.

=

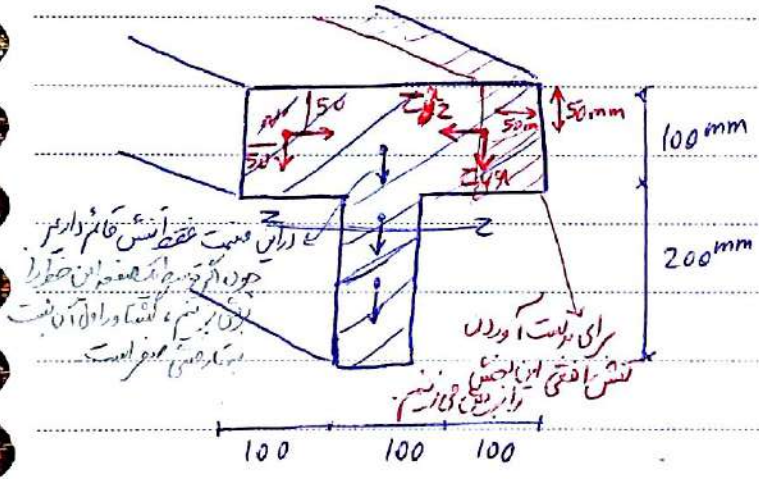




تنش افقی را هم انتگرال
به راست آوردیم پس از
تنش قائم استفاده
خواهیم کرد.
(البته در شرایط خاص می توانیم به راست آوریم.)



گشتاور اول این
سطح نسبت به تار
خنثی صفر است پس تنش
برشی افقی روی این سطح صفر است.



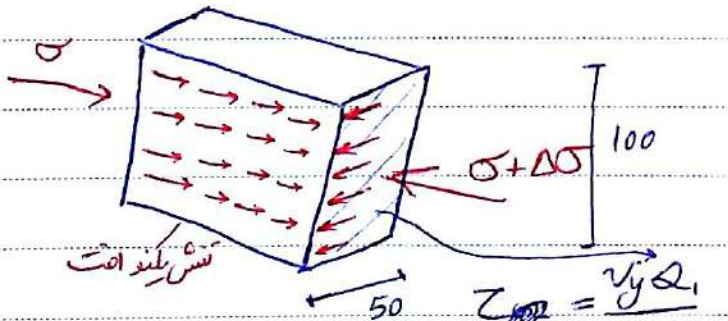
تنش برشی افقی و قائم را در نقطه مورد نظر محاسبه کنید.

$V_y = V_{N.} = 100^{KN}$

M_{zz}

در این قسمت فقط تنش قائم داریم.
چون اگر قسمتی که هشور این خطوط
بریده بزنیم، گشتاور اول آن نسبت
به تار خنثی صفر است.

برای به راست آوردن
تنش افقی این قسمت
را برش دقیق می زنیم.



تنش یکنواخت

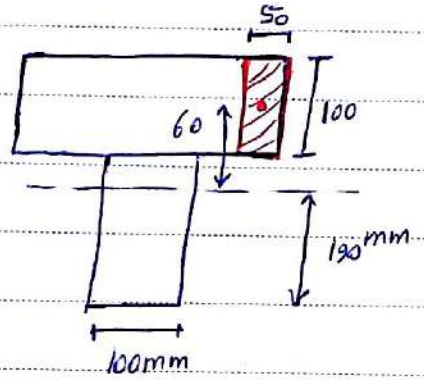
$\tau_{xz} = \frac{V_y Q_1}{I_{zz} \cdot 100}$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$\bar{y} = \frac{100\times300\times250 + 100\times200\times100}{100\times300 + 100\times200} = 190^{mm}$$ موقعیت تارخنثی

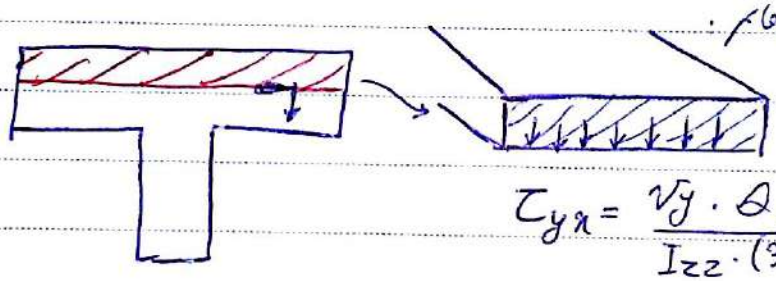
$$I_{zz} = \frac{300\times100^3}{12} + 300\times100\times(250-190)^2 + \frac{100\times200^3}{12} + 100\times200\times(100-190)^2$$
$$= 361\times10^6\ mm^4$$



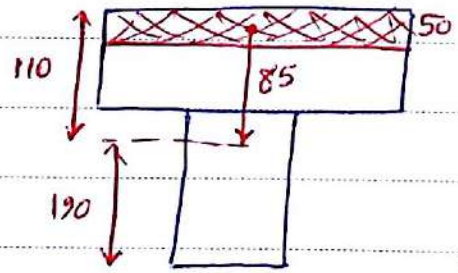
$$Q_1 = 50\times100\times60$$
$$= 3\times10^5\ mm^3$$

$$\tau_{yx} = \frac{(10^8)^N(3\times10^5)\ mm^3}{(361\times10^6)_{mm^4}(100)} = 831.02\ mpa$$

برای بدست آوردن تنش قائم:

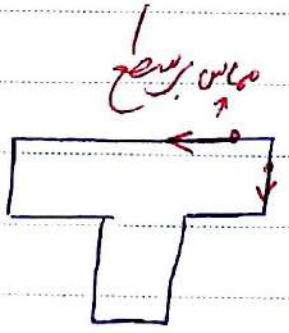


$$\tau_{yx} = \frac{V_y \cdot Q_2}{I_{zz}\cdot(300)}$$



$$Q_2 = 300\times50\times85$$
$$= 1.274\times10^6 mm^3$$

$$\tau_{yx} = \frac{V_y.Q_2}{I_{zz}(300)} = \frac{(10^8)(1.275\times10^6)}{(361\times10^6)(300)} = 1177\ mpa$$



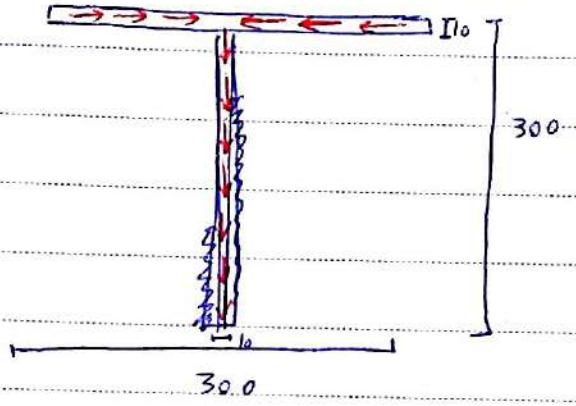
وقتی شود که تنش های برشی در لبه ها باید مماس بر سطح باشند تا در روی سطح آزاد تنش ایجاد تنش برشی حاصل نشود.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

c

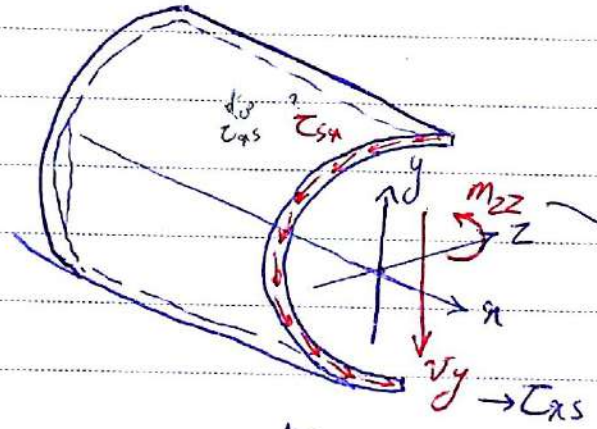
اگر مقطع ما خیلی نازک شود باید تنش برشی در لبه ها به سمت لبه ها باشد

تیر جدار نازک



در تیرهای جدار نازک چون جهت تنش معلوم است تنش را راحتی توان با دقت بالا حساب کرد.

تیر جدار نازک دلخواه زیر را در نظر می گیریم:



چون m_{zz} خالص است، پس نیروی برشی نداریم.

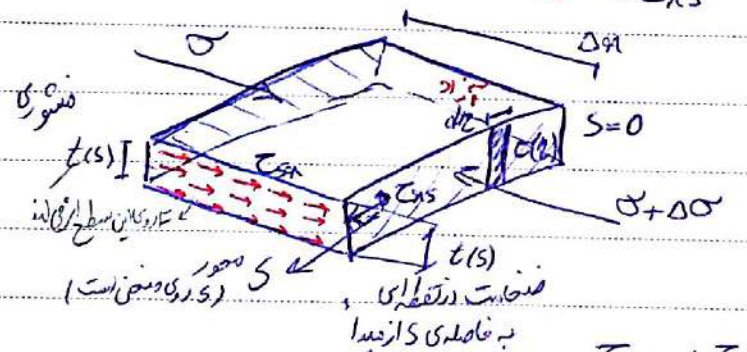
$$\sigma_{xx} = \frac{m_{zz} \cdot y}{I_{zz}}$$

(رابطه ی خمش متقارن)

(z و y محورهای اصلی)

در صورت مقاطع بسته ضخامت نمی گیریم

تیر ضخیم است.



به علت تفاوت σ ها نیروی F داریم.

این نیرو در مقطع بریده شده است.

$$\Delta\sigma = \frac{\Delta m \, y}{I}$$

$$\tau_{sx} = \tau_{xs} = \frac{F}{\Delta x \cdot t(s)} = \frac{\int_A \Delta\sigma \, dA}{\Delta x \cdot t(s)}$$

$$\tau_{xs}(s)\, t(s) = \frac{\Delta m}{I \cdot \Delta x} \int_A y \cdot dA$$

$$\frac{\Delta m}{\Delta x} = v_y$$

q shear flow جریان برش

$$q(s) = \tau(s)\, t(s)$$

$$q(s) = \frac{v_y}{I_{zz}} \int y \, dA$$

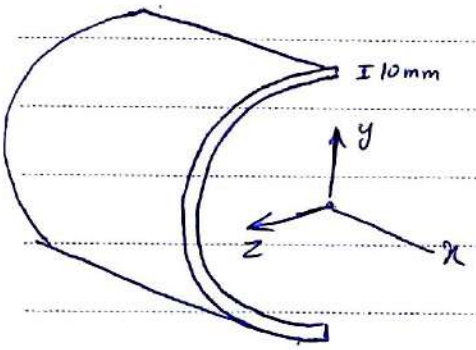
$$q(s) = \frac{v_y}{I_{zz}} \int_{z=0}^{s} y \, t(z) \cdot dz$$

برای راحتی آوردن q یک شاخه

Subject :

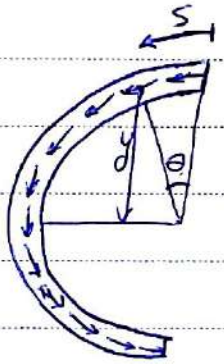
Year . Month . Date . ( )

مثال) می خواهیم توزیع تنش های را محاسبه کنیم.



$V = 10^{KN}$

$\tau_{xs} = ?$



چون مقطع متقارن است پس تا وسط رسم است.

$$q(s) = \tau_{xs}(\theta) \cdot t(\theta) = \frac{V}{I_{zz}} \int_0^s y\, t\, d\eta$$

$$y = R \cdot \cos\theta$$

$$d\eta = R \cdot d\theta$$

$$\tau_{xs}(\theta) = \frac{V}{I_{zz}} \int (R\cos\theta) \cdot (R\, d\theta)$$

$$\tau_{xs}(\theta) = \frac{V \cdot R^2}{I_{zz}} \sin\theta$$

$$I_{zz} = \int y^2\, dA$$

$$= \int (R\cos\theta)^2 (t \cdot R \cdot d\theta) = R^3 t \cdot \left[\frac{\frac{1}{2}\sin 2\theta + \theta}{2} \right]_0^{\pi}$$

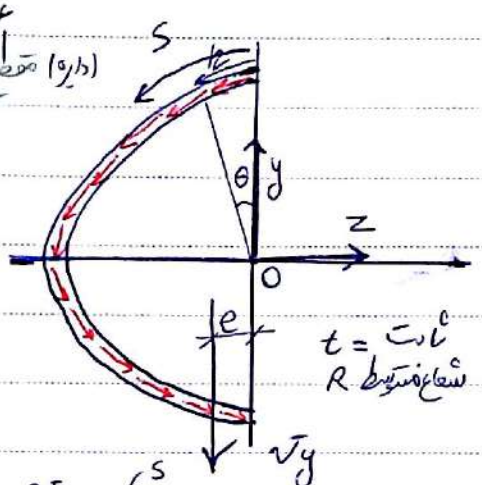
$$= \frac{\pi}{2} R^3 t$$

$$\rightarrow \boxed{\tau_{xs}(\theta) = \frac{2}{\pi} \frac{V}{R \cdot t} \sin\theta}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

Shear center
مرکز برش

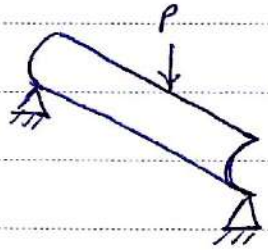
عرضی
(دارای) مقطع جدار نازک باز دایروی



(تیر با مقطع عرضی جدار نازک باز)

$$\tau_{sz}(s).\ t(s) = \frac{V_y}{I_{zz}} \int_0^s y.\ t.\ d\eta$$

در مقطع جدار نازک دایروی $\tau_{sz}(\theta) = \frac{2V}{\pi R t} \sin\theta$



به علت نازکی جداره، تنها در این تیرها جهت و نحوه تنش‌ها را می‌دانیم که این جهت در لبه‌ی تماس روی مقطع عرضی به موازات لبه‌هاست.

در کشش و فشار ساده می‌نوشتیم $\sigma = \frac{P}{A}$، منظورمان این بود که P در مرکز سطح اثر می‌کند. لذا در اینجا نیز نیروی برشی باید در نقطه‌ای قرار داشته باشد که گشتاور آن حول نقطه‌ی آن را بی‌اثر سازد. این نقطه مرکز برش نام دارد.

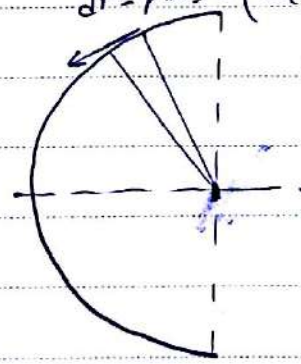


فرض می‌کنیم که مرکز برش روی محور تقارن در فاصله‌ی e از لبه جدول باشد.
اگر نسبت به مرکز O دایره بسازیم:

$$V_y \cdot e = \int \left(\tau_{sz}(\theta).\ t(\theta).\ d\eta\right) R$$

خارج قسمت: اگر نیروی برشی در مرکز برشی نبود، آن را به مرکز برش انتقال می‌دهیم که در این صورت یک گشتاور پیچشی هم اضافه می‌شود. (T+V)

$$dF = q \times ds = \left(\tau(\theta).\ t\right)\left(R.\ d\theta\right)$$



چرا حدود انتگرال از 0 تا $\frac{\pi}{2}$ در نظر گرفته شده؟

$$V.e = \int R.\ dF$$

$$= \int_{\theta=0}^{\pi/2} R^2.\left(\frac{2V}{\pi R t}\sin\theta\right).t.\ d\theta$$

$$= \frac{2}{\pi} V R \left[-\cos\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

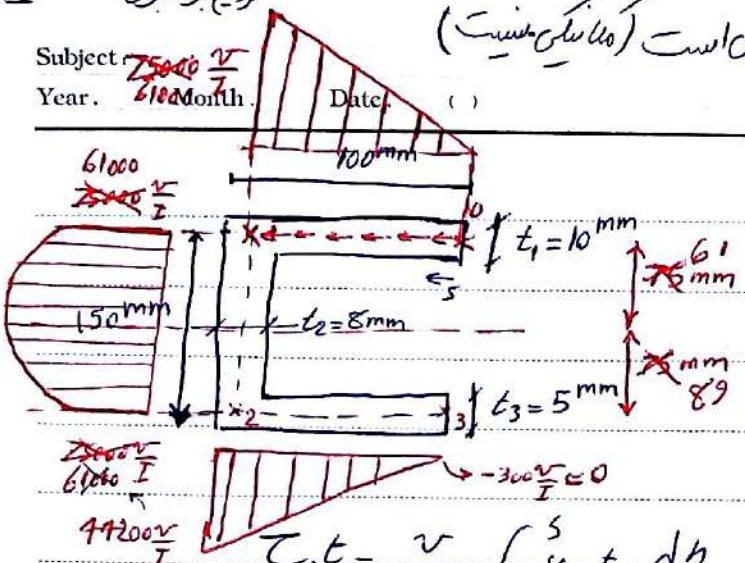
$$= \frac{2}{\pi} V R$$

$$\Rightarrow \boxed{e = \frac{2}{\pi} R}$$

توزیع جریان برش

مرکز برش به نیرو بستگی ندارد بلکه یک خاصیت هندسی است (کمانکی هست)

Subject:
Year. Month. Date. ( )



مرکز برش را در تیری با مقطع عرضی نشان داده شده تعیین کنید.

برای پیدا کردن مرکز برش

* باید حتماً از نیروی آزاد شروع کنیم که $Q=0$ است
* جهت تنش برشی را از طرق جهت نیروی برشی که بدست می آید

$$\tau . t = \frac{V}{I}\int_0^s y \cdot t \cdot d\eta$$

در مورد جریان برش، ما نسبت به تار خنثی تیر اندازه گیری می کنیم.

$0-1$: $y = 75mm$

$t = t_1 = 10^{mm}$

$$\tau . t = \frac{V}{I}\int (75)(10)\, d\eta$$

$$q(s) = \tau . t = \frac{V}{I}\frac{750}{610}(s)$$ تابعی خطی برحسب s

$$\begin{cases} q(0) = 0 \\ q(100) = \frac{75000}{61000}\frac{V}{I} \end{cases}$$

$1-2$: $y = \frac{61}{75} - s$

$t = t_2 = 8^{mm}$

$$q(s=0) = \frac{75000}{61000}\frac{V}{I}$$

$$q(s) = \frac{V}{I}\int_0^s y \cdot t \cdot d\eta + q(0)$$

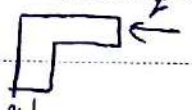
$$q(s) = \frac{V}{I}\int (\frac{61}{75} - s)\cdot 8 \cdot ds + \frac{75000}{61000}\frac{V}{I}$$

$$q(s) = \frac{488}{600}\frac{V}{I}s - 8\frac{V}{I}\cdot\frac{s^2}{2} + \frac{75000}{61000}\frac{V}{I}$$

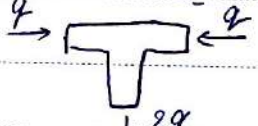
$$= \frac{V}{I}\left(600 . s - 4s^2 + \frac{75000}{61000}\right)$$

توزیع جریان برش
تابعی درجه 2 برحسب s

طبق قانون کیرشوف جریان ورودی باید جریان خروجی



اگر به صورت زیر باشد:



دقت شود که تنش برشی (جریان برش) در تار خنثی ماکزیمم است

دقت نشود که در شاخه دوم، s را دوباره از صفر در نظر گرفتیم.

در نقاط تغییر جهت در شاخه ها، s را دوباره از صفر در نظر می گیریم و با توجه به این که جریان ورودی به نقطه باید برابر جریان خروجی باشد یک مقدار اولیه جریان برش به فرمول جریان برش شاخه اضافه می کنیم.

$$q(0) = \frac{75000}{61000}\frac{V}{I}$$ یعنی در نقطه "1" روی تار خنثی

$$q(\frac{61}{75}) = \frac{V}{I}\left(\frac{488}{600}\times\frac{61}{75} - 4\times\frac{61^2}{75^2} + \frac{75000}{61000}\right)$$

$$= \frac{97500}{75884}\frac{V}{I}$$

$$q(150) = \frac{V}{I}\left(\frac{480}{600}\times 150 - 4\times 150^2 + \frac{75000}{61000}\right)$$ در نقطه "2"

$$= \frac{75000}{74200}\frac{V}{I}$$

برای پیدا کردن مرکز برش، توزیع جریان برش را در مقطع بدست آورده و سپس برآیند آن را در هر شاخه بدست آورده و نسبت به یک نقطه دلخواه گشتاور بگیرید. فاصله این برآیند تا نقطه دلخواه را بدست آورده و نسبت به یک نقطه دلخواه دیگر گشتاور بگیرید. این کار را برای دو نقطه دلخواه دیگر تکرار کنید. محل برخورد این سه برآیند، مرکز برش است.

Subject:

Year. Month. Date

(در محاسبه مرکز برش، لازم نداریم منفی است)

چون تقارنی در راستای y وجود دارد و برآیند جریان برش در راستای z صفر است

با توجه به جریان برش در راستای شاخه‌ی 2-3 نسبت به V_z . ولی به این خاطر که مرکز سطح را اشتباه محاسبه کرده‌ایم این اتفاق نمی افتد

$$\bar{y} = \frac{100\times10\times0 + 150\times8\times75 + 100\times5\times150}{1000+1200+500} = 61$$

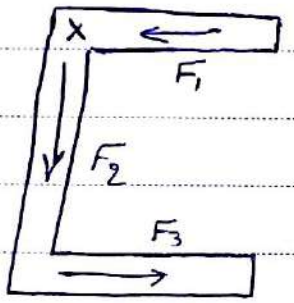
$$2\text{-}3: \quad y = -89$$

$$t = 5$$

$$q(s) = \frac{V}{I}\int(-89)(5)\,ds + 75000\frac{V}{I} = -445\frac{V}{I}s + 44800\frac{V}{I}$$

$$q(100) = (-445)(100)\frac{V}{I} + 44200\frac{V}{I} = -300\frac{V}{I} \simeq 0$$

برای بدست آوردن مرکز برش:



چون نیروی برشی به سمت پایین است و جمع F_1 و F_2 و F_3 باید نیروی برشی را ایجاد کند پس باید $F_1=F_3$ و F_2 مساوی نیرو

$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

$$I_1 = 10\times100\times61^2$$

$$I_2 = \frac{8\times150^3}{12} + 8\times150\times(75-61)^2$$

$$I_3 = 100\times5\times89^2 =$$

$$\Rightarrow I = 8.01\times10^6\ mm^4$$

نیرو برآیند منفی توزیع جریان برش است

مساحت مثلث توزیع جریان

$$V\times e = F_3\times150$$

$$F_3 = \frac{1}{2}\times100\times44200\frac{V}{I} = 221\times10^4\frac{V}{I}$$

$$\Rightarrow V\times e = 221\times10^4\times150\times\frac{V}{I}$$

$$e = \frac{221\times10^4\times150}{I} \Rightarrow e = 41\ mm$$

دقت شود که آشکارا هر دو نیروی برشی F و F باید هم‌دیگر را خنثی کنند

دقت شود که آشکارا باید نیروی برشی و نیروی برشی و نیروی برشی هم‌دیگر را خنثی کنند

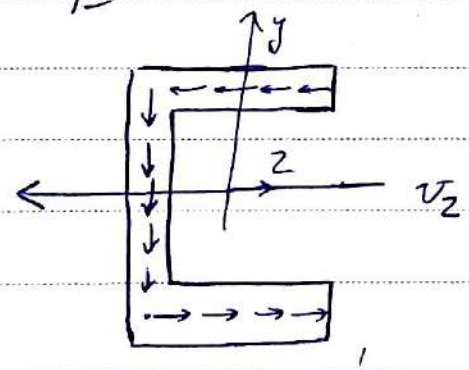
فقط ما باید بیاییم برآیند نیروی برشی را در نقطه‌ای قرار دهیم تا گشتاور هم جهت تولید کند

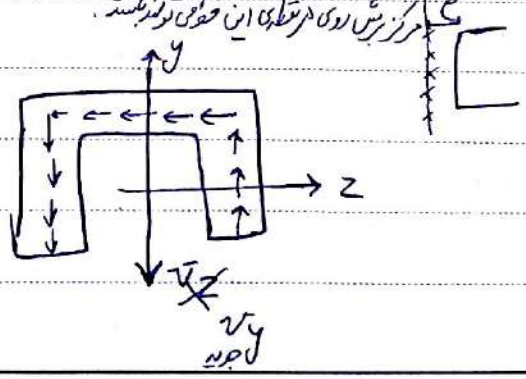
چون گشتاور نیروی F_3 در خلاف جهت عقربه‌های ساعت است

پس گشتاور نیروی F برآیند هم باید در خلاف جهت عقربه‌های ساعت باشد.

پس مرکز برش روی خطی عمودی به فاصله‌ی 41 mm و در سمت چپ نقطه‌ی مفروض قرار دارد. برای بدست آوردن این نقطه

یا باید قطعه را 90° بچرخانیم و دوباره محاسبه کنیم یا این که یک نیروی برشی افقی به قطعه وارد کنیم.





مرکز برش روی فرضی این خطوط قرار نیست.

P4PCO

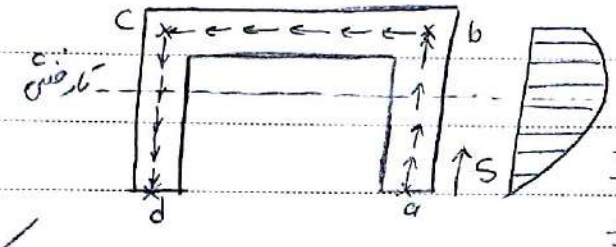
Subject: برای بدست آوردن مرکز برش، ابتدا روی شاخه ها جهت های فرضی برای جریان برش را نظر می گیریم. در حل در صورتی که جهت در نظر گرفته شده غلط باشد، مقدار آن منفی می شود که در این صورت باید جهت نیروی برشی را برعکس شود.

Year. Month. Date.

$$\tau_{sz}(s)\cdot t(s) = \frac{V_z}{I_{yy}}\int z\cdot t\cdot ds$$ برای شکل سمت چپ حل می کنیم:

$$q(s) = \tau(s)\cdot t(s) = \frac{V_y}{I_{zz}}\int y\cdot t\cdot ds$$

برای شکل سمت راست:



$$\bar{y} = \frac{10\times100\times50 + 5\times100\times50 + 150\times8\times0}{10\times100 + 5\times100 + 150\times8} = 27.8$$

فاصله تار خنثی از بالا (از مرکز ثقل ab)

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{5\times100^3}{12} + (5\times100)(50-27.8)^2 + \frac{150\times8^3}{12} + (8\times150)(27.8)^2 + \frac{10\times100^3}{12} + (10\times100)(50-27.8^2)$$

$$= 2.923\times10^6\ mm^4$$

y را نسبت به تار خنثی (y=0) برحسب s می نویسیم.

$$y = -72.2 + s$$

$$a-b:\quad q_1(s) = \frac{V_y}{I}\int(s-72.2)10\,ds$$

$$q_1(s) = \frac{V_y}{I}(5s^2 - 722s)$$

$$q_1(0) = 0$$

$$q_1(72.2) = \frac{V_y}{I}(5(72.2)^2 - 722(72.2)) = -26064\frac{V_y}{I}$$

$$q_1(100) = \frac{V_y}{I}(5(100)^2 - 722(100)) = -22200\frac{V_y}{I}$$

چون منفی به دست آمد پس جهت فرض ها را در شاخه ی ab باید برعکس در نظر بگیریم.

$$b-c:\quad y = 27.8$$

$$q_2(s) = \frac{V_y}{I}\int(27.8)(8)\,ds + q_b$$

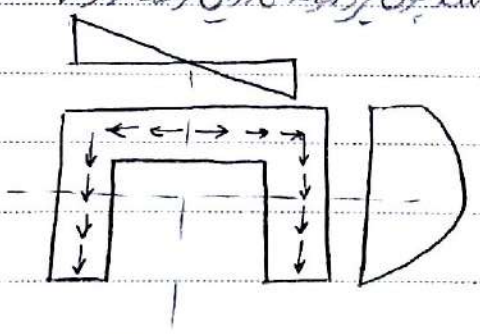
$$q_2(0) = 0 - 22200\frac{V_y}{I}$$

$$q_2(150) = 27.8\times8\times150\frac{V_y}{I} - 22200\frac{V_y}{I} = 18360\frac{V_y}{I}$$

$$q_2(61) = 27.8\times8\times61\times\frac{V_y}{I} - 22200\frac{V_y}{I} = -5633\frac{V_y}{I} \simeq 0$$

جریان برش در وسط جهت تار خنثی قبل از دوران صحیح است

بخش منفی و بخش مثبت است. جریان ها در شاخه ab باید کمی از تار خنثی کنند چون نیرو و لنگر ای در این راستا ندارد.



Subject:

Year. Month. Date. ( )

c-b: $y = +27.8 - s$

$$q(s) = \frac{V_y}{I}\int (27.8 - s)(5)\,ds + q_c$$

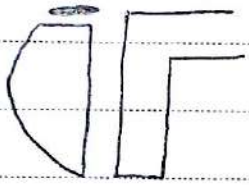
$$q(s) = \frac{V_y}{I}\left[5\times 27.8 s - 5\frac{s^2}{2}\right] + 12360\frac{V_y}{I}$$

$$q(0) = +12360\frac{V_y}{I}$$

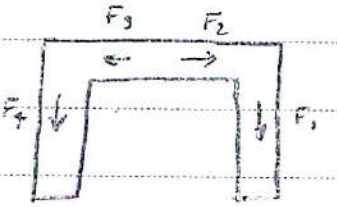
$$q(27.8) = \frac{V_y}{I}\left[5\times 27.8^2 - 5\times\frac{27.8^2}{2}\right] + 12360\frac{V_y}{I}$$

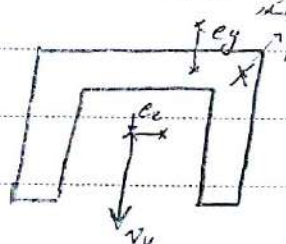
$$= 14292\frac{V_y}{I}$$

$$q(100) = \frac{V_y}{I}\left[5\times 27.8\times 100 - 5\times\frac{100^2}{2}\right] + 12360\frac{V_y}{I} = 1260\frac{V_y}{I} \simeq 0$$



برای بدست آوردن مرکز برش:





q را در جهش قبل طوری فرض کردیم که برش بدست آورد. اکنون اگر e_z را بدست آوریم موقعیت دقیق مرکز برش را بدست خواهیم آورد.

برای بدست آوردن F_4

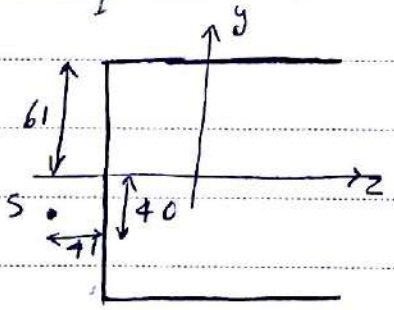
$$F_4 = \int_0^{100} q(s)\,ds = \int\left(\frac{V_y}{I}\left[5\times 27.8 s - \frac{5s^2}{2}\right] + 12360\frac{V_y}{I}\right)ds$$

$$= \frac{V_y}{I}\int\left[1395 - \frac{5s^2}{2} + 12360\right]ds = \frac{V_y}{I}\left[\frac{1395 s^2}{2} - \frac{5(100)^3}{6} + 12360\,s\right]_0^{100}$$

$$= \frac{V_y}{I}\,1.97\times 10^6$$

گشتاور حول C:

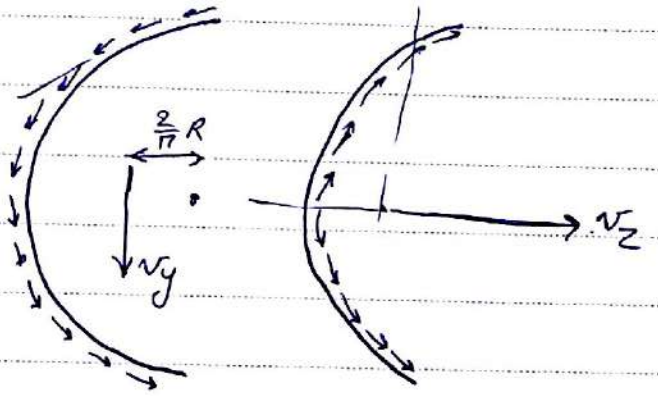
$$V\times e = \frac{V_y}{I}\times 1.97\times 10^6\times 150 \Rightarrow e = \frac{1.97\times 10^6\times 150}{2.923\times 10^6} = 101$$



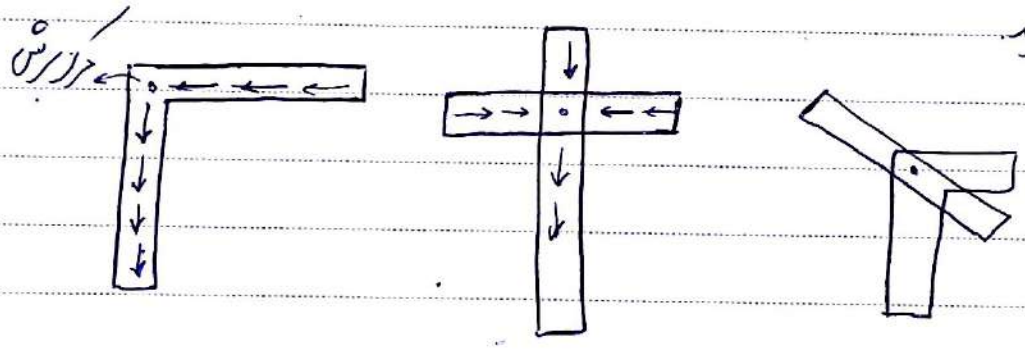
Subject:

Year. Month. Date. ( )

اگر مقطع ما متقارن باشد، مرکز برش قطعاً روی محور متقارن قرار خواهد گرفت.



اگر مقطع عرضی ما از n شاخه تشکیل شده باشد که همه در یک نقطه به هم وصل شده باشند مرکز برش در همان نقطه‌ی اتصال است تا شاخه‌ها را حفر کند.



مرکز برش تیر I شکل.

